



Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Wydział Studiów Edukacyjnych

Zakład Edukacji Dziecka

Izabella Kaiser

**Kompetencje matematyczne dzieci
kończących edukację przedszkolną
w systemie tradycyjnym
i systemie Montessori**

Dysertacja doktorska
napisana w Zakładzie Edukacji Dziecka
Wydziału Studiów Edukacyjnych

Promotor pracy
prof. UAM dr hab. Małgorzata Cywińska

Poznań 2015

*Za życzliwość, opiekę,
cenne wskazówki merytoryczne
w trakcie pisania pracy
oraz poświęcony czas i wsparcie
składam serdeczne podziękowania
Pani Prof. dr hab. Małgorzacie Cywińskiej*

SPIS TREŚCI:

Wstęp	7
Rozdział I	
Dojrzałość szkolna w literaturze przedmiotu	
1. Dojrzałość szkolna – zróżnicowania definicyjne	11
2. Obszary dojrzałości szkolnej	14
3. Uwarunkowania dojrzałości szkolnej	17
4. Badania nad dojrzałością szkolną	20
5. Dojrzałość do uczenia się matematyki	27
Rozdział II	
Podstawy dziecięcej matematyki	
1. Charakterystyka właściwości rozwojowych dzieci w wieku przedszkolnym w kontekście nabywania kompetencji matematycznych	31
2. Pojęcie kompetencji matematycznych	35
3. Rozwijanie kompetencji matematycznych dzieci w wieku przedszkolnym	37
4. Metody nauczania matematyki	42
5. Trudności dzieci w uczeniu się matematyki	54
6. Uzdolnienia matematyczne dzieci	64
Rozdział III	
Kompetencje matematyczne dzieci kończących edukację przedszkolną a założenia Podstawy programowej wychowania przedszkolnego	
1. Edukacja matematyczna w aspekcie Podstawy Programowej Wychowania Przedszkolnego	74
2. Analiza kompetencji matematycznych dzieci przedszkolnych w odniesieniu do Podstawy Programowej Wychowania Przedszkolnego	
2.1.liczenie obiektów i rozróżnianie błędnego liczenia od poprawnego	76
2.2.wyznaczanie przez dzieci wyniku dodawania i odejmowania przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych	79
2.3.ustalanie przez dzieci równoliczności dwóch zbiorów; posługiwanie się liczebnikami porządkowymi	82
2.4.rozróżnianie przez dzieci lewej i prawej strony, określanie kierunków i ustalanie położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów	86

2.5.orientacja dzieci w zakresie pomiaru długości oraz znajomość prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą	91
2.6.znajomość przez dzieci stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku	91

Rozdział IV

Metodyczne podstawy pracy pedagogicznej w przedszkolu tradycyjnym i przedszkolu Montessori a kształtowanie kompetencji matematycznych dzieci

1. Założenia metodyczne pracy pedagogicznej z dziećmi w przedszkolu tradycyjnym.....	97
2. Edukacja matematyczna w przedszkolu tradycyjnym	113
3. Założenia systemu pedagogicznego Marii Montessori	121
4. Nauczanie matematyki w aspekcie metody Montessori	139

Rozdział V

Podstawy metodologiczne badań własnych

1. Przedmiot i cele badań	151
2. Problemy i hipotezy badawcze	153
3. Zmienne i wskaźniki	159
4. Metody, techniki i narzędzia badawcze	170
5. Organizacja i przebieg badań. Charakterystyka badanej grupy	175

Rozdział VI

Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w świetle badań własnych.....

1. Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego	179
2. Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w zakresie wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych	192
3. Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów oraz posługiwania się liczebnikami porządkowymi	206

4.	Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w zakresie rozróżniania lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów.....	219
5.	Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori odnośnie orientacji dzieci w zakresie pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą	230
6.	Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w zakresie znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku znajomość przez dzieci stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku.....	242
7.	Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori – wskaźnik ogólny	255

Rozdział VII

Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w ocenie nauczycieli w świetle badań własnych.....

1.	Poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego w ocenie nauczycieli	263
2.	Poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie w zakresie dodawania i odejmowania liczb wspomaganego liczeniem na palcach lub innych zbiorach zastępczych w ocenie nauczycieli	270
3.	Poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi w ocenie nauczycieli.....	279
4.	Poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie rozróżniania prawej i lewej strony oraz określania kierunków i ustalania położenia przedmiotów w ocenie nauczycieli	288
5.	Poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie dokonywania pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą w ocenie nauczycieli	297

6. Poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie orientacji w czasie - znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w ocenie nauczycieli	305
--	-----

Rozdział VIII

Przebieg procesu rozwijania kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w świetle badań własnych.....	318
--	------------

1. Częstotliwość realizacji treści matematycznych stosowana przez nauczycieli w przedszkolach Montessori i tradycyjnych.....	319
2. Metody pracy nauczyciela stosowane w realizacji treści matematycznych w przedszkolach Montessori i tradycyjnych.....	322
3. Formy pracy nauczyciela stosowane w realizacji treści matematycznych w przedszkolach Montessori i tradycyjnych.....	326
4. Praca z dzieckiem z uzdolnieniami matematycznymi w przedszkolu Montessori i tradycyjnym	327
5. Praca z dzieckiem z trudnościami w edukacji matematycznej w przedszkolu Montessori i tradycyjnym	329
6. Działania edukacyjne nauczycieli podejmowane w celu podnoszenia poziomu kompetencji matematycznych dzieci.....	336
7. Działania nauczycieli dotyczące rozwijania własnych kompetencji w zakresie prowadzenia zajęć matematycznych z dziećmi.....	339
Zakończenie	343
Bibliografia	348
Aneksy	366

WSTĘP

Cały cywilizowany świat troszczy się o swoich najmłodszych obywateli. Dostrzega się, jak ważna jest wczesna stymulacja i organizowanie środowiska sprzyjającego wszechstronnemu rozwojowi, podkreśla się wpływ początkowej edukacji na późniejsze osiągnięcia dziecka. Istotny jest także fakt, iż obecne przemiany społeczne i kulturowe zmierzają w kierunku „społeczeństwa wiedzy”, w którym „wiedza staje się wartością, dobrem, środkiem do osiągania społecznych i ekonomicznych rezultatów w skali społeczeństw, jaki i w indywidualnym życiu” (Sowińska, 2011, s.10).

W okresie wczesnego dzieciństwa możliwości rozwojowe dzieci są największe. Dzieci zadziwiają tym, jak się uczą, czego się uczą i w jakim tempie to czynią. Stają się wówczas bardzo uważnymi obserwatorami otaczającego świata, wnikliwymi badaczami rzeczywistości, pytają o przyczyny, zależności, wykazują ciekawość i chęć poznania swego otoczenia. G. Vico twierdzi, że „wszystko, co najważniejsze dla życia człowieka, zdarza się do szóstego roku życia” (za: Waloszek 2006, s.234). E. Erikson skraca jeszcze ten okres uważając za krytyczne pierwszych pięć lat życia, a J. Bowlby z kolei dowodzi, że czasem największej gotowości rozwojowej są pierwsze dwa lata życia dziecka (za: Waloszek 2006).

Dzieci kończące edukację przedszkolną mają za sobą pierwsze doświadczenia edukacyjne. Są to doznania niezwykle istotne dla dalszego ich rozwoju intelektualnego i społeczno-emocjonalnego, ważne dla kolejnych zadań rozwojowych podejmowanych przez człowieka w celu osiągnięcia sukcesu życiowego (Kuszak, 2011).

Sprawą oczywistą jest konieczność prowadzenia w przedszkolu edukacji matematycznej. J. Kłysiewicz (2008) wyraźnie podkreśla, że podstawowe umiejętności matematyczne człowiek nabywa właśnie w wieku przedszkolnym. W Podstawie Programowej Wychowania Przedszkolnego akcentuje się, iż zadaniem pracy edukacyjnej jest zapewnienie każdemu dziecku, jak najkorzystniejszych warunków do wszechstronnego rozwoju i osiągnięcie dojrzałości szkolnej. Zajęcia matematyczne mają przyczyniać się do harmonijnego i integralnego rozwoju umysłowego dzieci, obejmującego rozwój zdolności rozumienia i rozumowania, a także przewidywania i oceniania faktów, rozwój pamięci i wyobraźni. Przedszkolna matematyka powinna rozwijać dociekliwość dzieci, ich poznawczą postawę wobec świata i kształtować pozytywny stosunek do uczenia się. Należy ją łączyć z intensywnym rozwojem

myślenia, z rozwojem odporności emocjonalnej oraz ćwiczeniem podstawowych umiejętności matematycznych.

W ostatnim roku edukacji przedszkolnej tworzone są fundamenty szkolnej edukacji matematycznej i podatność dzieci na uczenie się. To, czy dzieci będą odnosić sukcesy w szkolnej nauce matematyki zależy od poziomu ich rozumowania, odporności emocjonalnej oraz umiejętności, które można z powodzeniem kształtować już na poziomie edukacji przedszkolnej. Jest to – jak zauważa E. Gruszczyk-Kolczyńska „bodaj jedyny sposób uchronienia ich przed niepowodzeniami i wprowadzenia na ścieżkę szkolnych sukcesów” (Gruszczyk-Kolczyńska, 1997, s.5-6). Ze względu na ciągłość edukacyjną, zadaniem przedszkola jest właściwe przygotowanie dzieci do nauki szkolnej, w tym do uczenia się matematyki. Zaznaczyć trzeba również, że przy istniejących nadal dużych trudnościach w formułowaniu rzetelnych i jednoznacznych symptomów ryzyka dyskalkulii, bardzo istotna jest analiza pierwszych doświadczeń matematycznych dziecka na etapie przedszkolnym. Edukacja przedszkolna wydaje się, więc być najwłaściwszym czasem na zdiagnozowanie ewentualnych trudności i zapewnienie dziecku potrzebnego wsparcia i pomocy w rozwoju. Nauczyciel przedszkola powinien mieć świadomość, jakie czynniki determinują trudności w uczeniu się matematyki, aby skutecznie poszukiwać efektywnych metod nauczania. Znajomość dziecka, jego słabych i mocnych stron pozwala na określenie sfer rozwoju, w których potrzebuje ono największego wsparcia, tak, aby w przyszłości zapewnić mu sukcesy w uczeniu się matematyki. Jednakże należy „zachować przy tym szczególną ostrożność, mając świadomość, że nie wszystkie wczesne objawy trudności mogą utrzymywać się do okresu szkolnego i skutkować specyficznymi zaburzeniami rozwoju umiejętności szkolnych” (Kłysiewicz, 2008, s.17).

Ponadto kompetencje matematyczne stanowią integralną część wielu dziedzin, zawodów i sfer życia każdego człowieka. Stają się one coraz bardziej niezbędne w sytuacjach i potrzebach życiowych. Współczesny wykształcony człowiek nie może funkcjonować bez matematyki. Posługują się nią lekarze, ekonomiści, psychologowie, geografowie, przyrodnicy, genetycy, informatycy i wielu innych. U. Oszwa zauważa, iż „rozwój informatyzacji ułatwia życie, ale też wymaga wysokich umiejętności numerycznych w obsłudze dużej sprawności w operowaniu liczbami” (Oszwa, 2009, s.9). J. Małkińska dodaje, że „matematyka jest przedmiotem, który przede wszystkim uczy prawidłowego, logicznego myślenia i (...) nikt, a tym bardziej człowiek

wykształcony nie może być zwolniony z myślenia” (Małkińska, 2005, s.2). Z. Semadeni dodaje, iż „coraz więcej osób uświadamia sobie, że w dzisiejszych czasach nie może być dobrej szkoły bez rzetelnego kształcenia matematycznego” (Semadeni, Gruszczyk-Kolczyńska, Treliński, Bugajska-Jaszczołt, Czajkowska 2015, s.7).

Efektywność wspomaganie rozwoju, a także wyniki edukacji matematycznej zależą w dużym stopniu od treści i metod kształcenia właściwie dobranych do możliwości rozwojowych dziecka. Za podstawowe wskaźniki skuteczności oddziaływań pedagogicznych należy - zdaniem S. Guz (2006) uznać osiągnięcia rozwojowe dzieci. Autorka powołując się na poglądy wielu psychologów i pedagogów polskich i zagranicznych (zob. np. Hurlock, 1985; Matczak, 1987; Włodarski, 1987; Sowińska, 2002; Prokopiuk, 2003) twierdzi, że zasadniczym celem działań edukacyjnych jest optymalizacja rozwoju, jego wspomaganie i ukierunkowywanie. S. Guz (2006) podaje listę najważniejszych zadań rozwojowych przypadających na wiek przedszkolny. Wymienia m.in. osiąganie takiego poziomu rozwoju zdolności, sprawności, umiejętności, motywacji i postaw, które pozwolą na zdobywanie rzetelnej wiedzy, poznawanie i rozumienie otaczającego świata i samego siebie. Istotne jest tworzenie sprzyjających warunków do pełnego, wszechstronnego i harmonijnego rozwoju, tak, aby dziecko na każdym etapie życia mogło realizować najważniejsze zadania i możliwości rozwojowe.

Ważne jest określenie poziomu i zakresu wiadomości i umiejętności matematycznych dzieci, gdyż są one komponentem ich wszechstronnego rozwoju sprzyjającego osiąganiu gotowości szkolnej. W tym kontekście istotną wydaje się być podjęta w pracy analiza poziomu kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację w przedszkolu tradycyjnym i prowadzonym metodą Marii Montessori. Ważne jest również zanalizowanie - przez pryzmat skuteczności, jak przebiega proces rozwijania kompetencji matematycznych dzieci w przedszkolach tradycyjnych i montessoriańskich. Konieczna jest, bowiem świadomość tego, w jaki sposób uczą się małe dzieci, jakie czynniki różnicują rozwój ich umiejętności matematycznych oraz jakie metody i formy pracy z dzieckiem przedszkolnym są najbardziej skuteczne. Ponadto analiza poziomu kompetencji matematycznych dzieci przed rozpoczęciem nauki szkolnej służy realizacji ważnych celów społecznych, takich jak wyrównanie startu szkolnego tych dzieci, które mają problemy z opanowaniem instytucjonalnych

wymagań oraz dostarczenie każdemu dziecku doświadczeń niezbędnych do kształtowania postaw sprzyjających kontynuowaniu edukacji przez całe życie.

Podjęte badania będą także głosem w ogólnopolskiej dyskusji na temat budzącej wiele kontrowersji decyzji Ministerstwa Edukacji Narodowej dotyczącej objęcia dzieci pięcioletnich obowiązkowym przygotowaniem przedszkolnym i obniżeniem wieku podejmowania edukacji szkolnej. Uzyskane wyniki powinny wyjaśnić, czy wyższe kompetencje matematyczne dzieci istotnie różnicuje ich wiek oraz czas trwania edukacji przedszkolnej. Mogą również okazać się pomocne przy tworzeniu warunków edukacyjnych, w których świat matematyki będzie stał otworem nie tylko dla wybranych jednostek.

I. Zagadnienie dojrzałości szkolnej w literaturze przedmiotu

1. Dojrzałość szkolna – różnicowania definicyjne

Rozwój człowieka i osiągnięcie przez niego pełnej dojrzałości implikuje konieczność stymulacji zarówno samej jednostki, jak i otoczenia, którego zadaniem jest zapewnienie jej właściwych warunków życia. Człowiek dojrzewa na różnych poziomach – cieleśnie, psychicznie, społecznie, a także duchowo.

Jednym z elementów dojrzałości jest dojrzałość szkolna, którą powinno przejawiać dziecko rozpoczynające edukację w szkole.

Termin „dojrzałość szkolna” wprowadzony został w drugiej połowie XX wieku przez psychologów niemieckich (Brzezińska, 1992b). Jest to pojęcie bardzo szerokie znaczeniowo; obejmuje zarówno rozwój fizyczny, jak również psychiczny i społeczny dzieci (Białołęcka i współ., 1975).

E. Gruszczyk-Kolczyńska (1992) zauważa, że dojrzałość szkolną można ujmować statycznie jako moment czy efekt równowagi między wymaganiami szkoły a możliwościami dziecka lub dynamicznie jako długotrwały proces rozwoju fizycznego i psychicznego prowadzący do przystosowania się dziecka do nauki w szkole (także Wiatrowska i Dmochowska, 2013; Reclik, 2006).

W literaturze przedmiotu bardziej popularnym jest statyczny sposób definiowania dojrzałości szkolnej. Takie stanowisko prezentuje S. Szuman (za: Waszkiewicz, 1996), w ujęciu którego dojrzałość szkolna to osiągnięcie przez dziecko takiego poziomu rozwoju fizycznego, społecznego i psychicznego, które czyni je wrażliwym i podatnym na systematyczne nauczanie i wychowanie. Podobną definicję podaje W. Okoń określając dojrzałość szkolną jako „osiągnięcie przez dziecko takiego stopnia rozwoju umysłowego, emocjonalnego, społecznego i fizycznego, jaki umożliwi mu udział w życiu szkolnym i opanowanie treści programowych” (Okoń, 1987, s.54). I. Dudzińska natomiast pisze, że dojrzałość szkolna „określana jest ogólnie jako poziom wszechstronnego rozwoju dziecka, który pozwala mu rozpocząć naukę szkolną i bez trudności sprostać wynikającym z tego faktu obowiązkom” (Dudzińska, 1983, s.458; podobnie Oszwa, 2008c). Przytoczone definicje łączy stanowisko M. Przetacznikowej, która uważa, że „dojrzałym do podjęcia nauki szkolnej nazwiemy dziecko, które osiągnęło taki stopień rozwoju umysłowego, społeczno-emocjonalnego oraz fizycznego, jaki umożliwi mu przystosowanie się do wymagań szkoły, jak również kontynuację z powodzeniem nauki w klasie pierwszej” (Przetacznikowa, 1973, s.132). Zwięźle

dojrzałość szkolną definiuje B. Wilgocka-Okoń pisząc, że jest to „taki stopień rozwoju dziecka, jaki pozwala mu podjąć obowiązki szkolne” (Wilgocka-Okoń, 1972, s.9).

W literaturze przedmiotu oprócz terminu dojrzałość szkolna mówi się również o gotowości szkolnej (edukacyjnej), przygotowaniu do szkoły, przygotowaniu do nauki, przygotowaniu do roli ucznia, adaptacji dziecka do szkoły lub zdolności do podjęcia nauki w szkole. W obiegowej nomenklaturze są one stosowane raczej zamiennie, ale D. Waloszek (2006) uważa, że wielu teoretyków i praktyków, zajmujących się pedagogiką przedszkolną niesłusznie nie dostrzega różnicy między tymi pojęciami (także Świdrak, 2007; Oszwa, 2008c; Żuchelkowska, 2010, Wiatrowska i Dmochowska, 2013). Podobnie jest w terminologii światowej. Niemiecki termin *Schulreife* to właśnie dojrzałość szkolna, angielski *school readiness* oznacza gotowość szkolną, francuski *l'aptitude a' la scolarité* mówi o zdolności do podjęcia nauki w szkole, wreszcie rosyjski *podgotowka k' szkole* dotyczy wręcz przygotowania do szkoły (za: Wilgocka-Okoń, 2003).

Przyczyną zróżnicowania zakresu znaczeniowego pojęć dojrzałość szkolna i gotowość szkolna – jest zdaniem B. Wilgockiej-Okoń (2003) - zarówno rozumienie istoty i mechanizmów procesów dojrzewania, jak i roli uczenia się w procesie rozwojowym (także Brzezińska, 1992c; Szewczuk, 2014).

W pierwszym przypadku zakłada się, że dokonujące się w dziecku zmiany rozwojowe mają charakter spontaniczny i wynikają z dojrzewania. Jest to spojrzenie z punktu widzenia psychologii rozwojowej i „mówimy wówczas o dojrzałości jako wyniku procesów wzrastania i różnicowania” (Waloszek, 2006, s.235). Zwolennicy tej koncepcji podkreślają „wewnętrzny” charakter dojrzałości kładąc nacisk na psychologiczne prawidłowości rozwoju dziecka (Brzezińska, 1987). Tak rozumiana dojrzałość „nie podlega regulowaniu zewnętrznemu, zależy od indywidualnego programu rozwojowego zapisanego w DNA” (Waloszek, 2006, s.235). A zatem w wyniku naturalnych zmian dziecko staje się dojrzałe do podjęcia nowych zadań i funkcji. Na tym polega istota rozwoju człowieka.

W tym ujęciu nie można mówić o „dojrzałości szkolnej”, bo dziecko nie dojrzewa do szkoły, lecz do nowych funkcji.

W drugim podejściu natomiast - przyjmując punkt widzenia psychologii uczenia się, zakłada się, że istnieje możliwość ćwiczenia, stymulowania pewnych właściwości dziecka, stwarzając mu szansę osiągnięcia gotowości szkolnej. Istotny w tej koncepcji

jest moment przygotowania czy gotowości do podjęcia zadań szkolnych. A więc należy mówić o gotowości „jako rezultacie doświadczeń w rozwiązywaniu różnorodnych zadań” (Waloszek, 2006, s.235). Dziecko zmienia się głównie w wyniku działań przygotowujących je do określonych zadań, jakie wyznaczy mu szkoła. J. S. Bruner dodaje, że „gotowość nie jest stanem, na który wystarczy po prostu czekać, ale trzeba ją wykształcić” (Bruner, 1978, s.778). Tak rozumiana gotowość jest zależna od warunków zewnętrznych, które tworzy przedszkole (czy inne placówki edukacyjne) oraz środowisko rodzinne. W związku z tym rodzi się przekonanie, że gotowość do nauki można kontrolować. Wyrazem takiego podejścia jest praktyka odraczania obowiązku szkolnego, której wartość jednak pod wątpliwość poddaje D. Waloszek (2006).

Gotowość jest, więc „relacją między następującymi elementami:

- a. interakcja między czynnikami biologicznymi i społecznymi,
- b. różne możliwości i zdolności dziecka,
- c. zdolności, które wymagane są po to, by możliwe było osiągnięcie sukcesu w uczeniu się czegoś np. czytania,
- d. rodzaj i poziom procesu nauczania” (Brzezińska, 1987, s.43-44).

Z przedstawionych rozważań wynika, że granice znaczeniowe pojęć „dojrzałość szkolna” i „gotowość szkolna” są nieostre. D. Waloszek podsumowuje, że najlepszym rozwiązaniem jest „ulożenie problemu przygotowania jako efektu dojrzałości organizmu, jak i specjalistycznie wywołanej gotowości w przestrzeni między zabawą a zadaniem” (Waloszek, 2006, s.236). Stąd też pojęcie *Schulreife* – dojrzałość szkolna – zastąpiono w krajach niemieckojęzycznych terminem *Schulfertigkeit*, czyli zdarność czy gotowość szkolna (za: Wilgocka-Okoń, 2003). Również w polskiej literaturze częściej mówi się o gotowości szkolnej rozumianej jako gotowość nie tylko do szkoły, lecz ogólniej do uczenia się i obejmującej szeroki zakres uwarunkowań rozwojowych dziecka (Wiatrowska i Dmochowska, 2013).

Liczne interpretacje dojrzałości szkolnej nie dają zatem jednolitego obrazu. Wywoływały i nadal wywołują liczne dyskusje i uwagi krytyczne. Obecnie są one szczególnie burzliwe, z powodu obniżenia przez Ministerstwo Edukacji Narodowej wieku obowiązku szkolnego z siedmiu do sześciu lat. W kontekście tych zmian oraz obowiązku objęcia diagnozą wszystkich dzieci mających rozpocząć naukę szkolną coraz częściej zamiast pojęcia dojrzałość szkolna, zadaniem E. Gruszczyk-Kolczyńskiej

(2011) stosuje się termin gotowość do nauki szkolnej lub dojrzałość przedszkolna (także Szewczuk, 2014).

2. Obszary dojrzałości szkolnej

Około lat dwudziestych XX wieku, kiedy pojawiło się pojęcie dojrzałość szkolna istniała tendencja, aby identyfikować ją z pewnym stopniem inteligencji (Pelcowa, 1965; Brzezińska, 1992a). Poziom inteligencji – mierzony za pomocą testu decydował o kwalifikowaniu dziecka do nauki szkolnej. Stopniowo rozszerzano termin dojrzałość na jeszcze inne obszary.

S. Szuman mówi o osiągnięciu przez dzieci stopnia i poziomu dojrzałości szkolnej w następujących dziedzinach:

- a) „w kształtowaniu ich organizmu,
- b) w rozwoju sprawności motorycznych,
- c) w rozwoju mowy, czyli opanowaniu języka ojczystego,
- d) w zakresie zdobytej przez nie wiedzy, stanowiącej podstawę ich orientacji w świecie przyrody i życiu społecznym,
- e) w zakresie zdobytych przez nie umiejętności celowego posługiwania się różnymi przedmiotami codziennego użytku i niektórymi narzędziami,
- f) w zakresie rozwoju i usprawniania pracy ich umysłu m.in. pod względem ukształtowania się umiejętności dostrzegania zagadnień i prób rozwiązywania ich, zdolności krytycznego ustosunkowania się do własnych i cudzych twierdzeń oraz w zakresie kształtowania się pojęć,
- g) w zakresie ukształtowania się ich emocjonalności, czyli w dziedzinie uczuciowo dodatniego lub ujemnego ustosunkowania się do różnych zjawisk, zdarzeń i faktów oraz poleceń i zadań, które mają wykonać,
- h) w zakresie rozwiniętych już zainteresowań i zamiłowań, charakterystycznych dla ich wieku,
- i) w zakresie ukształtowania się ich woli, stopnia uległości woli wychowawców i zdolności do świadomego wysiłku i celowej wytrwałej pracy,
- j) w zakresie osiąganego w tym wieku równowagi psychicznej i zdolności harmonijnego współżycia z dorosłymi i innymi dziećmi” (za: Pelcowa, 1965, s.23).

Wielu badaczy rozważa dojrzałość dziecka do szkoły w aspekcie: intelektualnym, emocjonalno-społecznym i fizycznym (Brzezińska, 1987; Klim-

Klimaszewska, 2011; Magda-Adamowicz, 2010).

W aspekcie rozwoju fizycznego chodzi o taki poziom, który zapewnia odpowiednią odporność na zmęczenie, wysiłek fizyczny, choroby, a także dobrą sprawność we wszystkich zakresach motoryki (w tym sprawność manualną - szybkość, precyzję i koordynację ruchów rąk przy optymalnym napięciu mięśniowym). A. Klim-Klimaszewska (2011) podkreśla również znaczenie równowagi nerwowej dziecka, która pozwala mu panować nad reakcjami uczuciowymi i nadpobudliwością psychoruchową. L. Wiatrowska i H. Dmochowska (2013) mówiąc o dojrzałości psychomotorycznej dziecka wskazują także na takie jej aspekty, jak artykulacja oraz percepcja wzrokowa i słuchowa, czyli właściwa praca analizatorów, umiejętność dokonywania analizy i syntezy wzrokowej i słuchowej.

M. Magda-Adamowicz dodaje, że „przejawem dojrzałości fizycznej jest dobry stan zdrowia, odporność na choroby i zmęczenie, sprawność narządów zmysłu i narządów artykulacyjnych (prawidłowa wymowa głosek), ogólna sprawność ruchowa i manualna, dobra orientacja przestrzenna, koordynacja i pamięć wzrokowo-słuchowo-ruchowa. Bardzo istotne są zręczność, sprawność ruchów rąk, umiejętność hamowania pewnych impulsów ruchowych, wykonywanie ruchów ciągłych (przy wykonywaniu elementów graficznych), zdolność utrzymywania kierunku ruchu (Magda-Adamowicz, 2010, s.147).

Jeśli chodzi o dojrzałość w rozwoju umysłowym, to dziecko osiąga ją, gdy „chce się uczyć, z zaciekawieniem i zadowoleniem mówi o nowych obowiązkach szkolnych, interesuje się czytaniem i pisanem, pragnie dowiadywać się różnych rzeczy od dorosłego” (Klim-Klimaszewska, 2011, s.143). Dziecko dojrzałe do podjęcia nauki szkolnej jest zdolne do wytwarzania elementarnych pojęć abstrakcyjnych takich, jak: kształt, wielkość, kierunek, odległość, czas oraz posiada „pewien zasób doświadczeń oraz wyobrażeń będących podstawą do rozwoju myślenia, procesów analizy i syntezy wzrokowej i słuchowej, na których opiera się nauka czytania, pisanie i matematyki w klasie pierwszej” (Klim-Klimaszewska, 2011s.143). Ponadto prezentuje prawidłowy rozwój mowy pod względem artykulacji dźwięków, zasobów pojęć i słów oraz swobody poprawnego wypowiadania myśli. L. Wiatrowska i H. Dmochowska (2013) jako wskaźniki dojrzałości słownikowo-pojęciowej dziecka uznają „posiadanie odpowiedniego zasobu słowno-pojęciowego i graficzno-dźwiękowego, poprawne używanie słownictwa, umiejętność wyrażania myśli, konstruowanie wniosków

i uogólnień, prawidłowe dokonywanie klasyfikacji w obrębie poznanych rzeczy i zjawisk” (Wiatrowska i Dmochowska, 2013, s.14). Ważna jest również umiejętność koncentracji uwagi nie tylko na tym, co aktualnie interesuje dziecko, ale też na zajęciach i zadaniach proponowanych przez nauczyciela. Zdaniem M. Magdy-Adamowicz (2010) dojrzałym pod względem umysłowym, jest dziecko zainteresowane wiedzą, źródłami informacji, czytaniem, pisanem, liczeniem, dziecko swobodnie, zrozumiale wypowiadające się i posiadające podstawowe umiejętności matematyczne.

I wreszcie dziecko dojrzałe do podjęcia nauki w sferze uczuciowo-społecznej to takie, które jest samodzielne, zaradne, chętnie i łatwo współdziała w grupie rówieśników, potrafi podporządkować się regułom zabawy i poleceniom słownym, potrafi opanować swoje emocje - ich przejawy zewnętrzne ruchowe i słowne (Brzezińska 1987). Zdaniem L. Wiatrowskiej i H. Dmochowskiej dziecko dojrzałe w sferze emocjonalno-motywacyjnej cechuje „odpowiednia reakcja emocjonalna na działania bodźcowe, wytrzymałość na stres związany z podejmowaniem zadań, prawidłowość kontaktów interpersonalnych, umiejętność samoobsługi i podporządkowywania się, przygotowanie na odraczenie gratyfikacji, pozytywne nastawienie do nauki i uczenia się” (Wiatrowska i Dmochowska, 2013, s.14). M. Magda-Adamowicz (2010) dodaje, że o dojrzałości emocjonalno-społecznej świadczą samodzielność, zaradność, umiejętność nawiązywania kontaktów z rówieśnikami i dorosłymi, stabilność emocjonalna, obowiązkowość, wytrwałość, wiara we własne możliwości, umiejętność podporządkowania się zasadom obowiązującym w szkole i poczucie odpowiedzialności za wykonywane zadanie. M. Świdrak stwierdza, iż „dziecko społecznie dojrzałe do szkoły cechuje obowiązkowość, wytrwałość oraz wrażliwość na opinię nauczyciela i rówieśników” (Świdrak, 2007, s.86, także Klim-Klimaszewska, 2005, 2011).

B. Wilgocka-Okon wymienia dojrzałość dzieci w następujących sferach:

- intelektualnej – umiejętność porównywania, rozpoznawania, i odtwarzania prostych znaków graficznych, znajomość zbiorów i relacji między nimi, rozumienie otaczającego świata, umiejętność myślenia krytycznego oraz przyczynowo-skutkowego, umiejętność słuchania ze zrozumieniem;
- społeczno-emocjonalnej – umiejętność pracy w grupie, gotowość do współdziałania i współpracy, zdolność do koncentracji uwagi, pilność, wytrwałość;
- biologicznej – stan zdrowia, rozwój sił fizycznych, sprawność motoryczna,

koordynacja ruchowa (Wilgocka-Okoń, 1971).

3. Uwarunkowania dojrzałości szkolnej

I. Dudzińska (1983) uważa, że dojrzałość szkolną warunkują dwa czynniki: ogólny rozwój dziecka oraz wymagania, jakie postawi przed nim szkoła.

Na znaczenie fizycznej dojrzałości dziecka zwrócili uwagę w swych badaniach S. Szuman, A. Różycka, P. Zdunkiewicz, B. Wilgocka-Okoń, S. Radiukiewicz (za: Wilgocka-Okoń, 1972). Dowodzą one, że dziecko bardziej rozwinięte w sferze somatycznej należy uważać za lepiej przygotowane do życia szkolnego. Aczkolwiek zauważono jednocześnie, iż „w korzystnych warunkach wychowawczych następuje nieraz wyrównanie fizycznych i psychicznych braków rozwojowych” (Wilgocka-Okoń, 1972, s. 123). Na stopień dojrzałości dzieci wpływ mają również defekty somatyczne takie, jak np. wady wymowy, słuchu i wzroku (Wilgocka-Okoń, 1971). Ponadto „w wielu przypadkach obniżona gotowość szkolna może bowiem okazać się skutkiem niedożywienia, wad somatycznych, przewlekłych chorób” (Wilgocka-Okoń, 1971, s.53).

B. Wilgocka-Okoń (1971) podkreśla natomiast, że nie wiek, lecz środowiskowo uwarunkowane możliwości uczenia się odpowiadają za osiągnięcie dojrzałości szkolnej. Dziecko przychodzi na świat z pewnymi zadatkami wrodzonymi. Jednak na jego dalszy rozwój dodatkowo mają wpływ zarówno dorośli, którzy je uczą i wychowują, jak również rówieśnicy, z którymi dziecko się bawi i współdziała. Dojrzałość dziecka do podjęcia obowiązków szkolnych „jest w znacznym stopniu uwarunkowana przez czynniki zewnętrzne, tkwiące w środowisku i czynniki decydujące o możliwościach tego środowiska dostarczania odpowiednich bodźców rozwojowych” (Wilgocka-Okoń, 1972, s.65; także Świdrak, 2007; Chojak, 2010, Wiatrowska i Dmochowska, 2013).

W rozwoju dziecka przedszkolnego szczególną rolę odgrywa rodzina (Chojak, 2010). M. Magda-Adamowicz (2010) mówi o trzech aspektach wpływu rodziny na osiągnięty przez dziecko poziom dojrzałości szkolnej. Są to: warunki materialne, kulturalne i społeczno-psychologiczne rodziny. Efekty oddziaływania środowiska rodzinnego zależą w dużej mierze od:

- „struktury rodziny i związanych z tą strukturą stosunków międzyosobowych,
- sposobu pełnienia przynależnych ról przez wszystkich członków rodziny,
- stopnia uświadomienia sobie przez rodziców wychowawczej roli rodziny wobec

dziecka” (Wilgocka-Okoń, 1972, s.137).

Przeglądu badań dotyczących rodzinnych uwarunkowań poziomu dojrzałości szkolnej dziecka dokonuje M. Chojak (2010) wskazując jako główne czynniki mające wpływ na ów poziom postawy rodziców dotyczące wychowania dziecka i jego edukacji.

Badania przeprowadzone w latach 1969-1970 przez warszawski Instytut Pedagogiki wskazały na zależność między dojrzałością szkolną dziecka a zawodem ojca, zatrudnieniem obojga rodziców, wykształceniem matki oraz sytuacją bytową rodziny (Wilgocka-Okoń, 1972). Przytoczone badania dowiodły również pozytywny wpływ przedszkola na rozwój umysłowy i dojrzałość szkolną przede wszystkim dzieci wiejskich oraz tych, którym dom rodzinny nie w pełni zaspokaja potrzeby poznawcze. Dostrzeżono także korzystny wpływ wychowania przedszkolnego na osiągnięcie przez dzieci cech dojrzałości społecznej, stanowiącej niezbędny element dojrzałości szkolnej.

W procesie osiągania dojrzałości szkolnej nie można pominąć także własnej aktywności dziecka i jego doświadczeń. Badania B. Wilgockiej-Okoń (1972) pokazują, że rola doświadczeń życiowych szczególnie warunkuje stopień posiadanej przez dziecko wiedzy matematycznej, umiejętności operowania zbiorami i przeliczania ich elementów.

Stąd też dziś dojrzałość szkolną traktuje się, więc nie tylko jako zależną od wewnętrznych procesów dojrzewania, ale jako „wynik interakcji między zdatnym do szkoły dzieckiem a środowiskiem rodzinnym i wychowaniem przedszkolnym” (Wilgocka-Okoń, 2003, s.12).

Przygotowanie dziecka do szkoły jest zadaniem zarówno wychowania rodzinnego, jak i wychowania przedszkolnego. „Korzystny wpływ rodziny na rozwój dziecka stwierdza się szczególnie w tych środowiskach, w których większość energii rodziców nie pochłania przewyższanie trudności ekonomicznych i w których nie dają się odczuć napięcia w stosunkach społecznych. Tam natomiast, gdzie oddziaływanie rodziny jest siłą rzeczy słabsze (np. gdy oboje rodzice pracują zawodowo) lub mniej korzystne (w środowiskach zaniedbanych kulturalnie) główne funkcje oddziaływania pedagogicznego przypadają wszelkiego rodzaju formom oświatowo-wychowawczym” (Wilgocka-Okoń, 1972, s.33).

I. Dudzińska (1983) dodaje, że osiągnięcie dojrzałości fizycznej, emocjonalno- społecznej i umysłowej to długotrwały i powolny proces, który zaczyna się przedszkolu w pracy już z dzieckiem trzyletnim. Autorka zwraca jednocześnie uwagę

na indywidualne zróżnicowanie możliwości rozwojowych dziecka, które zależą m.in. od stanu jego zdrowia, warunków życia w rodzinie, kontaktów społecznych.

Stąd tak ważna jest właściwa realizacja programu wychowania przedszkolnego, która powinna dać każdemu dziecku szansę na osiągnięcie optymalnego poziomu dojrzałości szkolnej. Jest to zadanie szczególnie istotne w dokonujących się obecnie zmianach systemu edukacji związanych z obniżeniem wieku obowiązku szkolnego do szóstego roku życia, czego skutkiem jest konieczność przygotowania pięciolatka do podjęcia obowiązków szkolnych. Zwracają na to uwagę L. Wiatrowska i H. Dmochowska postulując, że „oprócz stymulacji funkcji psychomotorycznych, biorących udział w uczeniu się, konieczne staje się też kształtowanie w przedszkolu cech osobowościowych, które umożliwią dziecku adaptację do zadań i warunków szkolnych (Wiatrowska i Dmochowska, 2013, s.25). E. Misiorna podejmuje jeszcze jeden ważki problem, a mianowicie konieczność szanowania podmiotowości małego dziecka, zapewniającej indywidualizację procesu przygotowania go do szkoły, który „(...) dokonuje się przez i w toku każdej zabawy, podczas spotkania z mądrym i kompetentnym dorosłym, rozumiejącym prawa rozwoju i konieczność życia społecznego w dobrze jakościowo zorganizowanych warunkach, które przez zawarty w nich ład, porządek rzeczy, rytm, harmonię wyzwalały powoli takie właśnie nastawienie” (Misiorna, 2009, s.155). Przestrzega się wyraźnie przed przedmiotowym traktowaniem dziecka przygotowującego się do roli ucznia, którego „wskaźnikiem jest koncentrowanie się na ogólnikowym rozumieniu przygotowania do szkoły, czyli warunków, jakie powinno spełniać dziecko wstępujące do szkoły, na przygotowaniu materialnym i formalnym, mniej lub w ogóle na warunkach, jakim powinna odpowiadać szkoła przyjmująca dziecko” (Misiorna, 2009, s.155).

W związku z tym współcześnie szeroko dyskutowane jest również pytanie: dojrzałość dziecka czy dojrzałość szkoły? Zwraca na to uwagę K. Żuchelkowska podkreślając, że „w ostatnich latach coraz częściej mówi się o tym, że nie tylko dziecko ma być przygotowane do szkoły, ale także szkoła powinna być gotowa na przyjęcie kilkulatek w poczet uczniów” (Żuchelkowska, 2010, s.16). Wskazana dojrzałość szkoły dotyczy zatem wrażliwości na małe dziecko, jego potrzeby i możliwości rozwojowe, jego oczekiwania i problemy. Taka gotowość pozwoli na pełną adaptację dziecka do szkoły i nauki i zapewni ciągłość oddziaływań edukacyjnych (Marek i Nadrowska, 2010). W tym kontekście L. Wiatrowska i H. Dmochowska (2013) piszą o dojrzałości

instytucjonalnej przedszkola i szkoły, która gwarantuje łączność oddziaływań edukacyjnych i ich ewaluację warunkowaną potrzebami i możliwościami zarówno dziecka, jak i szkoły.

W wyniku tych dyskusji dojrzałość szkolną obecnie analizuje się jako „(...) proces i efekt współdziałania aktywności dziecka i aktywności dorosłych tworzących warunki do uczenia się, jako efekt interakcji, „współgry” właściwości dziecka i właściwości szkoły” (Wilgocka-Okon, 2003, s.12).

4. Badania nad dojrzałością szkolną

Argumentów na rzecz dojrzałości dzieci do nauki szkolnej poszukiwano od dawna. D. Waloszek (2006) przypomina takie postacie jak Platon, Arystoteles, J. A. Komeński, J. H. Pestalozzi, B. F. Trentowski, H. Radlińska, M. Grzywak-Kaczyńska czy S. Szuman. Badania nad dojrzałością lub gotowością szkolną mają, więc swoją długą historię. Zajmowali się nią głównie psychologowie rozwojowi i wychowawczy oraz pedagodzy.

W początkowych badaniach koncentrowano się na poszukiwaniu w dziecku takich właściwości, które mogą zapewnić mu powodzenie w nauce szkolnej. Można w nich wyróżnić dwa nurty (Wilgocka-Okon, 2003; Brzezińska, 1987, 1992b; Szewczuk, 2014).

Pierwszy z nich reprezentuje tzw. szkoła lipska. Jej przedstawiciele – K. Penning, H. Winkler i F. Krause kładli nacisk na znaczenie rozwoju właściwości umysłowych dziecka, które są konieczne do podjęcia nauki szkolnej. H. Winkler za najważniejszy czynnik uważał zdolność ujmowania kształtów i liczb oraz zdolność do obserwacji, sprawność manualną ręki, pamięć ruchową, wzrokową słuchową, a także zdolność koncentracji uwagi i wytrwałości (za: Wilgocka-Okon, 1972; także Szewczuk, 2014). Również K. Penning wskazywał, że ważnym warunkiem dojrzałości szkolnej jest zdolność do trwałego skupienia uwagi oraz konieczność, „aby uczeń zachowywał się wobec współtowarzyszy w sposób umożliwiający im wykonanie swych czynności, a równocześnie sam zajmował się wyznaczonymi zadaniami” (za: Pelcowa, 1965, s.21). Badacz zwrócił więc uwagę na społeczną dojrzałość szkolną (*die soziale Schulreife*) (za: Wilgocka-Okon, 1972).

Reprezentanci drugiego nurtu – tzw. szkoły wiedeńskiej zakładali, że dla dobrego funkcjonowania w szkole najważniejszą umiejętnością jest podejmowanie

i doprowadzanie do końca zadań, jakie dziecko samo sobie stawia lub narzuca mu szkoła. K. L. Bühler i L. Schenk-Danzinger (za: Wilgocka-Okoń, 2003; także Szewczuk, 2014) uważają, że umiejętnościami niezbędnymi do podjęcia nauki szkolnej są oprócz poziomu inteligencji, także umiejętności rozpoznawania i rozumienia symboli oraz umiejętność skupienia uwagi i zdolność do działania celowego (także Pelcowa 1965; Brzezińska, 1987, 1992b). Dziecko musi umieć podporządkować się poleceniom dorosłego, podjąć wskazane zadanie i doprowadzić je do końca.

W wiedeńskich badaniach nad dojrzałością szkolną uwzględniano takie czynniki, jak: „rozumienie sytuacji społecznej, umiejętność podporządkowania się woli starszych, działania intencjonalnego, koncentracji oraz współdziałania i współżycia” (Wilgocka-Okoń, 1972, s.102; też Brzezińska, 1992b).

Oba kierunki badań dążyły do znalezienia odpowiedzi na pytanie, które cechy rozwoju dziecka decydują o jego dojrzałości szkolnej i w jakim wieku ją osiąga; na ile ważnym elementem dojrzałości szkolnej jest rozwój intelektualny, czy ważne są również umiejętności działania celowego, intencjonalnego (Wilgocka-Okoń, 1972). Jednocześnie pojawiały się postulaty o potrzebie pomocy dzieciom, które nie osiągnęły dojrzałości do podjęcia obowiązków szkolnych.

Badania wykazywały także, że samo określenie stopnia dojrzałości szkolnej nie decydowało o karierze szkolnej dziecka (za: Wilgocka-Okoń, 2003). Należy bowiem pamiętać, że na sytuację szkolną dziecka wpływa nie tylko jego gotowość do nauki, ale również organizacja i metody pracy szkoły, stosunki między nauczycielem, dzieckiem i jego rówieśnikami, warunki życia i metody wychowania środowisku domowym oraz zdrowie dziecka. Stąd L. Schenk-Danzinger w swoich badaniach uwzględniała w pojmowaniu dojrzałości szkolnej zarówno rozwój umysłowy, jaki i społeczny zgodnie z tezą, że „dojrzałość szkolna stanowi problem nie tylko przy wstępowaniu do szkoły, ale przez cały okres nauki” (za: Wilgocka-Okoń, 1972, s.19).

We wczesnych badaniach nad dojrzałością szkolną analizowano takie cechy dziecka, jak: spostrzegawczość, umiejętność obserwacji, zdolność rozumowania, zasób słownictwa oraz zdolność wykonywania zadań arytmetycznych (za: Wilgocka-Okoń, 2003). Później pojawiło się pytanie: które z tych czynników najbardziej wpływają na dojrzałość szkolną. Próby poszukania rozwiązania tego problemu podjął się Niemiecki Instytut Międzynarodowych Badań Pedagogicznych we Frankfurcie

nad Menem. Badania prowadzili H. Roth, G. Schlevoigt oraz G. Wicht (za: Wilgocka-Okoń, 2003). Badacze niemieccy przyjęli następujące założenia:

„1. Aby móc brać udział w życiu szkolnym, dziecko powinno:

- z zainteresowaniem i wytrwałością ukończyć zadania przeznaczone dla jego wieku,
- podporządkować się panującym w grupie zasadom współdziałania i współżycia.

2. Aby móc uczyć się czytać i pisać, dziecko powinno w sposób zróżnicowany dostrzec i umieć odtworzyć optyczne postaci znaków.

3. Aby uczyć się rachunków, dziecko powinno znać pojęcie zbioru, obejmującego przynajmniej cztery do pięciu jednostek” (za: Wilgocka-Okoń, 1971, s.11).

W toku badań stwierdzono także, że dzieci niedojrzałe do podjęcia obowiązków szkolnych mają trudności w analizie, syntezie i odtwarzaniu znaków graficznych. Zdaniem niemieckich badaczy wynikało to z zaburzonego rozwoju zdolności porządkowania. Postawiono zatem tezę, że czynnikiem decydującym o dojrzałości szkolnej jest zdolność do porządkowania jako podstawa prawidłowego spostrzegania.

Szwedzki psycholog B. A. Johanssen był z kolei zwolennikiem teorii wieloczynnikowej (za: Wilgocka-Okoń, 2003). W swoich badaniach wykazał niską zależność między rozwojem fizycznym a rozwojem intelektualnym, ale znaczącą zależność między dojrzałością szkolną a zaburzeniami somatycznymi. Niski poziom dojrzałości szkolnej częściej diagnozowano u dzieci z defektami fizycznymi i umysłowymi. Badacz wymienia pięć grup zaburzeń, które mogą niekorzystnie wpływać na proces osiągania dojrzałości szkolnej: „choroby górnych dróg oddechowych, zaburzenia mowy, wady wzroku i słuchu, defekty umysłowe i nerwice” (Wilgocka-Okoń, 1971, s.53). Ponadto B. A. Johanssen (za: Wilgocka-Okoń, 2003) zauważył, iż czynnikiem różnicującym dojrzałość szkolną jest płeć dziecka. Dziewczynki szybciej osiągają dojrzałość, zwłaszcza emocjonalną i społeczną. Badacz dowodził również znaczący związek z postawą rodziców wobec szkoły. Osiągany przez dzieci poziom dojrzałości szkolnej wykazywał wyraźną korelację z postawą rodziców wobec szkoły.

Sporo uwagi dojrzałości szkolnej rozumianej wieloaspektowo - jako rozwój psychiczny, społeczny i fizyczny, poświęca F. Holzinger (za: Wilgocka-Okoń, 1972). Austriacki badacz szczególny nacisk położył na związki między dojrzałością fizyczną i umysłową. F. Holzinger wyjaśnia, że „choć nie można pomiaru rozwoju fizycznego utożsamiać z oceną dojrzałości szkolnej, to na podstawie dotychczasowych wyników

badan sądzić można, że dzieci wykazujące znaczne opóźnienie w swym rozwoju intelektualnym rekrutują się na ogół z grupy dzieci, których rozwój fizyczny nie sięga poziomu normalnego” (za: Wilgocka-Okoń, 1972, s.22).

Badania radzieckie W. A. Gorbaczewej i A. A. Lublińskiej (za: Wilgocka-Okoń, 1971) zmierzały do określenia działań, które doprowadzają dziecko do osiągnięcia dojrzałości szkolnej. Autorki wskazywały na „kształtowanie nawyków manualnych, zdolności analizowania, różnicowania, rozwijania słownika, wytwarzanie umiejętności słuchania i wykonywania poleceń” (za: Wilgocka-Okoń, 1971, s.12).

W Polsce również podejmowano badania nad dojrzałością szkolną. Dyskusje na ten temat toczyły się co najmniej od 1919 roku, a szczególnego znaczenia nabrały od roku 1932, kiedy Ustawa Jędrzejewiczowska dopuściła możliwość przyjmowania do szkoły dzieci sześciolletnich, pod warunkiem osiągnięcia przez nie właściwego poziomu dojrzałości szkolnej (Waloszek, 2006). W. Choma w 1931 roku zastosował serię zadań diagnostycznych do oceny dojrzałości szkolnej opracowanych przez wspomnianego wcześniej H. Winklera i podważył ich wartość prognostyczną w stosunku do dzieci wiejskich. B. Wilgocka-Okoń sugeruje, że o takiej ocenie mogła zdecydować przewaga w teście H. Winklera zadań badających rozwój mowy (Wilgocka-Okoń, 2003).

Kolejne badania przeprowadziła M. Grzywak-Kaczyńska w latach 1930-32 stosując testy bezsłowne Sancte de Sanctisa (za: Wilgocka-Okoń, 2003; także Pelcowa, 1965). Badaczka wykazała znaczne zróżnicowanie poziomu umysłowego dzieci wstępujących do szkoły: od poziomu właściwego dziecku czteroletniemu do poziomu właściwego dziecku dziewięcioletniemu. Wskazała również na środowiskowe uwarunkowania dojrzałości szkolnej. „Dzieci słabe umysłowo, dzieci chore lub wyczerpane fizycznie, dzieci, które z powodu braku opieki domowej lub z powodu złej atmosfery moralnej domu są wytracone z normalnej drogi rozwoju – nie znajdują w szkole zrozumienia dla swojej sytuacji życiowej i właściwego obojętności z nimi. Szkoła wymaganiami swoimi powiększa często te trudności, wobec których dziecko staje, i przez to zabija w dziecku wiarę we własne siły, chęć do pracy, zdolność do rozwoju” (za: Pelcowa, 1965, s.21-22).

Na szczególną uwagę zasługują badania S. Szumana (za: Wilgocka-Okoń, 1971, 2003), w których wykazano, że dziecko może osiągnąć dojrzałość szkolną dzięki odpowiednio ukierunkowanym oddziaływaniom pedagogicznym (także Świdrak, 2007).

S. Szuman zwrócił również uwagę na konieczność znajomości rozwoju poznawczego i społecznego dziecka przychodzącego do szkoły oraz ustalenia stopnia jego aktualnego rozwoju i dojrzałości. Autor dostrzegał także konieczność udzielania pomocy dzieciom niedojrzałym do obowiązków szkolnych poprzez organizowanie zespołów czy „klas wstępnych”, w których mogłyby one kompensować braki lub zaniedbania w rozwoju.

Badania A. Szemińskiej z kolei pozwoliły na ustalenie najważniejszych kryteriów dojrzałości szkolnej: „rozwoju procesów poznawczych i sprawności ruchowych; rozwoju społecznego i emocjonalnego; zasobu umiejętności i wiadomości, stanowiących konieczną podstawę do nauki w klasie pierwszej” (za: Świdrak, 2007, s.87).

Należy wspomnieć także o badaniach dojrzałości szkolnej prowadzonych przez J. Syskę, które dotyczyły przygotowania dzieci do nauki czytania, pisania i liczenia (za: Wilgocka-Okoń, 1971). Autor ograniczył się jednak wyłącznie do rozwoju intelektualnego, nie uwzględniając ani aspektu społecznego ani fizyczno-somatycznego dojrzałości szkolnej.

Lata sześćdziesiąte XX wieku zaowocowały kolejnymi ciekawymi i praktycznymi wnioskami. Ogólnopolskie badania nad dojrzałością szkolną przeprowadził warszawski Instytut Pedagogiki w latach 1969-70 pod kierunkiem B. Wilgockiej-Okoń. Miały one doprowadzić do:

- „opracowania i weryfikacji narzędzi do badań dojrzałości,
- ustalenia stopnia dojrzałości dzieci polskich w wieku 5,8-7,8 do podjęcia obowiązków szkolnych,
- określenia istotnych zależności między dojrzałością szkolną a warunkami życia dziecka” (Wilgocka-Okoń, 1971, s.16).

Celem badań było również ustalenie, jaki jest wpływ posiadanej w momencie rozpoczynania nauki dojrzałości szkolnej dziecka na jego dalszą karierę edukacyjną. Okazało się, że środowiskowo uwarunkowane możliwości rozwojowe dziecka, a nie jego wiek decydują o jego dojrzałości szkolnej (za: Waloszek, 2006). Ponadto – jak wskazuje D. Waloszek uznano, że „dzieci sześciopółletnie są gotowe do podjęcia nauki, specyficznie organizowanej, o cechach powszechności. Badania pokazały gotowość dzieci do zmiany formuły edukacji przedszkolnej, opartej głównie na zabawie, na szkolną, opartą na zadaniach” (Waloszek, 2006, s.233). Zależność osiągnięć rozwojowych dziecka od wykształcenia rodziców i od miejsca zamieszkania

potwierdzają także późniejsze badania (Przetacznik-Gierowska, 1986; Dolata i współ., 1995; Karwowska-Struczyk, 2000).

W. Dutkiewicz (za: Wilgocka-Okoń, 2003) podjęła próbę sprawdzenia, czy poziom dojrzałości szkolnej prognozuje wyniki w nauce. Okazało się, że dzieci, u których stwierdzono wysoki poziom gotowości do podjęcia obowiązków szkolnych osiągały pełne lub częściowe powodzenie szkolne.

Badania L. Wołoszynowej (za: Wilgocka-Okoń, 2003) prowadzone w latach 1976-77 pozwalały stwierdzić, że różnice w gotowości szkolnej dzieci wiejskich i miejskich utrzymują się niezależnie od formy oddziaływań przedszkolnych. Jednakże abstrahując od tych form, dzieci uczęszczające do oddziałów przedszkolnych prezentowały wyższy poziom dojrzałości szkolnej. Na szczególną rolę przedszkola w przygotowaniu dziecka do podjęcia nauki szkolnej zwrócił uwagę również J. Syska (za: Wilgocka-Okoń, 1971, 1972). Autor podkreśla, że nie wystarczy wskazać braki w rozwoju dziecka, ale przede wszystkim trzeba podejmować działania naprawcze i kompensacyjne.

Tocząca się od 2000 roku ożywiona dyskusja na temat wcześniejszego startu szkolnego dzieci sześciolletnich spowodowała, że problem dojrzałości szkolnej stał się ponownie obszarem wielu interdyscyplinarnych badań.

M. Świdrak prowadziła w 2005 roku badania, których celem było ustalenie zależności między poziomem dojrzałości szkolnej dziecka a warunkami środowiskowymi. Autorka stwierdza, że wyższy poziom dojrzałości osiągają dzieci ze szkół miejskich niż ich rówieśnicy ze szkół wiejskich. Ponadto wskazuje na liczne różnice w funkcjonowaniu szkolnym uczniów ze szkół wiejskich i miejskich w aspekcie wypełniania poleceń nauczyciela, wytrwałości i samodzielności w pracy. Badania wykazały również, że „w szkołach miejskich uczy się więcej uczniów zrównoważonych aniżeli w szkołach wiejskich, w których natomiast jest więcej uczniów zahamowanych niż w szkołach miejskich. Zarówno w jednej, jak i drugiej szkole występuje taki sam wskaźnik uczniów nadpobudliwych” (Świdrak, 2007, s.93; zob. także Kopik, 1996).

Na uwagę zasługują również dokonania badawcze I. Zwierzchowskiej (2010), która analizuje opinie nauczycieli wczesnej edukacji na temat projektu obniżania wieku rozpoczynania obowiązku szkolnego. Z przeprowadzonych badań wynika, że zdecydowana większość ankietowanych nauczycieli (95% wychowawców grup przedszkolnych i 61% nauczycieli klas 1-3) jest przeciwna włączeniu dzieci sześciolletnich do systemu nauki szkolnej, argumentując to przede wszystkim ich

niedojrzałością, szczególnie emocjonalną. Podobne wyniki uzyskały I. Rudek i A. Soroka-Fedorczuk badające poglądy nauczycieli zielonogórskich przedszkoli, z których 89,3% negatywnie ocenia pomysł wcześniejszego rozpoczynania edukacji szkolnej. Nauczyciele przedstawiają dwie grupy obaw, które są związane „z jednej strony z niewystarczającym przygotowaniem szkół na przyjęcie dzieci sześciolatków, z drugiej strony z niedostatecznym poziomem rozwoju emocjonalnego i społecznego dzieci do rozpoczynania nauki w warunkach szkolnych (Rudek i Soroka-Fedorczuk, 2010, s.131).

Odmienne natomiast wyniki uzyskała A. Skowrońska, która w latach 2007-2008 przedmiotem badań podłużnych uczyniła społeczno-emocjonalną dojrzałość dzieci sześciolatków do podjęcia nauki w szkole. Autorka dowodzi, że „dzieci sześciolatków pod względem emocjonalnym można scharakteryzować jako: zrównoważone emocjonalnie, jak na swój wiek- wrażliwe, pogodne i w dużej mierze świadome swych emocji. Rozwój społeczny też przebiega prawidłowo: nie są agresywne i złośliwe, a otwarte na kontakty z innymi dziećmi i potrafiące z innymi współdziałać” (Skowrońska, 2010, s.208). Przytoczone badania zaprzeczają zatem obawom wielu rodziców sześciolatków, że ich dzieci nie poradzą sobie w szkole.

Podobne badania empiryczne w latach 2007-2009/ 2010 przeprowadziła A. Kruszewska (2011). Ich celem było „wykazanie, że dziecko sześciolatkowe idąc do szkoły jest w stanie zmierzyć się nie tylko z przyswajaniem nowej wiedzy, ale nabywaniem innych niż dotąd umiejętności i kompetencji”(Kruszewska, 2011, s.379). Autorka dowodzi pozytywny wpływ rocznego pobytu przedszkola na rozwój społeczny dziecka w aspekcie postaw prospołecznych, otwartości, umiejętności nawiązywania relacji z rówieśnikami, podejmowania inicjatywy oraz respektowania norm społecznych. Jednocześnie A. Kruszewska (2011) zauważa wyraźne braki w edukacji emocjonalnej dzieci przedszkolnych i postuluje o weryfikację programów dydaktycznych oraz o ścisłą współpracę z rodzicami, którzy powinni aktywniej uczestniczyć w rozwoju społeczno-uczuciowym dziecka.

Współczesna koncepcja wychowania przedszkolnego wprowadzająca obniżenie obowiązku szkolnego dzieci z 7 na 6 lat (Ustawa z dnia 19 marca 2009 o zmianie ustawy o systemie oświaty - Dz. U. nr56, poz.458) spowodowała, że wielu badaczy ponownie zainteresowało problemami dojrzałości szkolnej

Bardzo szerokie prace badawcze w ramach projektu „ Dziecko sześciolatek u progu nauki szkolnej” realizowała B. Walasek-Jarosz (2010). Autorka dowodzi, że na dojrzałość szkolną sześciolatek dodatnio wpływa zarówno status społeczny ich rodzin mierzony poziomem wykształcenia rodziców, jaki i ich staż przedszkolny. Ponadto wskaźnik dojrzałości szkolnej badanych dzieci jest proporcjonalny do aspiracji edukacyjnych ich rodziców.

5. Dojrzałość do uczenia się matematyki

W zakresie pojęcia dojrzałości szkolnej zawiera się dojrzałość do uczenia się matematyki. F. Bartmiński (1991) dostrzega jednak, że w wielu pracach dotyczących dojrzałości szkolnej, zagadnienie gotowości dziecka do uczenia się matematyki nie było wyodrębniane. Wyjątek stanowią badania H. Moroza (1981), R. Więckowskiego (1981) oraz J. Sokólskiej (1985) (za: Bartmiński 1991).

Zdaniem S. Szumana (za:Reclik, 2006) dojrzałość do uczenia się matematyki można analizować w dwóch kategoriach: wrażliwości i podatności. „Wrażliwość to, jego zdaniem, zdolność do samodzielnego rozwiązywania zadań i wykorzystywania umiejętności matematycznych w sytuacjach życiowych, natomiast podatność na uczenie się matematyki jest równoznaczna z rozumowaniem w tej konwencji logicznej, w której na zajęciach w szkole przekazywane są treści matematyczne”(za: Reclik, 2006, s.175).

Z. Semadeni (za Reclik, 2006) z kolei wyróżnia trzy komponenty dojrzałości dziecka do uczenia się matematyki w warunkach szkolnych. Są to:

- dojrzałość intelektualna, w szczególności dojrzałość operacyjna, symboliczna i numeryczna;
- dojrzałość motoryczno-percepcyjna, czyli sprawność manualna, koordynacja wzrokowo-ruchowa, spostrzeganie oraz
- dojrzałość emocjonalna, przejawiająca się w odporności emocjonalnej na sytuacje trudne.

Przy wyznaczaniu dojrzałości do uczenia się matematyki należy zatem wziąć pod uwagę poziom rozwoju procesów psychicznych, które dziecko angażuje w trakcie nabywania wiadomości i umiejętności matematycznych (Gruszczyk-Kolczyńska, 1992, Kurant, 2008). Jak zauważa S. Guz „warunkiem koniecznym do zrozumienia przez dziecko pojęć i opanowania operacji matematycznych jest osiągnięcie przez nie dojrzałości w zakresie operacyjnego rozumowania na poziomie konkretnym” (Guz,

2006, s.169; także Bartmiński, 1991; Dominek i Pełka-Woszko, 2004). Jest to niezbędne, gdyż – jak zaznacza Z. Krygowska (1979) pojęcia matematyczne i język matematyki są w swej naturze operacyjne.

M. Świdrak analizując dojrzałość szkolną dzieci rozpoczynających naukę w klasie pierwszej mówi o dojrzałości do liczenia, która jej zdaniem „związana jest z umiejętnością określania stosunków przestrzennych, czasowych, ilościowych, klasyfikowania przedmiotów według przeznaczenia oraz dokonywania działań dodawania i odejmowania w zakresie dziesięciu” (Świdrak, 2007, s.86; także Magda-Adamowicz, 2010).

Dojrzałość do uczenia się matematyki wymaga również wysokiego poziomu sprawności percepcyjno-motorycznych. Dużą rolę odgrywa prawidłowa koordynacja oraz dynamika procesów nerwowych, które decydują o zdolności scalania aktywności i organizowania jej w umiejętność.

Na dojrzałość emocjonalną z kolei zwraca uwagę E. Gruszczyk-Kolczyńska stwierdzając, iż „dzieci są dojrzałe do uczenia się matematyki wówczas, gdy chcą się uczyć matematyki, potrafią zrozumieć sens zależności matematycznych omawianych na lekcjach i wytrzymują napięcia, które towarzyszą rozwiązywaniu zadań matematycznych” (Gruszczyk- Kolczyńska, 1992, s.22).

Według wspomnianej E. Gruszczyk-Kolczyńskiej na dojrzałość matematyczną składają się następujące umiejętności i funkcje:

1. dziecięce liczenie, czyli zdolność i gotowość do liczenia, a w szczególności:
 - a. sprawność w przeliczaniu obiektów na poziomie ikonicznym, symbolicznym i werbalnym;
 - b. zdolność do rozróżniania liczenia błędnego od poprawnego oraz dodawania i odejmowania w zakresie 10 – na palcach lub pamięciowo;
 - c. umiejętność porównywania, gdzie jest więcej, a gdzie mniej;
2. operacyjne rozumowanie na poziomie konkretnym dotyczące:
 - a. zdolności uznawania zasady stałości ilości nieciągłych, przejawiającej się uznawaniem równoliczności zbiorów, mimo dokonanej zmiany w układzie poszczególnych elementów;
 - b. zdolności do porządkowania serii w kolejności rosnącej lub malejącej;
3. zdolność do funkcjonowania na poziomie symbolicznym i ikonicznym bez

konieczności odwoływania się do poziomu enaktywnego i działań praktycznych w odniesieniu do:

- a. pojęć matematycznych (aspekt językowo-symboliczny);
 - b. działań arytmetycznych (formuła arytmetyczna i jej przekształcenie);
 - c. schematów graficznych (grafy strzałkowe, drzewka, tabelki);
4. dojrzałość emocjonalna na sytuacje trudne, przejawiająca się w:
- a. samodzielności i chęci do rozwiązywania zadań;
 - b. odporności na sytuacje problemowe;
5. prawidłowy rozwój sprawności manualnej, percepcji spostrzegania oraz koordynacji wzrokowo-ruchowej (Gruszczyk-Kolczyńska, 1989, 1992; Kawczyńska, 2004; Oszwa, 2008; Wiatrowska i Dmochowska, 2013; Reclik, 2006).

Podobne stanowisko zajmuje U. Oszwa (2008c), która mówi o dwóch aspektach dojrzałości szkolnej: pedagogicznym i psychologicznym.

Aspekt pierwszy – pedagogiczny dotyczy opanowania przez dziecko podstawowych wiadomości o figurach geometrycznych, nabycia umiejętności liczenia, wykonywania działań arytmetycznych oraz dokonywania obliczeń. A. Klim-Klimaszewska dodaje, że „dziecko rozpoczynające naukę w klasie I powinno posiadać umiejętność uzasadniania, wnioskowania, wiązania przyczyn ze skutkami, porządkowania wiadomości i operowania nimi samodzielnie. To bowiem stanowi podstawę do przyszłego myślenia abstrakcyjnego, niezbędnego do uczenia się matematyki” (Klim-Klimaszewska, 2005, s.112).

Aspekt psychologiczny dojrzałości szkolnej obejmuje natomiast „umiejętności radzenia sobie w sytuacjach problemowych, przezwyciężania i pokonywania niepowodzeń, adekwatnego reagowania na porażkę i wyciągania wniosków z popełnianych błędów oraz odpowiedniego poziomu odporności emocjonalnej” (Oszwa, 2008c, s.8). Autorka wlicza do niego również poziom funkcjonowania dziecka w zakresie procesów poznawczych, takich jak percepcja wzrokowa oraz wzrokowo-przestrzenna, kompetencje językowe, analityczno-syntetyczne, uwaga czy pamięć. R. Dominek i A. Pełka-Woszko (2004) wskazują jeszcze jeden element dojrzałości psychicznej do uczenia się matematyki, jakim jest odpowiedni poziom decentracji. Chodzi o to, by dziecko potrafiło koncentrować się jednocześnie na kilku aspektach spostrzeganej sytuacji np. na kolorze, wielkości położeniu oraz przejawia gotowość w zakresie odwracalności w myśleniu i działaniu, umie powrócić (myślami) do punktu wyjścia.

Poziom przygotowania dziecka przedszkolnego do przyswajania pojęć i kształtowania umiejętności matematycznych oraz jego uwarunkowania były przedmiotem badań F. Bartmińskiego (1991). Autor twierdzi, że już w wieku 6 lat ponad $\frac{1}{3}$ dzieci osiąga taki poziom dojrzałości do uczenia się matematyki, który zapewnia im powodzenie szkolne w tym zakresie. Ponadto okazało się, że ani płeć, ani system wcześniejszej opieki wychowawczo-edukacyjnej czy środowisko lokalne nie wpływają w istotny sposób na dojrzałość dzieci do edukacji matematycznej w szkole.

Również E. Gruszczyk-Kolczyńska (1989) dowodzi, że dojrzałość do uczenia się matematyki osiągają wcześniej lub później wszystkie dzieci pozostające w normie intelektualnej. Jednakże zdaniem autorki szczególnie ważne jest, aby to nastąpiło przed rozpoczęciem nauki w klasie I, gdyż w przeciwniej sytuacji, mogą wystąpić zaburzenia, a nawet zablokowanie procesu uczenia się matematyki.

II. Podstawy dziecięcej matematyki

1. Charakterystyka właściwości rozwojowych dziecka w wieku przedszkolnym w kontekście nabywania kompetencji matematycznych

Edukacja matematyczna dziecka w wieku przedszkolnym jest ściśle związana się z intensywnym rozwojem myślenia, kształtowaniem się odporności emocjonalnej oraz nabywaniem nowych kompetencji podczas praktycznej działalności zabawowej.

Dla dydaktyków matematyki szczególnie interesujące są teorie wyjaśniające proces tworzenia i rozwoju pojęć u dzieci. Psycholodzy, pedagodzy i dydaktycy oraz metodycy matematyki zastanawiają się, w jaki sposób nabywane i rozwijane są umiejętności liczenia, jakie procesy i funkcje są konieczne do prawidłowego ich rozwoju i czy są jakieś specyficzne procesy psychiczne odpowiedzialne za rozwój umiejętności matematycznych.

W odpowiedzi na te problemy U. Oszwa (2006) przytacza wyniki badań i obserwacji J. Piageta, E. Gruszczyk-Kolczyńskiej oraz B. Butterwortha.

W piagetowskiej teorii rozwoju intelektualnego wyróżnia się cztery stadia następujące jedno po drugim w określonym porządku u każdego dziecka:

1. stadium inteligencji praktycznej, sensoryczno-motorycznej (stadium sensomotoryczne) trwające do około drugiego roku życia;
2. stadium inteligencji przedoperacyjnej (stadium przedoperacyjne) od 2 do 6 - 7 lat;
3. stadium inteligencji konkretno-operacyjnej (stadium operacji konkretnych) od 6 - 7 lat do 11 - 12 lat, czyli okres nauczania początkowego w szkole;
4. stadium inteligencji formalno-operacyjnej (stadium operacji formalnych), rozwijające się od 11 - 12 lat do dorosłości (za: Siwek, 1998).

Dziecko przedszkolne jest zatem w okresie wyobrażeń przedoperacyjnych, czyli „nie odróżnia procesu przekształceń przedmiotów od czynności manipulacyjnych, nie łączy rezultatu tych czynności z dokonywanymi przekształceniami, nie wraca do punktu wyjściowego, lecz ujmuje rezultat tych czynności jako nowe statyczne konfiguracje (Tyborowska, 1969, s.236). K. Kotlarski (1990) zauważa również, że „w stadium przedoperacyjnym dzieci nie potrafią wykonać wewnętrznych operacji umysłowych, które umożliwiają połączenie przeciwstawnych czynności w jedną całość. Czynność zewnętrzna wykonywana jest zawsze na przedmiotach i łączy się ze spostrzeganiem” (Kotlarski, 1990, s.28).

Przykładem rozumowania dziecka w wieku przedszkolnym jest ocenianie liczebności zbioru według powierzchni, jaką zajmuje. Również stosunki czasowe i przestrzenne ujmowane są łącznie i bez zróżnicowania. J. Piaget zauważa, że „czas istnieje dla dziecka jakby wewnątrz ruchu i stanowi zaledwie jedną z jego właściwości przestrzennych - polegających na zmianach pozycji przedmiotu, który się porusza” (za: Tyborowska, 1969, s.236).

J. Piaget w swej teorii dotyczącej rozwoju poznawczego i inteligencji operacyjnej podaje, że pojęcie liczby i umiejętności arytmetyczne budowane są na bazie podstawowych zdolności. Wśród nich wymienia:

- zdolność rozumienia zasady przechodniości,
- świadomość stałości,
- zdolność oderwania się od fizycznych cech przeliczanych obiektów (za: Oszwa, 2006).

H. Siwek (1998) transferuje stadia rozwoju intelektualnego wyróżnione przez J. Piageta na poziomy myślenia matematycznego opracowane przez P. van Hiele'a w oparciu o bogate doświadczenia w nauczaniu matematyki. P. van Hiele opisuje każdy z etapów „poprzez działania, jakie są dostępne uczniowi na danym poziomie, struktury myślenia i aktywności matematyczne towarzyszące tym działaniom oraz język, coraz bardziej ścisły i poprawny pod względem matematycznym” (za: Siwek, 1998, s.36). Autor mówi kolejno o poziomie: wzrokowym, opisowym i logicznym, które zdaniem H. Siwek (1998) należy traktować jako odpowiedniki stadium inteligencji przedoperacyjnej, stadium inteligencji konkretno-operacyjnej oraz stadium inteligencji formalno-operacyjnej odnoszącej się do teorii rozwoju intelektualnego J. Piageta.

Bardzo ważną z punktu widzenia nabywania przez dziecko kompetencji matematycznych jest teoria amerykańskiego psychologa J. S. Brunera (za: Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2004). W teorii rozwoju umysłowego człowieka autor wymienia trzy systemy reprezentacji, które bazują na działaniu, wyobrażeniach oraz na mowie. Reprezentacje te nazywa:

- „enaktywną – są to ubiegłe zdarzenia, które mogą być reprezentowane w umyśle w formie schematów ruchowych,
- ikoniczną – są to zdarzenia reprezentowane w formie syntetycznych obrazów,

- symboliczną – reprezentowanie sensu zdarzeń za pomocą słów lub innych symboli” (za: Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2004, s.134; także Kawczyńska, 2004).

D. Wood (2006) wyjaśnia, że reprezentacje enaktywne są zbliżone pojęciowo do piagetowskiej inteligencji praktycznej. „Na przykład dziecko, które potrafi pogrupować zestawy obiektów zgodnie z jednym lub kilkoma kryteriami, takimi jak, powiedzmy, rozmiar, kolor czy kształt, wykazuje enaktywnie określony poziom pojmowania pojęcia klasyfikacji. Jeśli dzieci mogą sobie wyobrazić lub też narysować obrazki, które przedstawiają wynik serii działań, to wtedy używają one reprezentacji ikonicznych” (Wood, 2006, s.210). Jednakże autor wskazuje również na rozbieżności w poglądach J. Piageta i J. S. Brunera w kwestii wieku dziecka, w którym dostępne są mu różne sposoby reprezentacji. „Co za tym idzie, tam, gdzie teoria J. Piageta przewiduje, że dzieci będą w stanie wykonywać zadania zakładające użycie abstrakcyjnych, hipotetycznych twierdzeń czy algebraicznego zapisu dopiero po osiągnięciu stadium operacji formalnych, J. S. Bruner dla odmiany twierdzi, że dużo młodsze dzieci są w stanie nauczyć się zarówno wykonywania, jak i rozumienia tego typu działań intelektualnych pod warunkiem otrzymania właściwej instrukcji”(Wood, 2006, s.210)

W interpretacji H. Siwek (1998) trzy reprezentacje J. S. Brunera występują we wszystkich poziomach wyznaczonych przez P. van Hiele^a, a tym samym także w każdym stadium rozwojowym J. Piageta. Autorka pokazuje na przykładach konkretnych treści matematycznych możliwości przechodzenia przez dziecko drogi od reprezentacji enaktywnej poprzez ikoniczną do symbolicznej.

Docelowym poziomem rozumowania dziecka jest kształtowanie się i organizowanie operacji konkretnych. „Są to działania przeprowadzone tylko w umyśle, charakteryzujące się stosunkowo dużym stopniem uogólniania, tworzące całościowe systemy, które dają się odwracać i składać” (Gruszczyk-Kolczyńska, 1989, s.55). E. Gruszczyk-Kolczyńska (1989) uważa, iż jest to konieczny warunek, aby dziecko przyswoiło pojęcie liczby naturalnej, opanowało cztery działania matematyczne oraz rozwiązywało zadania tekstowe.

A. Szemińska (1981) z kolei dokonuje ciekawych porównań sposobów myślenia dziecka na poziomie przedoperacyjnym i w późniejszym stadium ukształtowanych już operacji konkretnych w zakresie rozwiązywania zadań z przekształceniami (np. przelewanie płynów z różnych naczyń), wnioskowania i klasyfikowania. Autorka

podsumowuje, że dopiero, gdy dziecko osiągnie poziom operacji konkretnych, wtedy zrozumie kardynalny aspekt liczby, będzie umiało porównywać liczebność zbiorów oraz określi różnice między nimi, będzie także rozumiało sens zadań tekstowych.

Na tym poziomie rozumowania dziecko ustala równoliczność zbiorów bez konieczności manipulowania przedmiotami i abstrahując od cech jakościowych, czyli odkrywa zasadę niezmienności (też Bruner, 1978). E. Gruszczyk-Kolczyńska przestrzega jednak, iż „pojawienie się tych możliwości poznawczych w rozumowaniu dziecka nie oznacza, że może je ono stosować we wszystkich kategoriach przestrzenno-czasowych” (Gruszczyk-Kolczyńska, 1989, s.56). Okazuje się, że stałość masy uznają dopiero siedmio-, ośmiolatkowie, a najpóźniej rozumowanie operacyjne pojawia się w obrębie jednostek czasu (za: Gruszczyk-Kolczyńska, 1989).

A. Szemińska dostrzega znaczącą rolę w procesie przechodzenia od myślenia przedoperacyjnego do operacji konkretnych własnej aktywności dziecka, rozmaitych czynności manipulacyjnych przez nie wykonywanych. Autorka dodaje, że „dla rozwoju myślenia jest szczególnie ważne, aby czynności dziecka były wykonywane świadomie i skierowane na określony cel (Szemińska, 1981, s.124). Podobne stanowisko zajmuje E. Gruszczyk-Kolczyńska, wyjaśniając, że „natura dojrzałości psychicznej do uczenia się matematyki jest taka, iż nie można jej ukształtować u dzieci ani przez pokazywanie i powtarzanie wzorów zachowania, ani przez wyjaśnianie. To, co składa się na taką dojrzałość, dziecko musi samodzielnie zdobyć, odkryć i wypróbować (Gruszczyk-Kolczyńska, 1989, s.112).

Bardzo ważne znaczenie dla rozwoju procesów poznawczych ma zabawa, która „w wieku przedszkolnym stopniowo staje się bogatsza w treść, bardziej zorganizowana i zbiorowa (Tyborowska, 1969, s.237). Dzięki aktywności zabawowej wzbogacają i różnicują się uczucia dziecka, jego zasób wiadomości, słownictwo i sprawność ruchowa, a także kształcą się uczucia moralne, estetyczne i społeczne. Ponadto poprzez zabawę dziecko poznaje otaczający świat, uczy się go rozumieć, doskonali się jego sprawność manualna, koordynacja wzrokowo-ruchowa oraz myślenie przyczynowo-skutkowe. Wraz z tym rozwijają się zainteresowania i wola dziecka.

Pod koniec wieku przedszkolnego pojawia się zaciekawienie zjawiskami przyrodniczymi, chęć zrozumienia ich przebiegu i coraz większa potrzeba rozumienia, wyjaśniania związków między obserwowanymi zjawiskami. Te właściwości sprzyjają -

zdaniem A. Szemińskiej (1981), rozpoczęciu systematycznego rozwijania myślenia i kształtowania pojęć matematycznych.

2. Pojęcie kompetencji matematycznych

Zachodzące we współczesnym świecie intensywne przemiany społeczne, ekonomiczne i naukowo-techniczne sprawiły, że zaistniała konieczność wyposażenia młodego człowieka, już od samego początku edukacji, w pakiet takich kompetencji, które są niezbędne w samodzielnym i odpowiedzialnym życiu (Dudel, 2013).

Pierwsza lista kompetencji nabywanych w procesie edukacji opracowana została w 1921 roku przez Międzynarodową Ligę Nowego Wychowania. W 1996 roku w ramach prac Międzynarodowej Komisji do Spraw Edukacji XXI wieku powstał raport, zawierający wskazania dotyczące uczenia się przez całe życie. W 1997 roku w Strategii Edukacji MEN została opublikowana pierwsza wersja Podstawy Programowej, w której pojawiło się pojęcie kompetencji.

Pierwsza dekada XXI wieku to czas ożywionej dyskusji przedstawicieli wielu nauk na temat interpretowania pojęcia kompetencja.

W ujęciu lingwistycznym kompetencja oznacza „(...) zakres uprawnień do zajmowania się określonymi sprawami i podejmowania dotyczących ich decyzji lub zakres czyjeś wiedzy, umiejętności i doświadczenia pozwalający się wypowiadać na określony temat” (za: Dudel, 2013, s.14).

W literaturze pedagogicznej pojęciu kompetencje nadaje się zróżnicowane znaczenia. Ponadto B. Dudel (2013) zwraca uwagę na często obserwowane zamienne stosowanie terminu umiejętności lub kwalifikacje czy umiejętności wyższego rzędu. Natomiast D. Waloszek (1998) nazywa kompetencje „użytymi preferencjami”, „umiejętnościami w kontekście”, czyli zastosowanymi w działaniu. Do owych preferencji autorka zalicza uczenie się, współdziałanie, komunikowanie się, opracowywanie informacji i odpowiedzialność.

W. Okoń podaje, że w „pedagogice jako zdolność do osobistej samorealizacji kompetencja jest podstawowym warunkiem wychowania; jako zdolność do określonych obszarów zadań kompetencja jest uważana za rezultat procesu uczenia się” (Okoń, 1995, s.129).

A. Męczkowska (2002) przedstawia spotykane w literaturze pedagogicznej różne definicje pojęcia kompetencja, wywodzące się z odmiennych stanowisk

filozoficznych. Autorka wyznaczyła pięć obszarów znaczeniowych terminu kompetencja:

- kompetencja jako podstawa sprawności działania;
- kompetencja jako warunek konstruowania psychospołecznej tożsamości jednostki;
- kompetencja jako zdolność refleksyjnego działania;
- kompetencja jako warunek dystansującego rozumienia;
- kompetencja jako potencjał działania o charakterze emancypacyjnym.

A zatem pojęcie kompetencja może być rozumiane w rozlicznych kontekstach i przyjmować wąski lub szerszy zakres znaczeniowy.

W wąskim ujęciu kompetencje traktowane są jako umiejętności i wiadomości jednostki. Takie ujęcie proponuje J. Raven (za: Dudel, 2013), twierdząc, że kompetencje obejmują takie sprawności i zdolności człowieka, które pozwalają mu na efektywne działanie. Podobne stanowisko prezentuje M. Czerepaniak-Walczak definiując kompetencje jako „świadomy, wyuczalny, satysfakcjonujący, choć nie niezwykley poziom sprawności warunkujący efektywne zachowanie się (działanie) w jakiejś dziedzinie” (Czerepaniak-Walczak, 1997, s.87). Również R. Michalak posługuje się wąskim ujęciem omawianego terminu interpretując, kompetencje jako „wiedzę i umiejętności niezbędne do rozwiązania zadania” (Michalak, 2011, s.133). Autorka wymienia kompetencje szczegółowe (matematyczne, językowe, muzyczne, fizyczne, intrapersonalne, wizualne, artystyczne) oraz kompetencje ogólne np. samorealizacji, komunikacyjne i poznawcze. R. White (za: Dudel, 2013) natomiast uważa, że na „kompetencje” składają się umiejętności i wiedza, które warunkują skuteczną adaptację do wymagań społecznych w różnych dziedzinach życia. Z taką interpretacją zgadza się także M. Dudzikowa pisząc, że za pomocą kompetencji można „inicjować i z określoną skutecznością realizować związane z danym obszarem działań zadania zgodnie z przyjętymi standardami” (za: Andrzejewska, 2011, s.321).

Szersza interpretacja pojęcia „kompetencje” uwzględnia dodatkowo postawy, motywację, wartości i standardy. Takie definiowanie preferuje S. Dylak, dla którego „kompetencja jest złożoną dyspozycją, stanowiącą wypadkową wiedzy, umiejętności, postaw, motywacji, emocji i wartościowania” (za: Dudel, 2013, s.15). Również w Zaleceniach Parlamentu Europejskiego i Rady w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie kompetencja jest kombinacją cech konstytutywnych, takich jak: wiedza, umiejętności i przyjmowana postawa (Zalecenia

Parlamentu Europejskiego i Rady z dnia 18 grudnia 2006 roku w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie [Dz.U.L394 z 30.12.2006]s.2).

W niniejszej pracy przyjęto, że kompetencje są dyspozycjami wyuczanyymi, które dziecko nabywa w toku celowego i przemyślanego procesu nauczania i wychowania. Są to takie wiadomości i umiejętności, które umożliwiają mu skuteczne realizowanie zadań na odpowiednim poziomie.

W podjętych badaniach analizowane będą kompetencje matematyczne dzieci kończących edukację przedszkolną. Jednym bowiem z zadań nauczycieli przedszkola jest zapewnienie dzieciom warunków do optymalnego rozwoju w zakresie logicznego myślenia, samodzielnego dokonywania wyborów i radzenia sobie z problemami. Dzięki temu dziecko będzie nabywać kompetencje matematyczne, które – zdaniem B. Dudel „umożliwiają rozwiązywanie problemów wynikających z codziennych sytuacji” (Dudel, Szada-Borzyszkowska, 2013, s.96).

Autorka stwierdza, że podstawą kompetencji matematycznych jest umiejętność liczenia (Dudel i Szada-Borzyszkowska, 2013). R. Reclik dodaje, że „kompetencje matematyczne ucznia związane są nie tylko z nabyciem i uaktywnieniem pewnej, określonej wiedzy matematycznej, ale również z integracją tej wiedzy oraz umiejętnym jej stosowaniem w różnych sytuacjach życiowych” (Reclik, 2007, s.174).

W podejmowanej pracy badawczej przyjęto, że dziecko, które kończy edukację przedszkolną jest kompetentne matematycznie, jeśli posiada wiadomości i umiejętności określone w Podstawie Programowej Wychowania Przedszkolnego oraz potrafi je zastosować podczas wykonywania zadań w różnych sytuacjach.

3. Rozwijanie kompetencji matematycznych dzieci w wieku przedszkolnym

Dziecko od najmłodszych lat nabywa nowe kompetencje, które dają mu możliwość funkcjonowania w życiu. Dotyczą one edukacji społeczno-moralnej, aktywności językowej, poznawczej, artystycznej, ruchowej i zdrowotnej.

Ze względu na podjętą tematykę badawczą dokładniej należy omówić rozwój kompetencji matematycznych dziecka w wieku przedszkolnym. Odnoszą się one przede wszystkim do posługiwania się liczbami i nazywane są często umiejętnościami arytmetycznymi (Oszwa, 2006). Są to kluczowe umiejętności dla edukacji przedszkolnej i wczesnoszkolnej.

Jak zauważają G. Rura i M. Klichowski „inicjacja matematyczna rozpoczyna się już we wczesnym okresie dziecięcym, kiedy półroczne niemowlę próbuje wszędobylskimi oczyma ogarnąć otaczającą go przestrzeń, która dostarcza mu wielu różnorodnych wzrokowo-dotykowych bodźców” (Rura i Klichowski, 2011, s.214). Mając dwa lata dziecko tworzy „zbiór” klocków, rozróżnia przedmiot większy i mniejszy i próbuje dokonywać klasyfikacji przedmiotów posługując się kodem percepcyjnym. Trzy- czteroletnie dziecko zaczyna praktycznie stosować metodę odpowiedniości, kiedy przyporządkowuje przedmioty do zbioru i kontroluje liczbę, choć jeszcze nie liczy. Pierwsze próby przeliczania podejmuje dziecko około 5 - 6 roku życia, który G. Rura i M. Klichowski nazywają *przedrachunkowym stadium umysłu* (Rura i Klichowski, 2011, s.215).

Również E. Gruszczyk-Kolczyńska dostrzega znaczenie okresu poprzedzającego myślenie operacyjne, zwanego inteligencją praktyczną (sensoryczno-motoryczną), w którym dziecko kieruje się rozumowaniem intuicyjnym bazującym na tym, co widzi i co praktycznie wykonuje. Autorka dowodzi, że małe dzieci jeszcze przed rozpoczęciem nauki w szkole posiadają umiejętności matematyczne i kierują się podczas liczenia następującymi intuicjami:

1. „Licząc dotykają przedmiot i wypowiadają liczebniki. Jeżeli nie mogą dotknąć liczonego obiektu, to wykonują ruch liczenia: gest ręki, wysunięcie brody, kiwnięcie głową. Stosują tutaj następującą prawidłowość – pojedynczy gest i wypowiedziane słowo – liczebnik jest przyporządkowany kolejnym liczonemu obiektom.

2. Liczą w ustalonym porządku. Obierają kierunek liczenia i bardzo dbają o to, aby nie przeskakiwać, nie liczyć podwójnie, nie pomijać żadnego z liczonych przedmiotów. Wiedzą także, że obojętnie, czy liczy się „od początku”, czy „od końca” to wynik jest taki sam. Potrafią policzyć razem różne przedmioty, nie bacząc na ich odmienne cechy jakościowe, lecz liczone przedmioty muszą się znajdować blisko siebie, na określonej przestrzeni.

3. Ostatni z wypowiadanych liczebników oznacza liczbę elementów w zbiorze.

4. Wiedzą także, że jeżeli dodamy do liczonego zbioru kilka elementów, to zmieni się liczebność i będzie więcej, jeżeli odejmiemy, to będzie mniej” (Gruszczyk-Kolczyńska, 1989, s.59).

Intuicje matematyczne przejawiane przez dzieci na poziomie wyobrażeń przedoperacyjnych E. Gruszczyk-Kolczyńska nazywa tzw. *dziecięcym liczeniem* (Gruszczyk-Kolczyńska, 1989, 1992; Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 1997).

Również R. Dominek i A. Pełka-Woszko podejmują problem faz uczenia się przez dziecko matematyki i wymieniają trzy etapy:

„I etap (dzieci 3-4-letnie) – okres zbierania doświadczeń, dokonywania odkryć, spostrzegania cech przedmiotów, ludzi, zjawisk i prób łączenia ich w grupy kierując się najpierw subiektywnymi, a później i obiektywnymi kryteriami;

II etap (dzieci 4-6-letnie) – czas rozwiązywania zadań w oparciu o intuicję, kiedy pojawiają się pierwsze przejawy przekładania pojęć intuicyjnych na matematyczne;

III etap (dzieci 6-7-letnie) – faza wyróżniająca się odpowiednim poziomem decentracji, w której dziecko samodzielnie dochodzi do zrozumienia pojęć matematycznych” (Dominek i Pełka-Woszko 2004, s.15).

Zestawienia najważniejszych etapów w rozwoju umiejętności arytmetycznych dokonał B. Butterworth (2005).

Tabela 1 Główne osiągnięcia dziecka we wczesnym rozwoju umiejętności arytmetycznych (za: Butterworth, 2005)

Wiek dziecka	Osiągnięcia arytmetyczne
0;0	Różnicowanie zbiorów o niewielkich liczebnościach
0;4	Dodawanie i odejmowanie jednego obiektu
0;11	Rozróżnianie wzrastającej i malejącej sekwencji obiektów
2;0	Początek poznawania kolejnych liczebników; umiejętność przyporządkowywania jeden do jednego w próbach dzielenia się
2;6	Świadomość, że liczebniki oznaczają więcej niż jeden obiekt
3;0	Przeliczanie niewielkich zbiorów obiektów
3;6	Dodawanie i odejmowanie jednego elementu w zabawach z przedmiotami i liczebnikami; stosowanie zasady kardynalności w celu określenia liczebności zbioru
4;0	Spontaniczne używanie palców w celu szybkiego dodawania
5;0	Dodawanie zbiorów o małych liczebnościach
5;6	Rozumienie przemienności dodawania i rozpoczynanie liczenia od większej liczby elementów
6;0	Rozumienie stałości liczby

U. Oszwa (2006) zaznacza jednak, że okresy rozwojowe, jakie podaje B. Butterworth są orientacyjne, przybliżone i nie można traktować ich jako normy rozwojowe. Również D. Wood powołując się na badania R. S. Sieglera uważa, że ustalanie średniego wieku, w którym mogą (czy powinny) pojawiać się kolejne stadia

rozwoju umiejętności matematycznych „może prowadzić do fałszywych wniosków dotyczących zmian następujących w czasie u konkretnych dzieci (Wood, 2006, s.213; także Dominek i Pełka-Woszko, 2004).

Badania wielu psychologów (np. Inhelder, Piaget 1967; Szemińska 1957; Szuman 1962; Vinacke 1951) wykazały, że u wszystkich dzieci myślenie matematyczne rozwija się w podobny sposób (za:Burtowy, 1992a). Jednakże zróżnicowany jest poziom i tempo tego rozwoju. M. Burtowy zauważa, że „czas potrzebny do rozwoju pojęć i poziom osiągniętego rozwoju zależą głównie od możliwości uczenia się, od wpływów środowiska (przede wszystkim tych zamierzonych)” (Burtowy, 1992a, s.231). Ważny natomiast jest fakt, iż umiejętności arytmetyczne pojawiają się bardzo wcześnie i rozwijają się przez długi okres czasu.

Zdaniem B. Butterwortha dziecko może nabyć umiejętność rozumowania arytmetycznego, jeśli:

1. „rozumie zasadę liczenia jeden obiekt – jeden liczebnik;
2. rozumie, że zbiór obiektów ma swoją liczebność oraz że liczebność ta może być taka sama, większa bądź mniejsza od liczebności innego zbioru;
3. rozumie, że zbiory nie muszą dotyczyć rzeczy materialnych, mogą być dźwiękowe, dotykowe, niewidzialne;
4. potrafi podać liczebność niewielkiego zbioru (do 4 elementów) bez liczenia” (za: Oszwa, 2006, s.4).

A zatem liczenie obiektów, ich dodawanie, porównywanie liczebności zbiorów, a następnie liczb odbywa się zgodnie z ustalonym porządkiem rozwojowym.

Ponadto E. Gruszczyk-Kolczyńska (1992) zauważa, że umiejętności liczenia wymagają opanowania przez dziecko reguł, które są nabywane w kolejnych okresach życia. Dzieci trzyletnie potrafią podczas przeliczania elementów korzystać z następujących zasad: stałego porządku, jeden do jednego oraz kardynalności. Później, około 5. roku życia dziecko zaczyna stosować dwie kolejne zasady: abstrakcyjności i niezależności porządkowej. „Oznacza to, że dzieci sześciolatnie, które nie rozumieją tych zasad, powinny zostać otoczone szczególną opieką psychologiczno-pedagogiczną, w przeciwnym razie mogą bowiem mieć poważne kłopoty z opanowaniem systemu liczenia” (Oszwa, 2006, s.6).

Liczne badania (Oszwa, 2006) dowodzą, że kształtowanie się umiejętności arytmetycznych zależy od wielu czynników. Analizowany jest udział procesów poznawczych, płci oraz środowiska i doświadczeń życiowych dziecka.

T. Nunes i P. Bryant (za: Oszwa, 2006) zwrócili uwagę na znaczący wpływ warunków środowiskowych, w jakich żyje dziecko na rozwój umiejętności liczenia. Autorzy podkreślają również znaczenie praktycznych sytuacji, które uczą dzieci efektywnego posługiwania się liczbami czy sprawnego dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia.

W Polsce szczegółowe badania dotyczące społeczno-ekonomicznych determinantów rozwoju umiejętności matematycznych przeprowadziła U. Oszwa (2006). Autorka wskazuje na zależności między rozwojem umiejętności matematycznych dzieci a wykształceniem rodziców i sytuacją materialną rodziny. Z kolei E. Gruszczyk-Kolczyńska (1992) mówi o istotnym wpływie na rozwój umiejętności matematycznych dzieci ich odporności emocjonalnej oraz roli własnych doświadczeń. Natomiast B. Butterworth (1999) dowodzi, jak wczesne doświadczenia z matematyką mogą generować późniejsze sukcesy lub porażki edukacyjne dziecka.

Wielu badaczy (Oszwa, 2006, Butterworth, 2005) dostrzega znaczenie procesów poznawczych w nabywaniu i rozwoju umiejętności posługiwania się liczbami (za: Oszwa, 2006). Chodzi tu o pamięć operacyjną, zdolności wzrokowo-przestrzenne oraz kompetencje językowe. U. Oszwa na podstawie przeprowadzonych badań dowodzi zależność: „im wyższe kompetencje poznawcze, tym wyższe umiejętności matematyczne i odwrotnie” (Oszwa, 2006, s.24). Ponadto autorka wskazuje, że poziom percepcji wzrokowej dziecka może wpływać na jego osiągnięcia matematyczne, zwłaszcza na etapie edukacji przedszkolnej i wczesnoszkolnej.

Czynnikiem determinującym rozwój kompetencji matematycznych może być także płeć, ale, mimo, że wśród wybitnych matematyków przeważają mężczyźni, to jednak nie należy upatrywać w płci źródła sukcesów czy porażek matematycznych (zob. np. Oszwa, 2006). Wnikliwą analizę badań nad problemem gender w matematyce przedstawia L. Kopciewicz (2011, 2013). Autorka odrzuca stereotypy o „niematematyczności dziewcząt” i zwraca uwagę na niepokojący „fenomen” umniejszeń sukcesów, w tym matematycznych, dziewcząt w ocenie nauczycieli, przez co osiągnięcia dziewcząt zawsze jawią się jako gorsze.

Uwarunkowania demograficzne umiejętności matematycznych analizuje również U. Oszwa (2006). Autorka omawia wyniki dzieci uzyskane w poszczególnych województwach oraz wpływ typu placówki i długości edukacji przedszkolnej na rozwój kompetencji matematycznych dzieci.

Omawiając determinanty umiejętności matematycznych dzieci nie można pominąć wpływu czynników ontogenetycznych, takich jak urazy okołoporodowe, hospitalizacje i choroby przewlekłe, a także wady wzroku i słuchu. Wnioski z przeprowadzonych badań porównawczych podaje U. Oszwa (2006).

4. Metody nauczania matematyki

Aktywne, efektywne i niestresujące uczenie się matematyki powinno być naturalnym doświadczeniem każdego ucznia.

Poszukiwania skutecznych praktyk edukacyjnych, szczególnie w nauczaniu – uczeniu się matematyki prowadzą ku konstruktywizmowi rozumianemu jako teoria wiedzy, teoria poznania czy jak podaje B. Gołębiak „obietująca teoria uczenia się” (Gołębiak, 2005, s.14). Konstruktywizm składa się z wielu (często zwalczających się) nurtów, które mają swoje źródła w różnych koncepcjach filozoficznych. Wspomniana B. Gołębiak (2005) wskazuje następujące teorie znaczące w konstruktywizmie:

- konstruktywizm genetyczno-epistemologiczny (Schemat J. Piageta);
- teoria konstruktów osobistych (G. Kelly i V. E. Frankl);
- konstruktywizm jako proces społecznego mediowania (J. Dewey);
- konstruktywizm społeczno-kulturowy (L.S. Wygotski);
- epistemologia feministyczna (L. Alcoff i E. Potter);
- symboliczny interakcjonizm jako wersja społecznego konstruktywizmu (H. Blumer);
- najnowsze koncepcje antropologii społecznej (J. Lave, K. Rogoff, C. Geertz).

Najmniej emocji wśród zwolenników i przeciwników konstruktywizmu wywołują założenia pedagogiczne dotyczące podejścia do pracy edukacyjnej, praktyki czy strategii uczenia się i nauczania sformułowane przez J. Deweya, J. Piageta, L.S. Wygotskiego oraz J.S. Brunera.

J. Dewey był przeciwnikiem przekazywania dzieciom gotowej wiedzy i stwarzania w praktyce szkolnej atmosfery surowej dyscypliny. Jego zdaniem zdecydowanie większą wartość mają wiadomości i umiejętności, które dziecko

zdobywa dzięki własnym poszukiwaniom i osiągnięciom, dzięki działaniu i osobistemu doświadczeniu. „W rozwoju naturalnym dziecka” – pisze J. Dewey – „zachowanie się czynne wyprzedza funkcje czysto odbiorcze (...). Lekceważenie tego zasadniczego faktu jest jedną z najważniejszych przyczyn tak wielkiej zwykle straty czasu i sił w pracy szkolnej. Zmuszamy dziecko do zachowania się biernego, odbiorczego, chłonnego” (Dewey, 2005, s.26). J. Dewey był „przekonany, iż schematy poznawcze dziecka są jego samodzielną konstrukcją wynikającą z nieustannej eksploracji: aby poznać obiekty, podmiot musi mieć z nimi aktywny kontakt, dzięki czemu może je przekształcać: musi je przedstawiać, korygować, łączyć, rozdzielać i składać od nowa” (Woźniak, 2014, s.144).

Dla J. Piageta „podstawowym motorem rozwoju jest dojrzewanie niezależne od przekazu kulturowego” (Klus-Stańska, 2000, s.59). Niemniej jednak psycholog zauważał, że dla efektywnej edukacji należy dziecku stwarzać warunki, w których będzie ono mogło zdobywać wiedzę na drodze własnych doświadczeń, gdyż „wiedza nieustannie wiąże się z działaniem lub operacjami, czyli przekształceniami” (za: Woźniak, 2014, s.144). Dotyczy to w szczególności edukacji matematycznej, dla skuteczności której konieczna jest zdaniem badacza współpraca psychologów i matematyków. „Gdyby nauczyciele matematyki” – dowodzi J. Piaget „chcieli zapoznać się z „naturalną” strukturą psychogenetyczną operacji logiczno-matematycznych, odkryliby niewątpliwie, że istnieje zbieżność o wiele większa, niż mogliby się spodziewać, między głównymi operacjami stosowanymi spontanicznie przez dziecko a pojęciami, które starają się mu wpoić w sposób abstrakcyjny” (Piaget, 1977, s.26-27).

Z kolei L. S. Wygotski akcentował społeczny charakter procesów poznania. W jego przekonaniu „główną determinantą rozwoju dziecka jest przekaz kulturowy z jego zasadniczym nośnikiem, jakim jest mowa” (Klus-Stańska, 2000, s.59). L. S. Wygotski i jego zwolennicy „w „ko –konstruowaniu” wiedzy szczególną rolę przypisują nauczycielowi, jego obecności w „strefie najbliższego rozwoju” oraz gotowości i kompetencji do całościowego przeprojektowywania sytuacji edukacyjnej („nauczyciel jako konceptualny agent zmiany”)” (Gołębniak, 2005, s.16).

Natomiast J. Bruner we współczesnym nurcie konstruktywistycznym w psychologii integruje różne podejścia do uwarunkowań rozwoju człowieka, podkreślając, że „realna wiedza o rzeczywistości jest wytworem umysłu jednostki, ale

uksztaltowanym tradycją i kulturowym sposobem używania narzędzi. Dziecko musi poznać różne narzędzia myślenia i systemy symboli, których dostarcza kultura, a które stają się jego „prywatnymi narzędziami” w wyniku „ponownego ich odkrycia” i zrozumienia ich natury”(za:Bałachowicz , 2011, s.19).

Zdaniem J. Brunera pozorną tylko sprzecznością jest podkreślanie opozycji między wspieraniem indywidualnego rozwoju jednostki a jej uspołecznieniem. W percepcji badacza „edukacja polega na „udostępnieniu” i „uprzystępnieniu” treści kulturowych do możliwości i potrzeb osób uczących się w budowaniu siebie i własnych relacji ze światem; i odwrotnie: na „usprawnieniu” użytkowników kultury i życia społecznego do potrzeb ciągle zmieniającego się świata” (Bałachowicz, 2011, s.24).Według teorii konstruktywistycznej proces nauczania przebiega w pięciu fazach, które mają ściśle określoną kolejność (Woźniak, 2014).

Pierwsza faza to orientacja i rozpoznawanie wiedzy. Polega ona na wprowadzeniu ucznia w określone zagadnienie i wywołanie jego zainteresowania i ciekawości, co w konsekwencji powinno wzbudzić jego wewnętrzną motywację do uczenia się. W drugiej fazie modelu nauczania konstruktywistycznego dochodzi do rozpoznania tego, co uczeń już wie i potrafi, czego wcześniej doświadczył w związku z przedmiotem poznania. Trzecim etapem jest restrukturyzacja, czyli rekonstrukcja wiedzy, w której nowe wiadomości są włączane do wiedzy już posiadanej i w ten sposób tworzą się kolejne struktury wiedzy. Kolejny, czwarty etap to umiejętność zastosowania nowej wiedzy, nowych informacji, umiejętności i stosowanie ich w różnych sytuacjach i kontekstach. Na tym etapie najważniejsze jest, aby sam uczeń stosował nowo nabytą wiedzę w rozwiązywaniu różnorodnych zadań. Ostatnim etapem jest samodzielne zauważenie przez ucznia zmian w jego dotychczasowej wiedzy i porównanie jej z wiedzą uprzednią. Zachodzi tu sprzężenie zwrotne między wiedzą wyjściową a nową.

Analizując dydaktyczne implikacje konstruktywizmu należy również podjąć problematykę zmieniającej się roli nauczyciela. Ulokowanie w centrum edukacji czynności uczenia się, a nie nauczania powoduje, że nauczyciel z osoby, która przekazuje niepodważalną i jedynie słuszną wiedzę staje się organizatorem warunków edukacyjnych, dających uczniom możliwości podejmowania działań poznawczych. Nauczyciel – wyjaśnia J. Piaget – ma być „niezbędnym animatorem, którego zadaniem będzie stwarzanie odpowiednich sytuacji i opracowywanie wytycznych umożliwiających stawianie problemów użytecznych dla dziecka oraz wysuwanie

przeciwstawnych przykładów zmuszających do refleksji i do kontroli rozwiązań niedostatecznie przemyślanych” (Piaget, 1977, s.25).

Konstruktywistyczny nauczyciel to przede wszystkim organizator i opiekun, który inspiruje uczniów do działania, akceptuje ich autonomię, respektuje prawo do własnej inicjatywy oraz do popełnienia błędu.

B. Gołębnik sygnalizując „swoistą modę na konstruktywizm” zastanawia się, na ile owo zainteresowanie nauczycieli konstruktywizmem jest powierzchowne, „a na ile wyraża poziom świadomego radzenia sobie z napięciami wpisanymi w jego aplikację” (Gołębnik, 2005, s.17). Autorka zauważa, że dość często w praktyce szkolnej nauczyciele stosują „bardziej bezpieczne symulacje niż aplikacje konstruktywistycznych teorii uczenia się. To, że dzieci pracują w parach czy małych grupach nad wyznaczonymi im zadaniami, nie przesądza jeszcze o tym, że występują w roli badacza, że samodzielnie dochodzą do wiedzy, że nadają i negocjują znaczenia” (Gołębnik, 2005, s.17). W konkluzji B. Gołębnik (2005) stwierdza stanowczo, że konieczne jest przetransportowanie tego, „co wiem o konstruktywizmie” na myślenie i działanie w kategoriach konstruktywistycznych.

Jako najważniejsze zalety konstruktywistycznego modelu uczenia się należy uznać przede wszystkim aktywizowanie myślenia uczniów, zachęcanie ich do twórczych i samodzielnych zachowań, ułatwianie poznawania świata i działania w nim dzięki nabytym umiejętnościom poznawczym i praktycznym. W uczeniu się ważniejszy od ostatecznego efektu w postaci zasobu wiedzy i wymiernych osiągnięć dziecka staje się sam proces uczenia się, czyli – refleksja, interpretacja, dochodzenie do prawdy, rozwiązywanie problemów z jednoczesnym zaangażowaniem osobistym.

Organizowanie edukacji w oparciu o założenia konstruktywizmu daje nadzieję na kształtowanie człowieka wielowymiarowego, twórczego i samodzielnego w myśleniu. Stwarza warunki do rozwijania nawyku samokształcenia i samorozwoju, na wyposażenie uczniów w procedury umysłowe, które pozwalają na racjonalną interpretację otaczającej rzeczywistości.

Niestety od lat zauważa się niezadowolające wyniki nauczania matematyki. D. Wood (2006) stwierdza kategorycznie, że frustrację dotyczącą poziomu nauczania i uczenia się matematyki obserwuje się na całym świecie. Autor przytacza wypowiedź holenderskiego naukowca M.A. D.Woltersa: „w dzisiejszych czasach nie ma już takich nauczycieli, którzy powiedzieliby, że wszystko jest w porządku w nauczaniu

arytmetyki. Zdecydowanie za dużo jest dzieci, które nie lubią arytmetyki, a nawet gorzej, dzieci, które myślą, że jest to „głupi” przedmiot. Poza nielicznymi wyjątkami sytuacja ta jest nader rozpowszechniona i trzeba nam ją uznać za oczywistą” (za: Wood, 2006 s.209). Uczenie matematyki za bardzo skupia się bowiem na procedurach, a pomija rozumienie pojęciowe. D. Wood konkluduje jednak, że pozostaje „mieć nadzieję na wynalezienie skuteczniejszych metod nauczania” (Wood, 2006, s.209, również Swoboda, 2007).

Na ten poważny problem edukacji matematycznej zwracał uwagę już J. Piaget pisząc, iż „jest zjawiskiem typowym fakt, że w klasach o normalnym poziomie uzdolnień tylko część uczniów rozumie matematykę, przy czym ta część niekoniecznie obejmuje osoby najbardziej uzdolnione w innych dziedzinach. Niekiedy nawet traktuje się rozumienie matematyki jako oznakę specjalnego uzdolnienia, owej «żyłki» do matematyki, której obecność lub brak są uważane za wykładnię powodzeń lub porażek, bez zastanowienia się, czy te ostatnie nie były może skutkiem metody nauczania” (Piaget, 1979, s.150).

W Polsce badania dotyczące niskiej skuteczności nauczania matematyki prowadziły trzy ośrodki: Instytut Pedagogiki w Warszawie (Z. Cydzik, Z.Semadeni), Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Krakowie (Z. Krygowska, H. Moroz) oraz Uniwersytet im. Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie (M. Cackowska) (za:Burtowy, 1992b).

Niepokojące są także raporty CKE dotyczące poziomu kompetencji matematycznych na przeprowadzonych egzaminach gimnazjalnych i maturalnych (w 2015 roku uczniowie kończący gimnazjum średnio uzyskali zaledwie 48% możliwych punktów za arkusz z matematyki, a 76,0% maturzystów zdało egzamin z matematyki)¹. H. Siwek dodaje, że wciąż aktualna jest opinia S. Lema, który pisze: „stosunek do matematyki dzieli ludzi na tych, którzy się w niej lubują i na takich, którzy jej nie cierpią, ponieważ nie potrafią zagustować w wędrówkach po jej przestworzu” (za: Siwek, 1998, s.13).

M. Burtowy uważa, że przyczynami niepowodzeń w nauczaniu matematyki w szkole mogą być zaniedbania już na początkowych etapach kształtowania pojęć matematycznych w przedszkolu. Autorka mówi o niewłaściwym nauczaniu opartym na „dydaktyce pamięci” polegającej na „przyswajaniu przez uczniów gotowych schematów operacyjnych i stosowaniu ich w sposób mechaniczny. Takie postępowanie

¹ Na podstawie komunikatu CKE z dnia 19 czerwca 2015 r.

w procesie nauczania - uczenia się w niewystarczającym stopniu wyzwalało aktywność uczniów, nie umożliwiło im w pełni samodzielnej i twórczej pracy umysłowej, przyczyniało się do nasilenia trudności w dalszej nauce tego przedmiotu” (Burtowy, 1992b, s.226).

K. Kotlarski (1990) stwierdza stanowczo, że przyczyną niepowodzeń uczniów w nauce matematyki są nieaktywne metody nauczania. „Metody te nie odwołują się do doświadczeń dziecka i narzucają styl rozumowania, który nie pobudza ciekawości i zainteresowania. W klasach początkowych, na etapie operacji konkretnych przyczyną największych trudności jest wykonywanie w sposób mechaniczny zapamiętanych schematów zamiast ich rozumienia”(Kotlarski, 1990, s.28). D. Klus-Stańska i M. Nowicka dodają, że „metodyka nauczania tego przedmiotu jest „metodyką wyjaśnień”, a nie „metodyką badania”. Dlatego uczeń niestety osiąga „poziom kalkulatora”, a nie „poziom badacza” (za: Seidel i Sobieszczyk, 2007, s.286).

Metody kształtowania pojęć i umiejętności matematycznych zmieniały się w zależności od poglądów filozoficznych. Jednakże w opinii D. Klus-Stańskiej i M. Nowickiej „przez wiele stuleci pojęcie *skutecznego nauczania matematyki* nie zostało zdefiniowane i nie rozstrzygnięto też, czy kompetencje nauczyciela w zakresie matematyki są ważniejsze od kompetencji wychowawczych czy też odwrotnie (za: Seidel i Sobieszczyk, 2007, s.286).

W nauczaniu matematyki na świecie występują dwa podejścia: nauczanie przez zrozumienie, zwane edukacją konceptualną oraz nauczanie oparte na treningu i nieustannych ćwiczeniach, nazywane edukacją proceduralną (Oszwa, 2006). U. Oszwa dokonuje analizy obu podejść, wskazując ich zalety i mankamenty. Autorka konkluduje, że: „złotym środkiem jest taka realizacja edukacji matematycznej, aby dziecko, przy wysokim poziomie rozumienia stawianych przed nim zadań, nabyło dużą biegłość w dokonywaniu obliczeń i stosowaniu adekwatnych procedur liczenia” (Oszwa, 2006, s.6).

Najstarszym sposobem kształtowania u dzieci pojęcia liczby naturalnej jest *metoda obrazów liczbowych*, znana również jako metoda równoczesnego podawania lub przestrzenna. Rozpowszechnili ją W. A. Lay i A. M. Rusiecki. W. A. Lay – twórca szkoły aktywnej- uważał, że „źródłem wytwarzania pojęć nie są izolowane wrażenia, lecz reakcja łączna: podmiot otrzymuje bodźce wrazeniowe od środowiska i równocześnie odpowiednio na nie reaguje, na skutek, czego następuje wzajemne

przystosowanie podmiotu i środowiska” (za: Moroz, 1982, s.38). Autor był zwolennikiem aktywnej postawy dziecka, która ma się wyrażać w manipulowaniu, oglądaniu, rysowaniu i wyprowadzaniu z nich działań matematycznych (Moroz, 1982). W ujęciu metody obrazów liczbowych pojęcie liczby powstaje w wyniku bezpośredniej obserwacji przedmiotów. W umyśle dziecka tworzy się obraz liczby w trakcie przestrzennego przedstawiania zbiorów przedmiotów. Później – w wyniku rozwijającego się procesu abstrahowania – dziecko opanowuje ogólne pojęcie liczby naturalnej. Twórcy tej teorii uważali, że dziecko w trakcie biernego obserwowania figur liczbowych, przedstawionych w stałej konfiguracji, dostrzeże ich kopię i wyabstrahuje z nich pojęcie danej liczby naturalnej.

Kolejną metodą stosowaną w edukacji matematycznej była *metoda liczenia*, oparta na założeniach J. Deweya, który uważał, że „liczba nie jest faktem zmysłowym, lecz wynikiem procesu rozumowania. Pojęcie liczby nie wytwarza się w umyśle dziecka przez obecność przedmiotów, lecz jest wytworem umysłu, który tak operuje przedmiotami, że z mglistej i nieokreślonej całości wytwarza całość ściśle określoną” (za: Moroz, 1982, s.39). W jego ujęciu na proces liczenia składają się dwie czynności:

- abstrakcji, czyli wyszczególnianie przedmiotów jako odrębnych elementów w danym zbiorze;
 - uogólniania, czyli łączenie w całość przedmiotów jednostkowych (za: Moroz, 1982).
- J. Dewey uważał, że pojęcie liczby nigdy nie powstałoby w umyśle dziecka bez praktycznego i celowego działania. Stąd w procesie kształtowania liczby punktem wyjścia powinno być mierzenie. Z niego wywodzi się pojęcie liczby oraz działania matematycznego.

Autor wyróżnia trzy stopnie mierzenia:

- „mierzenie jednostką nieokreśloną – w trakcie, którego kształtują się stosunki ilościowe (mniej, więcej, po równo), początki dodawania i odejmowania;
- mierzenie jednostką określoną - mierzenie wielkości ciągłych za pomocą jednostki miary długości, które umożliwia dzieciom opanowanie czterech działań arytmetycznych;
- mierzenie jednostką o określonym stosunku do wielkości innego rodzaju – (pieniądze w stosunku do wartości różnych towarów), które stanowi podstawę wprowadzania proporcji i równania” (za: Moroz, 1982, s.41).

Teorie J. Deweya nie znalazły jednak zastosowania w praktyce, zarówno przedszkolnej, jak i szkolnej. Nie można, bowiem ograniczać działalności umysłowej wyłącznie do sytuacji z życia codziennego. Takie podejście rozwija oczywiście myślenie konkretno-praktyczne, ale hamuje rozwój myślenia abstrakcyjno-teoretycznego.

Analizując metody kształtowania pojęć matematycznych należy omówić również *metodę nauczania całościowego J. Wittmana*. Twórca metody wyróżnia liczbę główną (kardynalną), która oznacza moc danego zbioru. Liczba ta jest pojęciem abstrakcyjnym. J. Wittman zauważa, że kształtowanie pojęć liczbowych powinno być poprzedzone znajomością określeń: dużo, mało, mniej, więcej, tyle samo. Należy je kształtować od wielkości prawdziwych przedmiotów, którą jest grupa bawiących się dzieci. Dzieci w trakcie zabawy uczą się orientacji w przestrzeni (przed, za, obok, nad, naprzeciw), wyodrębniania cech wielkościowych (długi, krótki, niższy, równy) oraz określania stosunków ilościowych (mniej, więcej po równo). Dopiero po tych zabawach można przejść do zajęć na zbiorach różnych przedmiotów (Moroz, 1982, s.42-43).

Jednakże, jak dowodzą prowadzone przez H. Moroza badania eksperymentalne w zakresie modernizacji nauczania początkowego matematyki najbardziej skuteczne jest *czynnościowe nauczanie* tego przedmiotu. Twórcą metody czynnościowej jest Z. Krygowska, która po raz pierwszy zwróciła uwagę na znaczenie i konieczność powiązania wiedzy psychologicznej dotyczącej podstaw rozwoju intelektualnego dziecka ze ścisłością i precyzją abstrakcyjnych pojęć matematycznych (Siwek, 1998). J. Piaget wyjaśniał „uczymy się matematyki tak, jakby chodziło o prawdy dostępne wyłącznie za pomocą abstrakcyjnego, a nawet specjalnego języka, jakim jest język symboli operacyjnych. Tymczasem matematyka obejmuje przede wszystkim działania wykonywane na przedmiotach, operacje zaś są zawsze działaniami ściśle między sobą powiązanymi, tyle że wyobrażanymi, nie zaś wykonywanymi w sensie fizycznym” (Piaget, 1977, s.87).

Z. Krygowska tak charakteryzuje opracowaną przez siebie koncepcję metodyczną: „czynnościowe nauczanie matematyki jest postępowaniem dydaktycznym uwzględniającym stale i konsekwentnie operatywny charakter matematyki równoległe z psychologicznym procesem interioryzacji prowadzącym od czynności konkretnych i wyobrażeniowych do operacji abstrakcyjnych” (Krygowska, 1979, s.118). Istotne jest, by uczeń mógł podejmować aktywność działania, przechodząc od konkretnego

do matematycznej abstrakcji, gdyż „zarówno nowe doświadczenia, jak i podejmowanie trudu radzenia sobie z sytuacjami problemowymi w sposób istotny generuje jakościowy przyrost kompetencji” (Rura i Klichowski, 2011, s.216). K. Zajdel wyjaśnia, że głównym celem tej metody jest, aby uczeń zdobywał wiedzę na drodze rozwiązywania zadań powiązanych z rzeczywistością. „Nie chodzi tu jednak tylko o kształtowanie pojęć matematycznych, ale o odpowiedzi na pytanie, jak to można osiągnąć? Przy okazji kształci się także osobowość: intelekt, emocjonalność i zmysł praktyczny. Tak więc uczeń odkrywa prawdy matematyczne sam, a nie odbiera je tylko odgórnie, automatycznie” (Zajdel, 2005, s.6).

W miarę upływu lat koncepcja nauczania czynnościowego zyskiwała coraz pewniejsze podstawy i coraz większą popularność wśród dydaktyków i nauczycieli matematyki. Zwraca się przy tym uwagę na szczególne znaczenie nauczania czynnościowego w początkowej edukacji matematycznej, gdyż pozwala ono na zadawanie pytań przez dzieci, na badanie przedstawionych sytuacji, na tworzenie rozmaitych rozwiązań i dochodzenie do celu różnymi drogami (Dudel i Szada-Borzyszkowska, 2013).

Kontynuatorką omawianej koncepcji jest H. Siwek, która wskazuje, że metoda czynnościowa „eksponuje konieczność zintegrowania w nauczaniu ujęcia pojęciowego i algorytmicznego, odchodząc w ten sposób od wskazań nauczania mechanistycznego, kładącego nacisk na wyuczenie reguł i algorytmów, na ćwiczenie umiejętności rozwiązywania zadań, nawet bez ich dokładnego rozumienia. (...) Koncepcja ta dystansuje się również od zasad nauczania empirystycznego, które stawia sobie za główny cel nauczanie rozwiązywania praktycznych zadań, radzenia sobie „po swojemu” w różnych sytuacjach, byle tylko osiągnąć pozytywny skutek”(Siwek, 1998, s.10).

Zgodnie z metodą czynnościową dziecko rozwiązując zadania zdobywa wiedzę operatywną, gdyż „samodzielnie realizuje drogę od konkretnej działalności, obserwacji i analizowania jej skutków do symbolicznej reprezentacji”(Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2009a, s.31).

E Swoboda dodaje, że w takim ujęciu „nie rozdziela się całego procesu uczenia się matematyki na okres przygotowawczy, nauczanie wczesnoszkolne, i dalsze etapy - w tym sensie, że przyjmuje się jedność specyfiki uczenia się matematyki (...). Jednak na każdym z tych etapów istotne są takie elementy, jak: matematyzowanie,

komunikowanie, odkrywanie, rozumowanie. Rzecz w tym, by na każdym etapie rozwoju te aktywności odbywały się w sposób zgodny z poziomem rozwoju myślenia (Swoboda, 2007, s.71).

H. Siwek przekłada zasady czynnościowej metody nauczania na język praktyki pracy nauczycielskiej. Autorka wyraźnie podkreśla, że podczas lekcji stroną aktywną powinien być przede wszystkim uczeń, gdyż warunkiem szczególnie ważnym w nauczaniu matematyki jest postulowane przez J. Piageta „stosowanie metod aktywnych, pozwalających na spontaniczne poszukiwania i wymagających, aby każda prawda, którą trzeba odkryć, była na nowo odkrywana przez uczniów lub przynajmniej odtworzona, a nie tylko mu przekazana” (za: Siwek, 1998, s.13; także Swoboda, 2007). G. Treliński dodaje, iż nauczanie - uczenie się matematyki „powinno być ukierunkowane na wyzwalanie, wspomaganie i organizowanie takich rodzajów aktywności matematycznej ucznia, w toku których będzie następowało kształtowanie pojęć typu matematycznego, rozumienie i przyswajanie ich własności, kształcenie rozumowań, wreszcie opanowywanie umiejętności umożliwiających mu radzenie sobie w trudnych sytuacjach zadaniowych”(Treliński, 2005, s.50).

Podobne stanowisko zajmuje Z. Kierstein (2006), który uważa, iż w dobie przemian zachodzących w oświacie stosowanie metod aktywnych w szkolnej praktyce lekcyjnej jest wręcz koniecznością. Autor dowodzi, że są to metody, „które pozwalają uczniowi rozwijać intuicję, nowe pomysły, wyrabiać umiejętność komunikowania się i sztukę dyskusowania” (Kierstein, 2006, s.3). Z. Kierstein (2006) omawia także propozycje metod aktywnych stosowanych na lekcjach matematyki, do których zalicza: metodę 66 (6-osobowe zespoły, 6 minut na rozwiązanie problemu), metodę 635 (6 grup, 3 pomysły, 5 tzw. rund), metodę JIGSAW (układanka zwana także metodą stolików zadaniowych lub metodą eksperta), metodę metaplanu, metodę śnieżnej kuli oraz metodę PORTFOLIO.

Sytuacja edukacyjna, w której przeważa uczenie się nad nauczaniem zmienia rolę nauczyciela. Ma on spełniać rolę doradcy, inspiratora, eksperta nauczania, od którego wymaga się:

- umiejętności określania operacji umysłowych, które dziecko przeprowadza podczas kształtowania pojęć matematycznych, dobierania odpowiednich czynności praktycznych, które wymagają od dziecka podjęcia wymienionych wyżej czynności umysłowych;

- zapewnienia dziecku niezbędnych środków dydaktycznych, które umożliwią mu wykonanie zaplanowanych czynności;
- opracowania zestawu ćwiczeń, zabaw i gier dydaktycznych, w trakcie, których zostaną zastosowane zaplanowane przez niego środki dydaktyczne (za: Moroz, 1982).

Zasady działania nauczyciela konstruktysty, stosującego w edukacji matematycznej strategię nauczania przez odkrywanie szczegółowo omawia A. Tyl (2006a). Dotyczą one korzystania z wcześniejszych doświadczeń i wiadomości dziecka, szanowania i rozwijania jego autonomii, tworzenia warunków do samodzielnego myślenia, zadawania pytań i szukania odpowiedzi, rozbudzania dziecięcych zainteresowań oraz pielęgnowania ich naturalnej ciekawości.

Nauczanie matematyki prowadzone zgodnie ze wskazanymi zasadami pozwala dziecku samodzielnie odkrywać matematyczne tajemnice i poprzez to stwarza szansę, że „lepiej przyswoi sobie odkrytą prawidłowość, nie „zrazi się matematyką”, będzie umiało w praktyce posługiwać się wiedzą z tej dziedziny oraz że będzie wdrażane do rozwiązywania problemów (różnego typu), do krytycznego i twórczego myślenia, ale także będzie lepiej komunikowało się z kolegami” (Tyl, 2006a, s.146).

Istotną rolę nauczania czynnościowego w edukacji matematycznej, dostrzega również E. Gruszczyk-Kolczyńska, zdaniem której „nie ma innej drogi rozwoju myślenia (szczególnie tego operacyjnego), jak samodzielne badanie zmian zachodzących w otaczającym świecie. Nie można zastąpić badawczego poznania świata opisem, „jaki ten świat jest” i tłumaczeniem zjawisk, których sens dziecko powinno samo doświadczyć i przemyśleć. W trakcie uczenia się poprzez odkrywanie powstaje, bowiem wiedza „gorąca” i operacyjna, wiedza, która skłania do dalszych poszukiwań. Natomiast to, co dziecko otrzymuje od dorosłego w gotowej „kapsułce informacji” jest dla niego mało przekonujące, a często po prostu nudne” (Gruszczyk-Kolczyńska, 1989, s.111-112).

H. Siwek (1998) zauważa, że szczególnie efektywne jest powiązanie nauczania czynnościowego z *nauczaniem realistycznym* opracowanym przez H. Freundenthala. Zgodnie z tą metodą uczniowie powinni budować pojęcia i operacje matematyczne na drodze naturalnej, w rzeczywistych sytuacjach bliskich ich doświadczeniom oraz przechodzić od pojęć prostych do bardziej skomplikowanych (matematyzacja pionowa). Wykonywanie zadań powinno uwzględniać możliwość rozmaitych rozwiązań, analiz i dyskusji.

Koncepcji czynnościowo-realistycznego nauczania matematyki E. Gruszczyk-Kolczyńska i E. Zielińska przeciwstawiają bardzo popularny obecnie *papierowy* sposób prowadzenia edukacji matematycznej, który realizowany jest w zeszytach ćwiczeń wypełnionych bogato ilustrowanymi zadaniami, kolorowymi grafami, wyraźnie zapisanymi ćwiczeniami. Zdaniem autorek taki sposób prowadzenia edukacji matematycznej jest bardzo wygodny dla nauczyciela, łatwy pod względem organizacyjnym, pozwala wreszcie na wykonanie w krótkim czasie wielu zadań. Jednakże ilość nie przekłada się na jakość. *Papierowy* sposób prowadzenia edukacji matematycznej jest bowiem groźny dla wielu uczniów (Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2009a; Gruszczyk-Kolczyńska, 2012a). Nie pozwala gromadzić potrzebnych doświadczeń przestrzennych, z których umysł dziecięcy rozwine umiejętności i wiadomości. Należy wyraźnie zaznaczyć, że rozwiązywanie zadań z zeszytów ćwiczeń nie oznacza czynnościowego uczenia się matematyki. E. Gruszczyk-Kolczyńska wyjaśnia, że „narysowanych w zeszytach obiektów nie można traktować jak konkrety, bo dzieci nie mogą ich przesunąć, zabrać, dołożyć itp. Ponadto czynności prowadzące do rozwiązania kolejnych zadań są w zeszytach ćwiczeń podobne do tych, które stosuje się w rozwiązywaniu rebusów i zagadek!!! Sporo dzieci uważa więc, że trzeba odgadnąć wynik”(Gruszczyk-Kolczyńska, 2012a, s.143). G. Rura i M. Klichowski piszą o „paradoksie kart pracy”, które oddalają matematykę od rzeczywistości (Rura i Klichowski, 2011). Wynika stąd niepokojący fakt, że „*papierowe* nauczanie matematyki wypycha coraz więcej małych uczniów na ścieżkę niepowodzeń szkolnych, zwłaszcza w zakresie nauki matematyki. Dotyczy to także tych dzieci, które rozpoczęły naukę szkolną z wystarczającą dojrzałością szkolną, w tym także w zakresie operacyjnego rozumowania”(Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2009a, s.36). Podobne wnioski formułuje również G. Treliński, który uważa, że uczniowie pracujący wyłącznie z kartami pracy „w znacznej mierze są bierni lub przejawiają w sytuacjach zadaniowych, zachowania typowe dla bezradności matematycznej”(Treliński, 2005, s.57).

Do jeszcze bardziej zatrważających wniosków dochodzi A. Kalinowska, pisząc, że „polska szkoła pozostaje na ogół bastionem rozwijania myślenia matematycznego ucznia, opierającego się na zasadzie magazynowania określonych, zaprezentowanych przez nauczyciela lub podręcznik algorytmów, a następnie – przez wyćwiczenie sposobów posługiwania się nimi – doprowadzania do pomyślnego rozpoznania

problemu. Oznacza to, że myślenie matematyczne ucznia ma polegać wyłącznie na kroczeniu śladami wyznaczonymi przez prowadzącego. O żadnej samodzielności intelektualnej, oczywiście, w tym wypadku trudno mówić (Kalinowska, 2005, s.14).

Jak wskazano w pierwszej części rozdziału poszukiwania skuteczniejszych metod uczenia matematyki to problem szkolnictwa na całym świecie. Ciekawych porównań metod nauczania matematyki stosowanych w krajach Zachodu oraz w szkołach azjatyckich i rosyjskich dokonuje D. Wood (2006). Autor zauważa, że w szkołach japońskich zdecydowanie bardziej powszechne jest pogładowe nauczanie z wykorzystaniem wielu pomocy naukowych w celu modelowania sytuacji matematycznych. Uczniowie „są nie tylko ukierunkowywani na częste używanie materiałów, które mają im pomóc w symulowaniu i rozwiązywaniu problemów, lecz również są zachęceni do przyglądania się problemom z różnych perspektyw i rozważania oraz ocenienia alternatywnych strategii rozwiązania (Wood, 2006, s.248). Z kolei w podręcznikach rosyjskich preferuje się łączenie różnych rodzajów zadań, co pomaga w zapobieganiu mechanicznemu i automatycznemu stosowaniu zapamiętanych zasad.

We wszelkich poszukiwaniach innowacyjnych, nowatorskich metod uczenia matematyki należy jednak pamiętać przede wszystkim o, tym, że – jak zauważa Z. Semadeni – „kluczową kwestią jest zgodność procesu kształcenia z naturalnym rozwojem umysłowym i emocjonalnym dzieci” (Semadeni, Gruszczyk-Kolczyńska, Treliński, Bugajska-Jaszczołt i Czajkowska, 2015, s.10)

5. Trudności dzieci w uczeniu się matematyki

Matematyka jest przedmiotem, który sprawia uczniom najwięcej problemów, nieraz przez całe życie szkolne. K. Kotlarski wyjaśnia, że „w matematyce posługujemy się symbolami symboli, zatem język matematyki jest abstrakcją wyższego rzędu, aniżeli język innych nauk” (Kotlarski, 1990, s. 24).

Poza tym sama matematyka nie jest weryfikowalna empirycznie, ponieważ nie świat empiryczny jest źródłem twierdzeń w matematyce, tylko abstrakcyjne konstrukty myślowe i twierdzenia” (Kotlarski, 1990, s.25; podobnie Kalinowska 2006). Ponadto J. Kłysewicz zauważa, że brak umiejętności matematycznych nie pozwala wielu uczniom sprostać rosnącym wymaganiom życiowym. Tacy uczniowie - jak wskazuje autorka „mylą numery autobusów, błędnie wykręcają numery telefonów, przeżywają

nieporozumienia towarzyskie, myląc daty i godziny umówionych spotkań, mają kłopoty z odczytywaniem mapy w podróży. Te ciągle niepowodzenia w pokonywaniu trudności w życiu codziennym, pociągają za sobą konsekwencje. Prowadzą do unikania samodzielnego rozwiązywania zadań o charakterze logicznym, przez co zubożają doświadczenia, zmieniają samoocenę i poczucie własnej wartości człowieka” (Kłysewicz, 2008, s.15-16).

Obecnie na całym świecie realizowane są badania dotyczące diagnozowania umiejętności i zdolności matematycznych dzieci. Są one, jak podaje U. Oszwa (2008a), skoncentrowane wokół trzech nurtów tematycznych. Pierwszy to analiza agnozji cyfr i akalkulii z punktu widzenia neuropsychologii klinicznej. W drugim nurcie problemy w matematyce spostrzegane są jako dodatkowe skutki dysleksji lub zaburzenia analogiczne do specyficznych trudności w czytaniu. Natomiast neuropsychologia rozwojowa próbuje wyjaśniać trudności arytmetyczne odwołując się do ich mózgowych mechanizmów.

Zagadnienia trudności w uczeniu się matematyki na gruncie polskim analizują przede wszystkim E. Gruszczyk-Kolczyńska (1989,1992, 2009b), U. Oszwa (2008b) J. Kłysewicz (2008) i B. Zarucka (2008). Z zagranicznych badań należy wymienić prace L. Kośca (1974, 1982), C. Lewisa, G. J. Hitcha i P. Walkera (1994), S. Ostada (1998), L. D. Hanicha i współpracowników (2001) czy L. S. Fuchsa i D. Fuchsa (2002) oraz B. Butterwortha (1999, 2005) (za: Oszwa, 2008b).

Procesowi uczenia, polegającemu na nabywaniu nowych umiejętności zawsze towarzyszy pokonywanie trudności. Cechą charakterystyczną dla uczenia się matematyki jest rozwiązywanie zadań, które powinny być dostosowane do możliwości rozwojowych dziecka. Gdy potrafi ono w miarę samodzielnie rozwiązać dane zadania to – według E. Gruszczyk-Kolczyńskiej i E. Zielińskiej przeżywa *trudności zwyczajne*. Nie należy ich usuwać, gdyż pokonywanie trudności wpisane jest w szkolny proces uczenia się matematyki (zob. Gruszczyk-Kolczyńska, 1992; Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2009a; Kawczyńska, 2004; Zarucka, 2008). Dostrzeżenie trudności związanych z rozwiązaniem zadania powoduje wzrost napięcia i emocji ujemnych, takich jak niepokój czy poczucie zagrożenia. Jest to jednak zjawisko korzystne, ponieważ implikuje maksymalny wysiłek intelektualny i mobilizację. Dlatego takie trudności nie powinny niepokoić dorosłych. Należy jednak zadbać o to, aby stopień trudności zadania był dostosowany do możliwości dziecka, tak, by umiało ono

skutecznie radzić sobie z normalnymi trudnościami i pokonywać je samodzielnie lub z niewielką pomocą dorosłego. Natomiast gdy zadania są zbyt trudne, wyraźnie przekraczające możliwości sprawcze dziecka, dochodzi do nasilenia frustracji i dziecko przerywa działanie. E. Gruszczyk-Kolczyńska dodaje, że „towarzyszy temu utrata wiary we własne możliwości poznawcze i wykonawcze. Obawa przed nieuchronnym niepowodzeniem zmusza dziecko do wycofywania się z zadań wymagających wysiłku intelektualnego. Pogłębia się nerwowość oraz zmniejsza i tak już niska odporność emocjonalna (Gruszczyk-Kolczyńska, 1992, s.8). Trzeba zatem wnikliwie kontrolować, aby wzrost napięcia związanego z doświadczanymi trudnościami nie przekraczał progu odporności emocjonalnej dziecka; aby był stymulujący, a nie paraliżujący.

Oprócz trudności zwyczajnych wymienia się także *trudności nadmierne*. Ich źródłem są często rodzice, którzy mają wygórowane oczekiwania i ambicje wobec dzieci oraz nauczyciele, błędnie diagnozujący możliwości uczniów i dający im zadania zbyt trudne.

Trzeci rodzaj trudności to *trudności specyficzne* (Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2009a). Powstają one z powodu mniejszej dojrzałości dziecka do uczenia się matematyki wynikającej z wolniejszego lub nieharmonijnego rozwoju. M. Darowna upatruje w tym „praprzyczynę wczesnych niepowodzeń w tej dziedzinie i zarazem początek powstawania mechanizmu, który uniemożliwia skuteczne przekroczenie tej bariery” (Darowna, 2005, s.7). Trudności te bowiem „szybko pogłębiają się i rozszerzają do tego stopnia, że następuje blokada w nabywaniu wiadomości i umiejętności matematycznych”(Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2009a, s.24). I mimo, że – jak dowodzi E. Gruszczyk-Kolczyńska (1992) małe dziecko posiada nieograniczone uzdolnienia i łatwość uczenia się matematyki, to jednak coraz więcej uczniów o prawidłowym rozwoju intelektualnym doświadcza niepowodzeń w nauce matematyki (także Wadsworth, 1996; Aebli, 1959; Krygowska, 1979; Szemińska, 1981 i in.). M. Darowna przestrzega, że „w efekcie powstają blokady w uczeniu się matematyki, zanika motywacja wewnętrzna, a pojawia się niechęć do wszystkiego, co wiąże się z tym przedmiotem, zwana efektem wyuczonej bezradności poznawczej” (Darowna, 2005, s.7).

Taki stan implikuje konieczność podjęcia badań i analiz dotyczących specyficznych trudności w uczeniu się matematyki określanych jako dyskalkulia (zaburzenia zdolności matematycznych). Jednocześnie należy zauważyć, iż obecnie

coraz częściej zamiast określenia specyficzne trudności w uczeniu się matematyki (z literatury psychopedagogicznej) stosuje się termin dyskalkulia, zaczerpnięty z piśmiennictwa neuropsychologicznego, stanowiący pewien skrót myślowy, słowo-kłucz (Oszwa, 2007, 2008b).

Pierwszą definicję i klasyfikację dyskalkulii rozwojowej przedstawił L. Kość (1982). Badacz dowodził, że „dyskalkulia rozwojowa jest strukturalnym zaburzeniem zdolności matematycznych, mających swe podłoże w zaburzeniach genetycznych i wrodzonych tych części mózgu, które są bezpośrednim podłożem anatomiczno-fizjologicznym dojrzewania zdolności matematycznych odpowiednio do wieku, bez jednoczesnego zaburzenia ogólnych funkcji umysłowych” (Kość, 1982, s.23).

U. Oszwa (2008b) dokonuje analizy wielu stosowanych zamiennie terminów (np. *mathematical disorder*, *mathematical disabilities*, *mathematics disabilities* czy *numerical disabilities*) oraz omawia kryteria rozpoznawania specyficznych zaburzeń umiejętności arytmetycznych. W podsumowaniu autorka przyjmuje, iż „dyskalkulia rozwojowa obejmuje specyficzne zaburzenia zdolności arytmetycznych, rozpoznawane na podstawie analizy deficytów poznawczych ujawnianych przez dziecko w kontekście prawidłowego rozwoju intelektualnego i sprzyjających warunków edukacyjnych” (Oszwa, 2008b, s.27).

Przeglądu literatury poruszającej zagadnienie przyczyn powstawania nadmiernych trudności w matematyce dokonuje B. Zarucka (2008). Autorka wskazuje, iż specyficzne zaburzenia umiejętności matematycznych wynikają z nieprawidłowości procesów poznawczych, z niepełnosprawności intelektualnej, obniżonego poziomu inteligencji, wad wzroku lub słuchu, chorób przewlekłych, ale także mogą wpływać z zaniedbań środowiskowych i pedagogicznych.

M. Kurant z kolei dokonuje podziału przyczyn zaburzeń arytmetycznych na: „wewnętrzne – leżące po stronie dziecka (mikrouszkodzenia centralnego układu nerwowego, choroby, zaburzenia emocjonalne itp.) oraz zewnętrzne – leżące po stronie szkoły (np. niewłaściwa metodyka nauczania) bądź po stronie środowiska rodzinnego (np. niewłaściwa opieka, brak pomocy podczas odrabiania lekcji)” (Kurant, 2008, s.81; także Gruszczyk-Kolczyńska, 1989).

Wskazane deficyty funkcji poznawczych dotyczą głównie pamięci operacyjnej, braków uzdolnień do przedmiotów ścisłych czy współwystępowanie z trudnościami w czytaniu. Na potwierdzenie tych ostatnich implikacji U. Oszwa (2008b) przytacza

wyniki badań C. Lewisa, G. J.Hitcha i P. Walkera (1994) wśród dzieci brytyjskich, izraelskie prace V. Gross-Tsura i O. Manora (1996), norweskie poszukiwania S. Ostada (1998), pomiary L. D. Hanicha i współpracowników (2001) czy L.S. Fuchsa (2002). W podsumowaniu jednak autorka stwierdza niejednoznaczność i niespójność rezultatów badań nad przyczynami trudności w uczeniu się matematyki (Oszwa, 2008b).

Ciekawe obserwacje na temat trudności w nauce matematyki w szkolnictwie niemieckim przedstawia E. Schuberth (2013) wskazując dwa źródła powstawania blokad matematycznych:

- błędy dydaktyczne np. zmiana metody nauczania, zbyt silne powiązanie liczenia z pomocami dydaktycznymi, logicyzm w nauczaniu matematyki w szkole, zmiany języka, w którym dziecko się uczy (problem imigrantów) oraz specyficzne dla szkół waldorfskich zbyt długie zatrzymywanie się nauczyciela przy rytmach;
- problemy psychiczne – zbyt wysokie wymagania stawiane dziecku, stygmatyzowanie niepowodzeń, domowy przymus i nieustanne stawianie osiągnięć w nauce jako priorytetu, co doprowadza do stanów lękowych, zwanych fobią arytmetyczną.

W Polsce szczegółowe badania nad przyczynami niepowodzeń w uczeniu się matematyki przeprowadziła E. Gruszczyk-Kolczyńska (1989, 2009b). Autorka dowodzi, iż źródłami niepowodzeń w zakresie matematyki są zaburzenia rozumowania operacyjnego, zaburzenia w percepcji wzrokowej i sprawności manualnej, a także niekorzystne uwarunkowania środowiskowe, nieprawidłowe kształtowanie aktywności dzieci na lekcjach matematyki oraz złożone czynniki emocjonalne, które blokują proces uczenia się (także Kurant, 2008; Oszwa, 2008b). E. Gruszczyk-Kolczyńska uważa, że „dla dzieci, które mają nadmierne trudności w uczeniu się matematyki, zadania zmieniają swój sens. Zamiast stanowić sytuację trudną intelektualnie, rozwiązywanie zadań staje się dla nich sytuacją nieznośną emocjonalnie, przed którą należy się bronić. Dlatego też dzieci o niskiej odporności emocjonalnej nie potrafią wytrzymać napięć związanych z uczeniem się matematyki (za: Kawczyńska, 2004, s.179).

Analizując przyczyny trudności w edukacji matematycznej należy również uwzględnić problem dojrzałości dziecka do uczenia się matematyki. Rozumowanie matematyczne, pojęcia oraz język matematyki mają bowiem charakter operacyjny. Zatem rozumowanie będące podstawą rozwiązywania problemów matematycznych, musi być prowadzone w konwencji operacyjnej. Aby dziecko było gotowe do uczenia

się matematyki, musi posługiwać się rozumowaniem operacyjnym, bo tylko ono umożliwi mu rozumienie sensu pojęć matematycznych. Natomiast „rozumowanie operacyjne na poziomie konkretnym – wystarczającym dla rozumienia pojęć matematycznych – pojawia się w życiu przeciętnego dziecka około siódmego roku życia, czyli dokładnie w tym czasie, kiedy zaczyna ono naukę matematyki w klasie I” (Gruszczyk-Kolczyńska, 1989, s.14). Należy jednak pamiętać o dużym indywidualnym zróżnicowaniu tempa rozwoju umysłowego dzieci, co implikuje niekorzystną sytuację dziecka rozwijającego się nieco wolniej, które musi rozpoczynać naukę matematyki bez koniecznej dla jej pojmowania dojrzałości intelektualnej. Niekiedy jest to różnica zaledwie kilku tygodni, lecz jak dowodzi E. Gruszczyk-Kolczyńska „zupełnie wystarcza dla uruchomienia mechanizmów obronnych blokujących proces uczenia się matematyki (Gruszczyk-Kolczyńska, 1989, s.45; także Kawczyńska, 2004).

Dodatkową trudność implikuje również fakt, że pojęcia matematyczne ze względu na swój operacyjny charakter mogą powstawać wyłącznie poprzez określoną aktywność dziecka. W tych działaniach musi ono wykazać się właściwą koordynacją wzrokowo-ruchową, precyzyjnym spostrzeganiem oraz dobrą sprawnością manualną. Zaburzenia tych funkcji mogą być przyczynami niepowodzeń w uczeniu się matematyki.

B. Zarucka (2008) analizowała przyczyny trudności matematycznych w opinii nauczycieli nauczania zintegrowanego. Autorka wyróżniła czynniki pedagogiczne, psychologiczne, społeczno-ekonomiczne, somatyczno-zdrowotne i intelektualne. Badani nauczyciele za najważniejsze uznali niższe możliwości intelektualne uczniów oraz niedojrzałość do nauki matematyki, a za najmniej istotne – przyczyny pedagogiczne z naciskiem na małą liczbę ćwiczeń praktycznych.

Dyskalkulia dotyczy głównie trudności z opanowaniem podstawowych umiejętności liczenia tzn. przeliczania elementów oraz wykonywania prostych działań matematycznych: dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, nawet w małym zakresie liczbowym.

U. Oszwa wskazuje jeszcze „słabe umiejętności rozumowania matematycznego ujawniające się w codziennych sytuacjach w posługiwaniu się pieniędzmi, kłopotami z kontrolą wydawanej reszty, dokonywaniem prostych obliczeń z udziałem podstawowych operacji arytmetycznych. Dodatkowo występują trudności w opanowaniu podstawowych reguł liczenia. Objawom tym towarzyszą inne problemy

związane z posługiwaniem się liczbami i ich powiązaniem z czasem i przestrzenią, takie jak: słabe wyczucie kierunku, łatwa dezorientacja w otoczeniu, trudności z ustaleniem porządku wydarzeń przeszłych i przyszłych” (Oszwa, 2008b, s.36).

B. Zarucka (2008) na podstawie badań własnych dokonuje zestawienia najczęstszych przejawów trudności uczniów na lekcjach matematyki dostrzegane przez nauczycieli nauczania zintegrowanego uczących w klasach trzecich. W większości przypadków wymieniane były błędy popełniane przez uczniów w obliczeniach oraz w analizie zadań tekstowych i nieznanostwo tabliczki mnożenia (także Dudel, 2012).

Niski poziom techniki liczenia potwierdzają również badania E. Kozak-Czyżewskiej (1987) oraz H. Spionek (1973).

Poziom umiejętność posługiwania się liczbami przez uczniów z trudnościami w uczeniu się matematyki badały A. Gołkiewicz-Kawa i U. Oszwa (2008). Autorki dowodzą, że dzieci z zaburzeniami arytmetycznymi uzyskują niższe wyniki we wszystkich ocenianych aspektach posługiwania się liczbami: w transkodowaniu, szeregowaniu, dokonywaniu obliczeń, rozwiązywaniu zadań tekstowych oraz znajomości systemu pozycyjnego.

Rodzaje trudności dzieci z dyskalkulią podczas rozwiązywania zadań tekstowych były także przedmiotem szczegółowych badań, jakie wśród uczniów klas III-VI szkoły podstawowej przeprowadziła M. Kurant (2008).

Zbieżne opisy przedstawionych symptomów specyficznych zaburzeń umiejętności arytmetycznych można spotykać także w literaturze światowej, której przeglądu dokonuje U. Oszwa (2007, 2008a, 2008b).

Autorka pisze również o informatorze rozpowszechnionym w szkołach brytyjskich, w którym B. Butterworth dokonał systematyzacji objawów trudności w uczeniu się matematyki oraz zamieścił wskazówki do indywidualnej pracy z dzieckiem z dyskalkulią rozwojową. Istotne są także badania prowadzone przez R. S. Sieglera i D. C. Geary’ego dotyczące dziecięcych strategii dodawania i odejmowania (za: Oszwa 2008a). Badacze uznali jako najmniej zaawansowane liczenie na palcach, natomiast za najbardziej dojrzałe liczenie werbalne i mentalne dokonywanie przekształceń, czyli dekompozycji, prowadzące do natychmiastowego uzyskania wyniku. Dzieci z zaburzeniami w liczeniu mają deficyty proceduralne lub pamięciowe, które utrudniają im stosowanie dojrzałych strategii dokonywania obliczeń. Deficyty proceduralne skutkują licznymi błędami w liczeniu, myleniu kolejności wykonywanych operacji,

trudnościami w wykonywaniu działań sposobem pisemnym, szczególnie z przekroczeniem progu dziesiętkowego, problemami z samodzielnym wykrywaniem błędów i autokorektą. Natomiast deficyty pamięciowe powodują, że dzieci mają „ogromne problemy z wydobywaniem z pamięci i automatycznym przypominaniem arytmetycznych kombinacji, zwanych faktami liczbowymi” (Oszwa, 2008a, s.43).

U. Meiss z kolei opisuje symptomy specyficznych zaburzeń rozwoju umiejętności arytmetycznych diagnozowane u niemieckojęzycznych dzieci z dyskalkulią, co pozwala na porównywanie objawów w różnych krajach różniących się pod względem edukacyjnym, kulturowym, społecznym i językowym (za: Oszwa, 2008b).

Jednakże problemem nadrzędnym, wydaje się być brak rzetelnych narzędzi do diagnozy dyskalkulii. U. Oszwa (2008b) omawia stosowane dotychczas eksperymentalne i testowe metody do oceny trudności w uczeniu się matematyki, wyróżniając wśród nich:

- testy osiągnięć i umiejętności szkolnych (Test Kalkulia III L. Kościa, Trójkąt Liczbowy L. Kościa, Szerokozakresowy Test Osiągnięć - Wide Range Achievement, Brytyjskie Skale Możliwości Szkolnych – British Ability Scales II (BAS II), Kwestionariusz Operowania Liczbami D. Ansari (Numeracy Questionnaire) oraz Skala Umiejętności Matematycznych U. Oszwy),
- testy zdolności ogólnych oraz
- testy zdolności specyficznych (Wzrokowo-Słuchowy Test Powtarzania Cyfr, Test Nazywania Cyfr, próby J. Piageta, Eksperymentalno-obszewacyjna ocena dziecięcej kompetencji matematycznej E. Gruszczyk-Kolczyńskiej oraz Przesiewowy test „Dyscalculia (Dyskalkulia) B. Buterrwortha).

W podsumowaniu U. Oszwa stwierdza: „analiza metod psychologicznych służących rozpoznawaniu specyficznych trudności w uczeniu się matematyki, dostępnych zarówno w Polsce, jak i zagranicą, wskazuje na złożoność dyskutowanego problemu, niezbędną świadomość diagnostycznych dylematów i ograniczeń, a także na ogromną potrzebę konstrukcji precyzyjnych, trafnych i rzetelnych narzędzi pomiaru” (Oszwa, 2008b, s.74).

Z pragmatycznego punktu widzenia szczególnie istotny jest problem pomocy dzieciom z dyskalkulią.

U. Oszwa (2008b) podkreśla znaczenie wczesnej diagnozy trudności matematycznych, która implikuje zdecydowanie skuteczniejsze oddziaływania edukacyjne (także Kość,

1982). Autorka powołując się na badania B. Butterwortha (1999) stwierdza, że „o sukcesie bądź porażce w zmaganiach z matematyką w dużym stopniu decydują wczesne z nią doświadczenia dziecka. Jeżeli zrozumie ono matematykę na początku edukacji, kolejne doświadczenia poprowadzą do osiągnięć, które z kolei wzmogą zainteresowanie matematyką i wzbudzą zapał do rozwiązywania kolejnych zadań, a to spowoduje ogólną radość z obcowania z matematycznymi problemami i coraz lepsze jej rozumienie (Oszwa, 2007, s.42-43). Niestety E. Gruszczyk-Kolczyńska stwierdza, że „niepowodzenia w uczeniu się matematyki są bardzo późno wykrywane. Nauczyciele, a także rodzice, zauważają, że dziecko nie potrafi sprostać wymaganiom z matematyki dopiero pod koniec klasy I, na początku klasy II, a nawet w klasie III. Tymczasem dziecko to od początku klasy I borykało się już z nadmiernymi trudnościami i zmuszane było do zajmowania się zadaniami, które przerastały jego możliwości (Gruszczyk-Kolczyńska, 1989, s.97).

Jednym z celów działań wspierających i profilaktycznych powinno być zwiększenie ilości doświadczeń szkolnych dotyczących operowania liczbami w celu podniesienia stopnia automatyzacji dokonywanych obliczeń.

Poza tym należy położyć nacisk na rozwijanie dojrzałych strategii liczenia i „sprawne przechodzenie od strategii werbalnego przeliczania do zaawansowanych technik pamięciowych” (Oszwa, 2008a, s.46).

R. Gersten, N. Jordan i J. Flojo proponują ponadto obok edukacji formalnej także „wyposażenie dzieci w umiejętność liczenia sposobem, na skróty, wykorzystując matematyczne sztuczki i triki, od tych najbardziej dostępnych, jak stosowanie posiadanej wiedzy do rozwiązania nowego problemu (jeżeli $2 + 3 = 5$, to $2 + 4 = 6$), wykorzystywanie znajomości relacji zachodzących między operacjami (odejmowanie jako odwrotność dodawania), reguł liczenia (odwracalność, rozdzielność itp.), po bardziej zaawansowane” (Gersten, Jordan, Flojo, 2005, s.38).

U. Oszwa (2007, 2008b) charakteryzuje sześć programów terapeutycznych stosowanych w pracy z dzieckiem z trudnościami w uczeniu się matematyki:

- program terapeutyczny E. Gruszczyk-Kolczyńskiej;
- zasady postępowania terapeutycznego z dzieckiem z dyskalkulią według L. Kościa;
- zalecenia do pracy z dziećmi z dyskalkulią rozwojową według J. Strang i B. Rourke;
- radzenie sobie z lękiem przed matematyką – program trzech kroków B. Butterwortha;
- zasady terapii dzieci z dysleksją i dyskalkulią według A. Henderson i E. Miles;

- zalecenia terapeutyczne a style uczenia się matematyki według M. C. Sharmy.

B. Zarucka natomiast wskazuje formy zapobiegania trudnościom w nauce matematyki z perspektywy praktyki szkolnej. W oparciu o przeprowadzone badania autorka stwierdza, że „preferowanymi przez nauczycieli okazały się formy pracy wykorzystywane bezpośrednio na lekcjach - zróżnicowanie zadań, dodatkowe objaśnienia i zachęta.

W ramach działań profilaktycznych nauczyciele wysoko ocenili rozwijanie myślenia operacyjnego, stosowanie konkretnych obiektów w liczeniu zgodnie z potrzebami dziecka i wiązanie obliczeń z życiem codziennym” (Zarucka, 2008, s.51). Podobne zalecenia formułują Z. Krygowska (1979), E. Stucki (1986) oraz E. Gruszczyk-Kolczyńska (1992).

Szukając przyczyn niepowodzeń szkolnych w nauce matematyki M. Burtowy (1992a) powołuje się na poglądy J. Piageta, który twierdził, że są one skutkiem zbyt szybkiego przechodzenia od jakości do ilości, od struktur logicznych do stosunków liczbowych. A „dopóki problem nie ma zapewnionej solidnej struktury logicznej, rozumowanie oparte na systemie liczbowym pozostaje bez znaczenia, a nawet przeciwnie, zaciemnia istniejące relacje” (Piaget, 1977, s.84). W związku z tym M. Burtowy (1992a) - jako antidotum - postuluje konieczność budowania rzetelnych struktur logicznych i kolejnego dopiero przechodzenia do przyswajania stosunków liczbowych, a także rozpoczynania kształtowania pojęć matematycznych u dzieci od ćwiczeń orientacyjnych w najbliższym otoczeniu.

We wszelkich działaniach naprawczych i profilaktycznych bardzo istotna jest systematyczność, ponieważ „szczególnie w tej dyscyplinie brak jednego ogniwa łańcucha może spowodować lawinę negatywnych skutków (Oszwa, 2008a, s.46).

Oczywiste jest, że „skuteczne nauczanie matematyki nie wyeliminuje dyskalkulii rozwojowej, może jednak złagodzić jej przebieg, a także wpłynąć na zmniejszenie odsetka osób, borykających się z matematyką wskutek nieodpowiednich metod edukacji” (Oszwa, 2008b, s.102). Ważne są jednak podejmowane ustawicznie próby modyfikacji i reformowania programów edukacji matematycznej zmierzające w kierunku większej ich efektywności, rozumianej również w aspekcie szeroko pojmowanej profilaktyki trudności arytmetycznych.

Konarzewski zwraca bowiem uwagę, że „brak choćby elementarnego poczucia mistrzostwa na lekcjach matematyki powoli prowadzi dziecko do fobii matematycznej,

ta zaś do rozległych niepowodzeń w dalszych latach kształcenia (za: Kawczyńska, 2004, s.177).

E. Gruszczyk-Kolczyńska (1989) analizując swe wieloletnie badania kategorycznie twierdzi, że można uniknąć niepowodzeń uczniów w uczeniu się matematyki, a także skutecznie pomóc tym, którzy ich już doświadczają. Podobną opinię wyrażał L. Kość twierdząc, że „nawet dzieci rzeczywiście przejawiające dyskalkulię mogą często osiągać znacznie wyższy poziom sprawności operacji matematycznych, niż aktualnie posiadany, jeżeli ich nauka będzie odpowiednio zorganizowana oraz – co najważniejsze, – jeżeli zostaną w pełni wykorzystane ich mechanizmy kompensacyjne” (Kość, 1982, s.25).

Należy także pamiętać o stanowisku psychologa genewskiego J. Piageta, który twierdził: „każdy normalny uczeń jest zdolny do poprawnego rozumowania matematycznego, jeżeli odwołamy się do jego aktywności i jeżeli uda nam się usunąć zaburzenia emocjonalne, które często wywołują uczucie niższości na lekcjach z tej właśnie dziedziny wiedzy” (Piaget, 1977, s.87). Podobnego zdania był także W. A. Krutiecki twierdząc, że „nie ma absolutnej niezdolności do uczenia się matematyki, nie istnieje także swego rodzaju «matematyczna ślepota». Dlatego każdy normalny i zdrowy uczeń przy prawidłowym nauczaniu, może przyswoić podstawowe pojęcia i umiejętności matematyczne (za: Gruszczyk-Kolczyńska, 1989, s.101).

6. Uzdolnienia matematyczne dzieci

Osiągnięcia ludzi wybitnie zdolnych są czynnikiem napędowym w każdej dziedzinie życia i dlatego, jak zauważa J. Sosnowska „społeczeństwo dba o zapewnienie utalentowanym dzieciom i młodzieży odpowiednich warunków do rozwijania i kształtowania uzdolnień” (Sosnowska, 2001, s.62; także Lewowicki, 1986; Trąd, 1988; Dudel, 2012).

W Międzynarodowej Konwencji Praw Dziecka stwierdza się, że „nauka dziecka będzie ukierunkowana na rozwijanie w jak najpełniejszym zakresie osobowości, talentów oraz zdolności umysłowych i fizycznych dziecka” (Konwencja o prawach dziecka [Dz. U z 1991 Nr 120 poz.526]). Uwzględnia to również Podstawa Programowa Wychowania Przedszkolnego [DZ. U. z dnia 15.01. 2009] wskazując, że jednym z zadań przedszkola jest rozwijanie uzdolnień dzieci (Krauze-Sikorska, 2011).

Jak zauważa A. Borowska (2009) we współczesnym świecie w przedszkolach jest coraz więcej dzieci wyróżniających się różnymi zdolnościami. Są to uzdolnienia w zakresie czytania, pisania czy liczenia, a także uzdolnienia muzyczne, plastyczne oraz sportowe.

Pojęcie „dziecko zdolne” w literaturze przedmiotu nie jest jednoznacznie definiowane i towarzyszy mu wiele mitów oraz stereotypów, na które wskazują H. Krauze-Sikorska (2011), A. Piechal (2005), K. Kotlarski (1990) oraz A. Hłobił (2010). Krótkiego rysu historycznego zagadnienia zdolności jako czynnika decydującego o osiągnięciach ludzi oraz problemu kształcenia jednostek zdolnych dokonał T. Lewowicki (1986).

Dla niniejszych rozważań należy przyjąć podane przez H. Krauze-Sikorską ustalenie, że „zdolność można traktować zarówno jako pewną sprawność do wykonywania określonych czynności przy niezbędnych warunkach zewnętrznych, ale też - jako pewną możliwość, dzięki której dziecko poprzez uczenie się i ćwiczenie zdobywa nowe wiadomości, umiejętności i sprawności” (Krauze-Sikorska, 2011, s.504). Autorka przestrzega jednocześnie przed postrzeganiem ucznia zdolnego wyłącznie przez pryzmat jego wyników w nauce i przedstawia mało optymistyczne wyniki badań empirycznych, które wskazują, że nadal większość nauczycieli za uczniów zdolnych „uważa osoby o wysokim ilorazie inteligencji, przewyższające swoich rówieśników wiedzą i potrzebą pogłębionej aktywności intelektualnej, mające wysoką motywację do nauki, co sprzyja osiąganiu wysokich wyników w nauce szkolnej” (Krauze-Sikorska, 2011, s.504). Ponadto część nauczycieli nie rozumie i nie akceptuje specyfiki funkcjonowania ucznia zdolnego (np. innego sposobu myślenia, skłonności do oryginalności i twórczości) oraz nie zawsze właściwie stymuluje rozwój jego zdolności (Krauze-Sikorska, 2011, także Hłobił, 2010).

W literaturze psychologiczno-pedagogicznej wskazywany jest szereg cech, jakimi odznacza się uczeń zdolny (Trąd, 1988; Sporniak, 2003; Hłobił, 2010; Piechal, 2005; Lewowicki, 1986; Borowska, 2009; Fechner-Sędzicka, Ochmańska, Odrobina 2012; Dudel 2012). Z badań J. Sporniak (2003) wynika, że uczniowie zdolni cechują się dużą ilością zainteresowań, niezależnością w myśleniu oraz dobrze rozwiniętą wyobraźnią. E. Landau (za: Piechal, 2005) dodaje kolejne cechy dziecka utalentowanego, takie jak:

- wcześnie prezentowana dojrzałość i zdolność w wybranej dziedzinie np. matematyce czy muzyce;

- formułowanie własnych reguł postępowania i własnych stylów uczenia się;
- kreatywność;
- oryginalny, nowatorski, niecodzienny sposób rozwiązywania problemów;
- chęć zdobywania wiedzy, poszukiwanie nowych wiadomości; czasem ograniczanie się do jednej dziedziny, która je szczególnie fascynuje;
- ochota do nauki;
- wrażliwość;
- umiejętność wykorzystywania wiedzy w zabawie;
- gotowość do rozwiązywania problemów.

A. Hłobił (2010) na podstawie obserwacji dzieci uzdolnionych podaje, że charakteryzują się one szybkim zapamiętywaniem, właściwym kojarzeniem i rozumowaniem, ciekawością świata, dociekliwością, szerokimi zainteresowaniami, bogatą wyobraźnią, oryginalnością i niezależnością w myśleniu oraz działaniu, a także poczuciem humoru.

Badania przeprowadzone przez E. Landau i jej współpracowników pokazały ponadto, że dzieci uzdolnione w czasie wolnym bardzo chętnie czytają książki. Niepokoić może jednak przyczyna preferowania takich form zajęć wolnoczasowych. Są bowiem nimi - zdaniem badaczy - często trudności przystosowawcze, niechęć do nawiązywania kontaktów z rówieśnikami czy nieufność wobec innych, którą odczuwają dzieci zdolne. Doświadczają one poczucia niezrozumienia czy wyobcowania (za: Piechal, 2005). Podobne spostrzeżenia formułuje również A. Borowska twierdząc, że „dzieci zdolne często źle funkcjonują w grupie. Są wyizolowane. Dzieje się tak dlatego, ponieważ dzieci te preferują pracę indywidualną, co z kolei powoduje, że nie mają przyjaciół, zamykają się w swoim świecie. Trudno jest im podporządkować się ogólnym zasadom, a przy tym mają potrzebę dominacji i rywalizacji. Postrzegane są więc często jako „dziwacy”, „odmieńcy” (Borowska, 2009, s.6; także Lewowicki, 1986; Hłobił, 2010; Kołacz-Kordzińska, 2013). Jednakże E. Landau podkreśla, że „z drugiej strony zdarzają się dzieci bardzo komunikatywne i ujawniające zdolności przywódcze. Stają się one często liderami grup” (za: Piechal, 2005, s.29; także Kołacz-Kordzińska, 2013). Podobne wnioski sformułował K. Kotlarski analizując pozycję socjometryczną uczniów uzdolnionych matematycznie. Autor dowodzi, że „uczniowie uzdolnieni są przez zespół widziani jako atrakcyjni, zarówno na terenie szkoły, jak i poza nią” (Kotlarski, 1990, s.145).

Wśród wielu uzdolnień szczególne miejsce zajmują zdolności matematyczne uczniów będące przedmiotem zainteresowania psychologów, ale przede wszystkim nauczycieli matematyki i metodyków, gdyż tylko wnikliwe poznanie natury tych zdolności oraz umiejętność ich diagnozowania warunkują ustalenie, jakimi środkami i w jakich warunkach można te zdolności optymalnie rozwijać.

„Uzdolnienia matematyczne można określić jako właściwości percepcji, myślenia i pamięci, które przejawiają się na materiale przestrzennym, liczb i symboli” (Kotlarski, 1990, s.25; podobnie Gawda, 1996). E. Gruszczyk-Kolczyńska uzupełnia, że uzdolnienia do matematyki są „zdolnościami specjalnymi, które pozwalają na osiąganie ponadprzeciętnych wyników w działalności matematycznej (Gruszczyk-Kolczyńska, 1989, s.102; także Fechner-Sędzicka, Ochmańska i Odrobina 2012).

W. A. Krutiecki uważa, że istnieje ogólny komponent, który nazywa matematycznym ukierunkowaniem umysłu. „Jest to zamięłowanie do interpretowania otaczającego świata w kategoriach logicznych i matematycznych. Jest to cecha spostrzegania i myślenia uczniów uzdolnionych matematycznie” (za: Kotlarski, 1990, s.40). Podobnych obserwacji dokonują E. Gruszczyk-Kolczyńska i E. Zielińska, pisząc, że dzieci zdolne „dosłownie wszędzie widzą matematyczne problemy i chcą wiedzieć, ile jest, policzyć, zmierzyć, zbudować, rozłożyć na części. Dopominają się o takie zadania i domagają się coraz trudniejszych”(Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 1997, s.178).

W poglądach wielu badaczy zauważa się wskazywanie istnienia różnych typów uzdolnień matematycznych. I tak W. A. Krutiecki (za: Gruszczyk-Kolczyńska, 2012c) proponuje przyjąć podział uzdolnień matematycznych na:

- typ szkolny – uzdolnienia warunkują szybkie i dobre opanowanie szkolnego zakresu matematyki, rozumienie teorii matematycznej oraz zastosowanie jej w praktyce;
- typ naukowy – uzdolnienia prowadzą do twórczej i naukowej działalności matematycznej, budowania nowych teorii i stosowania ich w naukowej działalności matematycznej.

Podobnego podziału dokonuje B. Gawda (1996) rozróżniając dwa rodzaje uzdolnień matematycznych:

- produktywne, czyli heurystyczne umożliwiające formułowanie nowych praw i rozwiązań oraz

- nieproduktywne, czyli algorytmiczne, pozwalające na opanowanie istniejących już schematów.

A. Dąbek (1984) wymienia najważniejsze aspekty zdolności matematycznych, do których zalicza:

- nabywanie nowych wiadomości i umiejętności matematycznych;
- manipulowanie matematyczną wiedzą i umiejętnościami;
- ocenianie informacji i wnioskowanie;
- pamięć.

Nieco inne stanowisko zajmuje W. A. Krutiecki (1968) analizując struktury szkolnych uzdolnień matematycznych. Na etapie odbioru informacji matematycznej autor wskazuje na istnienie zdolności do sformalizowanej percepcji struktury zadania, czyli o co chodzi i co nam mówią w zadaniu. Natomiast na etapie przetwarzania informacji zawartej w zadaniu W. A. Krutiecki (1968) wyróżnia:

- zdolność logicznego myślenia w sferze symboli, stosunków ilościowych i przestrzennych;
- zdolność bystrego i rozległego uogólniania matematycznych faktów, stosunków i działań;
- giętkość, plastyczność myślenia w obrębie materiału matematycznego;
- zdolność posługiwania się zredukowanymi strukturami, skracania ogniw i etapów myślenia; zdolność myślenia strukturami zredukowanymi;
- zdolność do zmiany kierunku myślenia w zależności od potrzeb i sytuacji (odwracalność procesów myślowych w toku rozumowania matematycznego);
- dążenie do prostych, jasnych, ekonomicznych rozwiązań.

Natomiast po rozwiązaniu zadania - na etapie przechowywania informacji matematycznej obserwuje się - zdaniem W. A. Krutieckiego, łatwość kojarzenia wniosków i zapamiętywania informacji (za: Kotlarski 1990; także Gruszczyk-Kolczyńska, 2012c; Dudel, 2012).

Uczeń uzdolniony matematycznie posiada zatem indywidualne cechy, pozwalające mu łatwo i szybko przyswajać wiadomości i umiejętności matematyczne. W. A. Krutiecki określa je jako syndrom uzdolnień specjalnych do uczenia się matematyki (za: Gruszczyk-Kolczyńska, 2012c). Badacz wyróżnił następujące cechy ucznia osiągającego wybitne sukcesy matematyczne:

- wysoki poziom zamięłowania do matematyki;

- pracowitość i dobra organizacja pracy, silna motywacja, radość z tworzenia i poznawania;
- wysoka zdolność skupienia się na zadaniu i dobre samopoczucie w trakcie rozwiązywania problemów matematycznych;
- szeroki zakres wiadomości i umiejętności matematycznych;
- uzdolnienia matematyczne, rozumiane jako cechy umysłu pozwalające na łatwe i skuteczne uczenie się matematyki (Krutiecki, 1968).

D. Tall i E. Gray na podstawie badań własnych dowodzą, że dzieci uzdolnione matematycznie „od razu nastawione są na szukanie związków, relacji, na abstrahowanie i uogólnianie (za: Swoboda, 2007, s.73). Badacze zaobserwowali ponadto, że dzieci z analizowanej grupy:

- „lubią liczby, często wplatają je w historyjki oraz wierszyki;
- używają niebanalnych kryteriów dla klasyfikowania i sortowania;
- potrafią dyskutować (spierać się), kwestionować, uzasadniać, z wykorzystaniem funktorów logicznych: jeżeli ... to, tak więc, ponieważ, również, czy, lub;
- tworzą wzorki (szlaczki) z wykorzystaniem powtarzalnych elementów, zachowaniem równowagi lub symetrii;
- lubią bawić się układankami oraz innymi zabawkami wymagającymi wykonywania instrukcji” (za: Swoboda, 2007, s.74).

A. Borowska wskazuje, że dziecko z talentem matematycznym:

- „interesuje się cyframi i liczbami. Łatwo przychodzi mu operowanie cyframi i liczbami;
- szybko liczy, nie potrzebuje liczyć na konkretach;
- interesuje się matematyką, różnymi jej działami;
- przejawia zainteresowania grą w szachy lub inne gry matematyczne;
- wszystko, co daje się wyliczyć i sprawdzić matematycznie, wylicza i sprawdza
- wykazuje wytrwałość i upór w rozwiązywaniu zadań;
- jest aktywne na zajęciach z zakresu matematyki” (Borowska, 2009, s.13).

Czasami zdarza się, że takie dzieci mogą mieć problemy z nauką niematematycznych treści. Ich matematyczny świat skłania do ciągłego liczenia i dlatego mogą doświadczać trudności, kiedy zadanie wymaga oderwania się od liczb i skupieniu na treści i emocjach. Mogą być też źle odbierane przez inne dzieci, gdy

wyprzedzają myślą grupę i zadają dużo pytań, czasami nie związanych z tematem, lecz z kolejnym problemem, który ich zainteresował.

Panuje przekonanie, że ucznia wybitnie zdolnego matematycznie można rozpoznać dopiero na wyższych szczeblach nauki, kiedy rozwiązuje bardziej skomplikowane zadania. Uzdolnienia matematyczne prezentują dzieci jednak bardzo wcześnie. Szczegółowe badania w tym zakresie przeprowadziła E. Gruszczyk-Kolczyńska (2012a), dowodząc, że, „zarysowujące się uzdolnienia matematyczne można dostrzec u dzieci już w 4. roku życia”, co potwierdza tezę „o wcześnie manifestujących się uzdolnieniach, jeżeli są one znaczne” (Gruszczyk-Kolczyńska, 2012a, s.51). Ponadto autorka wskazuje, że wyraźne przejawy uzdolnień matematycznych przejawiają pięciolatki, choć niestety nie są o tym przekonani nauczyciele.

Z badań E. Gruszczyk-Kolczyńskiej wynika również, że „szósty rok życia to optymalny czas ujawniania się uzdolnień matematycznych” (Gruszczyk-Kolczyńska, 2012a, s.52). Badaczka zauważa, że wielu starszych przedszkolaków posiada zadziwiającą łatwość w nabywaniu wiadomości i umiejętności matematycznych oraz matematyczne ukierunkowanie umysłu, które są najważniejszymi wskaźnikami uzdolnień matematycznych. Dzieci uzdolnione szybciej przechodzą na poziom wykonywania operacji konkretnych, wykazują się w tym większą precyzją i dlatego zdecydowanie szybciej przechodzą od konkretów do uogólnień. Kiedy ich rówieśnicy osiągają ten poziom między 6 a 8 rokiem życia, one potrzebują zaledwie czterech lub pięciu lat. Wykazują się także poczuciem logiki. Szybko zauważają niekonsekwencję i absurdy, zarówno w sytuacjach życiowych, jak i tych wymagających liczenia, porządkowania, klasyfikowania czy ustalania zależności. Można to sprawdzić przekazując dziecku zadanie celowo źle sformułowane lub celowo rozwiązując zadania niepoprawnie. Poza tym dzieci z matematycznymi zdolnościami wykazują się dobrą koncentracją uwagi i wytrwałością w dążeniu do celu, nie zniechęcają się po pierwszych niepowodzeniach. Cechują się też wydolnością umysłową i pomysłowością. Ponadto takie dzieci chętniej, z zaangażowaniem wykonują zadania matematyczne. Samodzielnie wyszukują sytuacje, w których mogą liczyć i mierzyć, przykładowo przeliczają drzewa przy drodze lub mierzą krokami odległość. Dzieci te „przewyższają swych rówieśników poziomem rozwoju tzw. inteligencji operacyjnej, precyzją i giętkością myślenia, trwałością zainteresowań i wytrwałością w pracy” (Gruszczyk-Kolczyńska, 1989, s.18). Ponadto

„potrafią także tak długo zmieniać sposoby rozwiązania, aż znajdą ten właściwy (...) oraz charakteryzują się wysokim stopniem samodzielnego myślenia, pracowitością i silną motywacją poznawczą. Potrafią stosunkowo dobrze znosić stany napięcia towarzyszące rozwiązywaniu problemów wymagających wysiłku intelektualnego” (Gruszczyk-Kolczyńska, 1989, s.107).

Bardzo istotnym problemem jest praca z dzieckiem zdolnym, które ma specyficzne potrzeby poznawcze związane z występowaniem zainteresowań bardziej pogłębionych niż u osób przeciętnie uzdolnionych (Fechner-Sędzicka, Ochmańska i Odrobina 2012; Dudel 2012). Jest ono ciekawe, dociekliwe, zadaje wiele pytań, pragnie eksperymentować. W. A. Krutiecki stwierdza kategorycznie, że „zdolności matematyczne nie są wrodzone, lecz nabyte w ciągu życia” (Krutiecki, 1971, s.272). Podobne stanowisko zajmuje E. Stucki dowodząc jednoznacznie, że zdolności matematyczne dzieci można skutecznie rozwijać, ale konieczne jest „udoskonalenie procesu nauczania tego przedmiotu przez zmianę treści i unowocześnienia metod nauczania” (Stucki, 1978, s.33).

A. Dąbek (1984) wskazuje trzy tory kształcenia zdolności matematycznych:

- a. kształcenie treściowego aspektu myślenia (pojęcia i konkretne umiejętności matematyczne), gdzie największy nacisk kładzie się na posiadanie różnych informacji;
- b. kształcenie operacyjnego aspektu myślenia, czyli manipulowanie wiedzą i jej transformacje, posługiwanie się wiedzą matematyczną w celu rozwiązywania różnorodnych problemów matematycznych;
- c. kształcenie tzw. krytycznego myślenia, a więc umiejętności oceny wiedzy i jej zastosowania.

Autor zwraca także uwagę na równie istotny element kształcenia zdolności matematycznych, jakim jest rozwijanie właściwej motywacji uczniów w uczeniu się matematyki, opartej na zainteresowaniach i potrzebie nabywania nowych kompetencji (Dąbek, 1984, także Fechner-Sędzicka, Ochmańska i Odrobina 2012).

Tymczasem programy nauczania dostosowane są do poziomu ucznia przeciętnego, co stwarza zagrożenie, że uczeń uzdolniony będzie się nudził na lekcjach, a w końcu w ogóle przestanie się uczyć. „Nieodpowiednia organizacja procesu nauczania często prowadzi do tego, że uczniowie zdolni mają niechętny stosunek do szkoły i czasami słabe, w porównaniu z możliwościami, wyniki” (Sosnowska, 2001, s.63; także Kołacz-Kordzińska, 2013; Lewowicki, 1986; Trąd, 1988). Ponadto, na co

wyraźnie wskazuje A. Borowska praca dzieckiem zdolnym jest często nieukierunkowana. Autorka uważa, że „zazwyczaj dzieci te potrafią radzić sobie same, nie sprawiają problemów wychowawczych i uchodzą uwadze nauczycieli i wychowawców” (Borowska, 2009, s.5).

Zgoła odmienne wnioski formułuje B. Dudel (2012), analizując wypowiedzi nauczycieli klas młodszych. Autorka zauważa, że nauczyciele stosują zindywidualizowane formy pracy z uczniem zdolnym, różnicują wymagania, organizują zajęcia fakultatywne i konkursy matematyczne. B. Dudel wyraża przekonanie, iż „nauczycielki klas młodszych mają świadomość, że realizacja treści programowych z edukacji matematycznej z uczniami wykazującymi szczególną łatwość w uczeniu się nie może ograniczyć się do wypracowania umiejętności szybkiego i sprawnego obliczenia działań, ale przede wszystkim powinno się kształtować, rozwijać i doskonalić giętkość myślenia, kreatywność oraz umiejętność dochodzenia do trafnych wniosków” (Dudel, 2012, s.255).

W systemach szkolnych wielu krajów powstaje szereg koncepcji pracy z uczniem uzdolnionym (Hłobił, 2010; także Lewowicki, 1986; Painter, 1993; Trąd, 1988; Dyrda i Gierczyk 2013).

Jedną z nich jest stosowanie przyspieszania nauki szkolnej, które może przybierać formę wcześniejszego podejmowania nauki szkolnej, szybszego opracowywania treści kształcenia (podwójna promocja, klasy „półroczne”, „wydłużony” rok szkolny) czy nauczania indywidualnego. J. Sosnowska (2001) sygnalizuje jednak zarówno pozytywne (mobilizujące), jak i negatywne skutki tego rodzaju wspomagania rozwoju uczniów zdolnych, które głównie dotyczą sfery uspołecznienia. Autorka podejmuje również dyskusję nad celowością tworzenia specjalnych szkół czy grup dla uczniów zdolnych przeciwstawiając tej tendencji stosowanie indywidualizacji wymagań w niewyselekcjonowanych klasach.

Innymi koncepcjami pracy z uczniami szczególnie uzdolnionymi praktykowanymi na świecie jest rozszerzanie treści programowych i realizowanie treści pozaprogramowych (Lewowicki, 1986, Painter, 1993). W tym celu opracowywane są specjalne programy dla uczniów bardzo zdolnych, a plany i programy szkolne różnicowane są na treści obowiązkowe i fakultatywne. Ponadto organizowane są zajęcia pozalekcyjne i pozaszkolne, kursy, obozy edukacyjne, a w niektórych krajach także systemy konsultantów dla nauczycieli i system doradztwa dla uczniów uzdolnionych.

M. Trąd (1988) rozważa problem rozwoju zdolności matematycznych z punktu widzenia nauczyciela, twierdząc, że „do kształcenia uczniów uzdolnionych potrzeba również uzdolnionych nauczycieli”, gdyż „efekty pracy poszczególnych nauczycieli zależą od ich możliwości samokształcenia, doboru odpowiedniej literatury, zdobytych doświadczeń oraz poziomu przygotowania psychologicznego, pedagogicznego i merytorycznego (Trąd, 1988, s.6). Podobną opinię wyraża J. Cieślikowska twierdząc, że od nauczyciela uczniów zdolnych „oczekuje się określonych cech osobowości i predyspozycji intelektualnych, szerokich kompetencji zawodowych: merytorycznych związanych z rozległą wiedzą z zakresu nauczanego przedmiotu oraz dydaktycznych warunkujących biegłość w nauczaniu, ale także kompetencji społecznych, komunikacyjnych, twórczych, badawczych i rozwojowych” (Cieślikowska, 2013, s.25, także Fechner-Sędzicka, Ochmańska i Odrobina 2012). Wychodząc naprzeciw tym oczekiwaniom M. Trąd podaje konkretne wskazania i rozwiązania praktyczne dotyczące pracy z uczniami zdolnymi w toku procesu edukacyjnego, kładąc szczególny nacisk na rozwijanie zainteresowania uczniów realizowanymi treściami nauczania. Badacz przekonuje, że „jeśli zainteresujemy ucznia matematyką, to równocześnie sprawimy, że uczenie się tego przedmiotu staje się dla niego źródłem przyjemności” (Trąd, 1988, s.8).

Niemniej, jak stwierdza A. Hłobił „opiekę nad uczniami zdolnymi należy organizować już od najmłodszych lat ich kariery szkolnej, a w przypadku niektórych uzdolnień przenieść ją nawet trzeba na okres przed rozpoczęciem nauki szkolnej” (Hłobił, 2010, s.18). A. Borowska dodaje, że „jeśli nie zrobimy tego w ciągu pierwszych 10 lat życia, zdolności mogą ulec zatajeniu i możemy już nigdy ich nie rozwinąć” (Borowska, 2009, s.48).

W tym kontekście A. Borowska (2009) przedstawia zestaw kontrolny do rozpoznawania talentu matematycznego dzieci w wieku przedszkolnym oraz podaje wiele ciekawych praktycznych pomysłów ćwiczeń rozwijających zdolności matematyczne dzieci w przedszkolu.

III. Kompetencje matematyczne dzieci kończących edukację przedszkolną a założenia Podstawy Programowej Wychowania Przedszkolnego

1. Edukacja matematyczna w aspekcie Podstawy Programowej Wychowania Przedszkolnego

Podstawa programowa to zapis tego, jakiego zakresu treści państwo zobowiązuje się nauczyć przeciętnie uzdolnionego ucznia. Jest ona napisana językiem wymagań i oczekiwań. Wymaga się od nauczyciela zorganizowania dzieciom określonych doświadczeń i oczekuje się, że dzieci w takiej sytuacji nauczą się określonych umiejętności i przyswoją określone wiadomości. Obowiązkiem nauczyciela jest realizacja wszystkich treści zapisanych w podstawie programowej. Treści te są rozszerzone w programie wychowania przedszkolnego lub nauczania, który nauczyciel wybierze do realizacji.

Obecnie obowiązującym dokumentem jest *Podstawa Programowa Wychowania Przedszkolnego dla przedszkoli, oddziałów przedszkolnych w szkołach podstawowych oraz innych form wychowania przedszkolnego, będąca załącznikiem 1 do Rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół z dnia 23 grudnia 2008 roku* (Dziennik Ustaw z dnia 15 stycznia 2009r. Nr4, poz.17). Szczegółowej analizy aktualnej i wcześniejszych podstaw programowych wychowania przedszkolnego dokonuje M. Kwaśniewska (2011) oraz A. Klim-Klimaszewska (2011).

Wspomaganie rozwoju intelektualnego dziecka wraz z edukacją matematyczną jest jednym z obszarów, który należy według nowej Podstawy Programowej Wychowania Przedszkolnego wdrażać, by osiągnąć cele wychowania przedszkolnego.

Dziecko kończące edukację przedszkolną i rozpoczynające naukę w szkole podstawowej powinno:

- „1) liczyć obiekty i rozróżniać błędne liczenie od poprawnego;
- 2) wyznaczać wynik dodawania i odejmowania, pomagając sobie liczeniem na palcach lub na innych zbiorach zastępczych;
- 3) ustalać równoliczność dwóch zbiorów, a także posługiwać się liczebnikami porządkowymi;
- 4) rozróżniać stronę lewą i prawą, określać kierunki i ustalać położenie obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów;

5) wiedzieć, na czym polega pomiar długości, i znać proste sposoby mierzenia: krokami, stopa za stopą;

6) znać stałe następstwo dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku” (Dziennik Ustaw z dnia 15 stycznia 2009 r. Nr4, poz.17).

Podstawa programowa zakłada zatem, że dziecko „matematycznie” dojrzałe do rozpoczęcia edukacji szkolnej prezentuje właściwy poziom rozumowania operacyjnego, ma świadomość, jak należy poprawnie przeliczać przedmioty, ma dostatecznie rozwiniętą percepcję wzrokową i koordynację wzrokowo-ruchową oraz ustaloną lateralizację, co pozwala mu orientować się w otaczającej przestrzeni (Rura i Klichowski, 2011).

U. Oszwa (2006) zauważa, że w aktualnie obowiązującej Podstawie Programowej wprowadzono poziomy o rosnącym stopniu trudności i zrezygnowano z podziału treści programowych na grupy wiekowe. Takie ujęcie Podstawy Programowej umożliwia - zdaniem autorki – bardziej elastyczne i zindywidualizowane traktowanie programu przez nauczyciela.

Autorka wymienia pięć obszarów umiejętności zdobywanych przez dziecko w wieku przedszkolnym:

- orientacja przestrzenna;
- klasyfikacja;
- posługiwanie się liczbami naturalnymi;
- orientacja w czasie;
- określanie ciężaru przedmiotów i pojemności naczyń.

Należy pamiętać, że pojęcia przestrzeni, ciężaru, liczby, czasu i pieniędzy rozwijają się powoli z powodu wysokiego stopnia abstrakcyjności, a także, dlatego, że do momentu rozpoczęcia nauki w szkole doświadczenia dzieci w tym zakresie są ograniczone (Hurlock, 1985).

Ponadto H. Moroz (1982) wyraźnie zaznacza, że metody pracy dydaktycznej stosowane w procesie kształtowania myślenia matematycznego muszą uwzględniać naturalny rozwój procesów myślowych i zainteresowań dziecka.

M. Fiedler z kolei przestrzega przed jednostronną koncentracją na treściach dotyczących zbiorów ze szkodą dla rozwijania np. pojęć czasowych czy przestrzennych. Autorka dodaje „prawidłowość realizowania programu polega na wzajemnym uzupełnianiu i dopełnianiu treści” (Fiedler, 1977, s.13).

Natomiast I. Dudzińska (1983) zwraca uwagę, że realizując program wychowania przedszkolnego należy szczególny nacisk położyć na rozwój procesów analizy i syntezy wzrokowej i słuchowej w pracy z dzieckiem sześciolatkiem.

E. Gruszczyk-Kolczyńska natomiast apeluje, aby na etapie wychowania przedszkolnego zadbać o:

- „konsekwentne powiązanie edukacji matematycznej z intensywnym wspomaganie rozwoju umysłowego dzieci i respektowaniem prawidłowości ich uczenia się,
- ciągłość pomiędzy tym, co dziecko opanowało w ramach edukacji domowej, przedszkolnej i szkolnej, szczególnie w pierwszym roku szkolnej edukacji,
- łagodne wprowadzanie w konwencję szkolnej edukacji matematycznej z uwzględnieniem wstępnej matematyzacji” (Gruszczyk-Kolczyńska, 2009c, s.13).

2. Analiza kompetencji matematycznych dzieci przedszkolnych w odniesieniu Podstawy Programowej Wychowania Przedszkolnego

2.1. Liczenie obiektów i rozróżnianie błędnego liczenia od poprawnego

Liczby i ich graficzny zapis (cyfry) są nieodłącznym elementem naszej codzienności, a nieformalna edukacja matematyczna towarzyszy dziecku już od pierwszych chwil życia i stanowi swoisty fundament jego rozwoju poznawczego (Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2009c; także Kamińska, 2012). Wykorzystując umiejętność liczenia dzieci wcześniej mogą identyfikować i logicznie porządkować otaczającą ich rzeczywistość.

M. Fiedler (1977) zauważa, że dzieci pod wpływem dorosłych i dzięki dobrej pamięci posługują się w sposób werbalny liczebnikami głównymi i to dość w znacznym zakresie, ale zupełnie nie rozumieją ich treści. Takie dzieci nie potrafią odpowiedzieć na pytanie: Ile jest? (też Szemińska, 1981).

Okazuje się, bowiem, że kształtowanie w umysłach dzieci schematu liczenia i kształtowanie pojęcia liczby naturalnej to długotrwały proces. „Z ontogenezy myślenia wynika, że pojęcie to nie pojawia się w świadomości dziecka w sposób nagły i w pełnej postaci. Wręcz przeciwnie (...) wszystkie logiczne składniki konstrukcji liczby mają już swoje antycypacje we wcześniejszych okresach rozwojowych, ale kształtują się w pełni dopiero w okresie tworzenia się struktur logiki i struktur operacyjnych, zwanych konkretnymi, czyli w wieku 7-8 lat” (Moroz, 1982, s.22). Konieczne jest, aby dziecko

osiągnęło właściwy poziom dojrzałości operacji konkretnych (Fiedler, 1977). Pod koniec wieku przedszkolnego dziecko potrafi sprawnie liczyć i odróżniać liczenie błędne od poprawnego.

Proces rozwoju umiejętności liczenia uwarunkowany jest dwoma podstawowymi czynnikami:

1. zdolnością do nadawania znaczenia prostym sytuacjom społecznym i rozumienia zamierzeń dorosłych;
2. wpływem dorosłych, którzy wskazują dzieciom pierwsze intuicje matematyczne, „ucząc je ceremoniału liczenia, sposobów ustalania, gdzie jest więcej, a gdzie mniej, a także wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania (Gruszczyk-Kolczyńska, 1992, s.38).

Stąd – zdaniem E. Gruszczyk-Kolczyńskiej (1992) indywidualne dywergencje w opanowaniu umiejętności liczenia przez małe dzieci wynikają zarówno z różnic w ich zdolności dostrzegania prawidłowości oraz tego, jak dorośli uczyli je liczyć.

W procesie kształtowania się umiejętności liczenia można wyodrębnić kilka prawidłowości (za: Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2004; także Oszwa, 2008a; Darowna, 2005). Liczenie wywodzi się od rytmów i gestu wskazywania, którym posługuje się dziecko już pod koniec pierwszego roku życia. Dziecko stara się w ten sposób pokazać dorosłemu, jakim przedmiotem się interesuje i prosi, aby „dorosły brał udział w tym akcie poznania i oznaczył ten obiekt słowem-nazwą” (Gruszczyk-Kolczyńska, 1992, s.38). Oczywiście ten spontaniczny gest dziecka pełni ważną rolę w kształtowaniu się mowy, ale jednocześnie jest początkiem liczenia. Dziecko wskazuje przedmioty palcem, dbając o rytm.

Licząc przedmioty mniej dba nawet o kolejność liczebników, bardziej zależy mu na rytmiczności i kierunku gestów liczenia. Najwcześniej dziecko wyodrębnia przedmioty, którymi się interesuje i które chce lepiej poznać. Pokazując przedmioty, dziecko bardzo wcześnie używa liczebników (nie zawsze w prawidłowej kolejności) i traktuje je jako zastępcze nazywanie przedmiotów. Dziecko, które wie, że licząc należy wypowiadać kolejne liczebniki stosuje regułę nazywaną przez R. Gelmana *regułą stałości porządku* (za: Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2009c). Dotyczy to zwykle kilku przedmiotów ustawionych w rzędzie lub szeregu, gdyż są to sytuacje na miarę możliwości poznawczych małego dziecka, które w ten sposób gromadzi doświadczenia sprzyjające kształtowaniu się schematu liczenia. Taki sposób ułożenia przeliczanych

przedmiotów ułatwia dziecku stosowanie zasady *jeden do jednego* (jeden gest i jeden wypowiedziany liczebnik).

Z obserwacji E. Gruszczyk-Kolczyńskiej i E. Zielińskiej wynika, że „regułę tę stosują tylko niektóre pięciolatki, wiele sześciolatek i siedmiolatek. Bywają jednak uczniowie klasy I, którzy o tym nie są jeszcze przekonani” (Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2009c, s.109).

We wczesnej fazie wieku przedszkolnego dzieci mają jeszcze spore kłopoty z koordynacją gestu wskazywania z wypowiadanymi liczebnikami. Jednakże wraz z rozwojem mowy i doświadczeń w liczeniu dosłownie wszystkiego rośnie zakres opanowywanych słów-liczebników.

Pod koniec wieku przedszkolnego dziecko zaczyna rozumieć, że ostatni liczebnik ma podwójne znaczenie- dotyczy ostatniego liczonego elementu oraz określa, ile jest wszystkich razem. R. Gelman nazywa to *regułą kardynalności* (za: Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2009c; także Gruszczyk-Kolczyńska, 1992; Darowna, 2005). M. Fiedler zauważa, że „dziecko stosunkowo łatwo dokonuje prawidłowej analizy: przelicza poprawnie elementy zbioru, ale nie potrafi tak łatwo dokonać syntezy, nie rozumie, że ostatni wymieniony liczebnik (przy przeliczaniu przedmiotów) odnosi się do wszystkich elementów zbioru, że ostatni liczebnik określa liczebność zbioru” (Fiedler, 1977, s.105; też Szemińska, 1981).

W później fazie wieku przedszkolnego większość dzieci sprawnie posługuje się umiejętnością liczenia w różnych sytuacjach. Wiedzą, że można policzyć każdy zestaw elementów, nawet jeśli są różne pod względem jakościowym, czyli stosują *regułę abstrakcji*. Stopniowo zauważają także, że przedmioty można liczyć od początku do końca i odwrotnie, a także rozpoczynać przeliczanie z dowolnego miejsca, umieją policzyć elementy zgrupowane, dochodząc do wniosku, iż liczebność zbioru nie zależy od kolejności przeliczania, czyli stosują *regułę niezależności porządkowej* (Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2009c; także Gruszczyk-Kolczyńska, 1992; Darowna, 2005).

Oczekuje się, że dzięki licznym doświadczeniom dziecko nauczy się rozumnie przeliczać elementy, czego efektem będzie to, że odróżni błędne liczenie od poprawnego. Same stosując opisane reguły, będą oczekiwać tego od innych. E. Gruszczyk-Kolczyńska i E. Zielińska uważają, że „dostrzeganie błędów w liczeniu jest, więc ważnym wskaźnikiem ustalania u dzieci stopnia ukształtowania umiejętności liczenia” (Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2009c, s.109).

Od dorosłych w dużym stopniu zależy, ile dziecko umie, gdyż edukacja matematyczna dzieci rozpoczyna się na długo przed rozpoczęciem nauki matematyki w szkole. A. Jacewicz stwierdza dobitnie: „gdyby dorośli starali się rozwijać dziecięce liczenie tak intensywnie, jak pracują nad mową dziecka we wczesnym dzieciństwie, to kształtowanie tych ważnych umiejętności odbywałoby się znacznie szybciej” (Jacewicz, 2007, s.182). Istotną rolę odgrywa to, czy dorośli stymulują i zachęcają dziecko do liczenia oraz czy pokazują mu jak liczyć (Gruszczyk-Kolczyńska, 1992). Zdarza się bowiem, że dorośli ograniczają zakres liczenia do trzech przedmiotów. Wydaje się im, że małe dziecko nie poradzi sobie z większą ilością przedmiotów (Szemińska, 1981). Należy jednak pamiętać, że liczenie wywodzi się z rytmów i opiera na zdolności dostrzegania regularności (Swoboda, 2007). Niełatwo nauczyć się liczenia, jeżeli mamy do czynienia ze zbyt małą ilością przedmiotów. Trudno wtedy dziecku zaobserwować regularność, bo można ją zauważyć dopiero w trakcie dłuższego rytmicznego wskazywania liczonych przedmiotów. A zatem bardzo ważnym zadaniem nauczyciela w przedszkolu, zarówno w grupach młodszych, jak i starszych przedszkolaków, jest organizowanie dzieciom jak najwięcej doświadczeń w liczeniu (przykłady ćwiczeń i praktycznych sytuacji podaje A. Szemińska, 1981).

M. Burtowy podkreśla jeszcze jeden aspekt umiejętności posługiwania się liczbami, a mianowicie wytworzenie związku między słownym określeniem liczby za pomocą liczebnika głównego a jego graficznym symbolem, czyli cyfrą. Podstawą tego zrozumienia jest według autorki „uświadomienie dziecku zależności pomiędzy sytuacją konkretną a abstrakcyjną, a więc przejście od manipulacji (czynności na przedmiotach) do rozumowania opartego na znakach, symbolach” (Burtowy, 1992a, s.244; też Wilgocka-Okon, 1972)

2.2 Wyznaczanie przez dzieci wyniku dodawania i odejmowania, przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych

Przygotowaniem do dodawania i odejmowania jest podział zbioru na podzbiory rozłączne i ponowne ich łączenie. „Wraz ze znajomością liczebników głównych podział zbioru na dwa podzbiory rozłączne wiąże się z przeliczaniem elementów w przeliczanych podzbiorach. Łączenie zaś tych podzbiorów i ponowne przeliczanie elementów w otrzymanym złączeniu, w sposób praktyczny, przygotowuje dzieci 6-letnie do dodawania liczb. Analogicznie odejmując od pewnego zbioru jego podzbiór-,

czyli przeliczając elementy zbioru, a następnie odejmowanego podzbioru i pozostałej różnicy – dzieci 6-letnie praktycznie dokonują operacji odejmowania liczb” (Fiedler, 1977, s.11-12; także Morawska, 1985).

Czynnościowo-poglądowe kształtowanie umiejętności dodawania i odejmowania, a więc rozdawania i rozdzielania po kilka jest kontynuacją tego, czego dzieci nauczyły się licząc i ustalając, gdzie jest więcej, a gdzie mniej (Fiedler, 1977). Umiejętność dodawania i odejmowania podobnie jak ustalanie równoliczności musi być kształtowana już u dzieci we wczesnej fazie wieku przedszkolnego.

W rozwoju umiejętności wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania E. Gruszczyk-Kolczyńska (1992) wyróżnia trzy etapy.

W pierwszym obserwuje się zainteresowanie dziecka zmianą spowodowaną dodawaniem lub odejmowaniem oraz dążenie do ustalenia, jak jest po tej zmianie. Etap drugi rozpoczyna się, gdy dziecko dostrzega, że dodawanie to łączenie, dokładanie, a odejmowanie – to zabieranie, odkładanie. Zaczyna więc rozumieć, iż po dodawaniu zwiększa się liczba elementów, a po odejmowaniu – zmniejsza się. (Kamińska, 2012). Młodsze przedszkolaki, gdy widzą, że ktoś dołożył, dosunął, dorzucił obiekty, stwierdzają: Dużo! Jeżeli zaś ktoś odjął, odłożył, odsunął, wyjął obiekty, wołają: Mało! Oceniają „na oko”, widzą, że czegoś przybyło, ubyło, jest więcej czy mniej (Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2009b).

Wraz z rozwojem umiejętności liczenia dzieciom przestaje wystarczać do rachowania ocena „na oko”. Po każdej zmianie typu dodać – odjąć chcą policzyć przedmioty, żeby ustalić, ile ich teraz jest. Gromadzą kolejne doświadczenia w liczeniu, liczą coraz bardziej precyzyjnie, lepiej też oceniają wynik dodawania i odejmowania.

Przez długi okres czasu dziecko liczy na palcach. U. Oszwa (2008a) przytacza badania prowadzone przez R. S. Sieglera i później kontynuowane przez D. C. Geary’ego wraz z M. K. Hoardem nad dziecięcymi strategiami dodawania i odejmowania, które dowiodły duże indywidualne zróżnicowanie w zakresie stopnia dojrzałości i zaawansowania oraz pozwoliły na uporządkowanie stosowanych przez dzieci sposobów dokonywania obliczeń. Wyodrębnia się zatem:

1. liczenie na palcach z kolejno pojawiającymi się strategiami:
 - tzw. strategia Sum (*counting –all*) liczenie od 1;
 - tzw. strategia Max – rozpoczynanie od mniejszego składnika i liczenie wszystkiego;

- tzw. strategia Min (*counting –on*) – liczenie od 5 wzwyż aż do uzyskania wartości drugiego składnika;

2. liczenie pamięciowe:

- wykorzystywanie faktów z pamięci długotrwałej (rozkład liczby);
- dekompozycje (za:Oszwa, 2008a; także Wood, 2006).

W uczeniu się rachowania ogromną rolę odgrywa zatem dodawanie i odejmowanie na palcach. Należy jednak rozróżnić:

- „liczenie palców – palce dziecko liczy tak, jak wszystkie inne obiekty, prostuje je przy dodawaniu, zgina przy odejmowaniu i każdy palec określa liczebnikiem,
- liczenie na palcach – palce traktowane są jako coś, co zastępuje obiekty, których dziecko na przykład nie widzi” (Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2004, s.245).

Liczenie na palcach jest w rozwoju umysłowym dziecka dużym osiągnięciem. Jest początkiem przejścia z poziomu konkretnego do umownego. Pozwala przyjaźnie przejść z dodawania i odejmowania na konkretach na poziom symbolicznego, umownego rachowania w pamięci. Najpierw dziecko musi zrozumieć, że różne przedmioty można zastępować palcami na zasadzie jeden palec- jeden przedmiot. Potem musi zrozumieć, że „wystarczy wykonać dodawanie (prostowanie palców) lub odejmowanie (zginanie palców) i policzyć palce po takich czynnościach”(Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2009b, s.137).

Wnikliwej analizy strategii liczenia na palcach wynikających ze zmian rozwojowych w dziecięcym rozumieniu pojęć liczb dokonuje D. Wood (2006), pisząc o wyliczaniu, odliczaniu, liczeniu „w górę i w dół” oraz o strategii MIN (minimalnej).

E. Gruszczyk-Kolczyńska (1992) natomiast podaje ciekawe przykłady, jak dzieci radzą sobie z ograniczeniami wynikającymi z liczby palców. Zamiast nich rysują kreski lub inne znaki, a potem dorysowują lub skreślają odpowiednią ich liczbę i przeliczają je. Autorka wskazuje przy tym, iż posługiwanie się kreskami przy liczeniu przypomina metodę karbowania, którą stosowali ludzie od początku cywilizacji.

Ważnym progiem, który przekracza dziecko jest umiejętność globalnego postrzegania liczby przedmiotów, dzięki czemu dochodzi do przekonania „żeby wiedzieć, ile jest, wystarczy doliczyć lub odliczyć (Gruszczyk-Kolczyńska, 1992, s.41). Zamiast dążyć do przeliczania wszystkich obiektów (palców), dziecko zaczyna tylko doliczać te dodawane lub odliczać odejmowane.

Trzecim, ostatnim etapem jest liczenie w pamięci lub liczenie w głowie bez konieczności manipulowania konkretem (Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2004). Dziecko nie musi już liczyć przedmiotów ani zbiorów zastępczych.

Jednakże proces nabywania umiejętności wykonywania rachunku pamięciowego trwa długo i jest bardzo złożony. A. Jacewicz podkreśla, że nie można w nim pominąć żadnego wcześniejszego stadium, czyli rachowania konkretów oraz liczenia na palcach i dodaje „im więcej ćwiczeń, tym sukces pamięciowego liczenia jest bliższy” (Jacewicz, 2007, s.183). Do rachowania na zbiorach zastępczych czy konkretach dziecko powraca, gdy musi dodać lub odjąć większe liczby.

Z. Morawska (1985) podejmuje jeszcze problem symbolicznego zapisywania działań matematycznych. Autorka uważa, że „ćwiczenia ze znakami „+” i „-” powinny stanowić ostatni i etap pracy dziecka przedszkolnego, tuż przed pójściem do szkoły i musi być ich stosunkowo niewiele. (...) A w klasie pierwszej nabierze sensu formuła $4 + 3 = 7$ oderwana od konkretnej sytuacji” (Morawska, 1985, s.418; także Kamińska, 2012).

2.3. Ustalanie przez dzieci równoliczności dwóch zbiorów; posługiwanie się liczebnikami porządkowymi

Ustalenie równoliczności lub odpowiedniości wzajemnie jednoznacznej związane jest z kardynalnym aspektem liczby naturalnej (Fiedler, 1977, Wilgocka-Okoń, 1972).

W edukacji matematycznej przedszkolaków wiele uwagi poświęca się właśnie ustalaniu równoliczności. Poznanie tej relacji doprowadza dziecko do przyswojenia sobie pojęcia mocy zbioru.

Dziecku dla zrozumienia aspektu kardynalnego liczby naturalnej potrzebna jest umiejętność porównywania liczebności dwóch i więcej zbiorów oraz wnioskowania o stałości liczby elementów w zbiorze pomimo obserwowanych zmian w układzie tych elementów (stałość liczby).

H. Moroz (1982) wymienia kolejne stadia w rozwoju pojęć liczbowych u dzieci (podobnie Morawska, 1985). Najwcześniej dzieci dokonują ocen ilościowych na podstawie spostrzeżeń globalnych. Zbiór przedmiotów postrzegają jako całość, nie potrafią traktować go jako sumy pojedynczych elementów i nie badają równoliczności zbiorów. Z. Morawska (1985) nazywa to oceną liczebności „na oko”. W drugim

stadium dzieci, manipulując przedmiotami ustalają wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie jednego zbioru na drugi (ustawiają w pary elementy tych zbiorów). Jednak, gdy zmieni się położenie przestrzenne badanych zbiorów, dziecko ma wątpliwości, czy zbiory nadal są równoliczne (Piaget, Szemińska, 1952; Gruszczyk-Kolczyńska, 1989). Dla małych dzieci jest ważne to, co spostrzegają – przedmioty zajmują większą powierzchnię, czyli jest ich więc więcej (są większe, rozsunęte). Na potwierdzenie tych prawidłowości U. Oszwa (2008b) przytacza znany eksperyment J. Piageta, który dotyczył stałości ilości nieciągłych i polegał na układaniu żetonów w dwóch rzędach równolicznych z uwzględnieniem zasady przyporządkowywania jeden do jednego (też Gruszczyk-Kolczyńska, 1989,1992). Przy określaniu „więcej/mniej” dla dzieci ważniejsza jest wielkość powierzchni, jaką one zajmują, niż wynik liczenia (Fiedler, 1977, Moroz, 1982). W języku matematycznym oznacza to, że dziecko ma problemy z uznaniem zasady niezmienności liczebności zbioru, gdy elementy zbioru zmieniają swoje położenie (Fiedler, 1977; Wilgocka-Okoń, 1972). Dziecko kieruje się oceną jakościową, a nie ilościową.

Dopiero około szóstego roku życia powstaje pojęcie stałości ilości nieciągłych, które polega na decentracji od cechy nieistotnej i jednoczesnej koncentracji na tym, co istotne dla danej treści. Dziecko niezależnie od konfiguracji elementów zbiorów, potrafi ustalić, czy są one równoliczne. Do zrozumienia tzw. niezmienników dziecko dochodzi drogą manipulacji przedmiotami, drogą porównywania ich. W miarę gromadzenia doświadczeń związanych z manipulowaniem przedmiotami oraz liczeniem dziecko zaczyna doznawać konfliktu pomiędzy tym, co widzi a efektem liczenia. Dlatego wciąż się upewnia – przelicza, przedstawia obiekty. Kolejne doświadczenia z wielokrotnym przeliczaniem i obserwowaniem zmian w układzie przedmiotów powodują, że dziecko w końcu zaczyna rozumieć, że te zmiany w układzie obiektów nie mają wpływu na ich liczebność w porównywanych zbiorach (Fiedler, 1977; Moroz, 1982; Dominek i Pełka-Woszko, 2004; Kawczyńska, 2004).

Ustalanie równoliczności jest ściśle związane z rozwojem rozumowania operacyjnego na poziomie konkretnym, z czynnościami wykonywanymi bezpośrednio na przedmiotach (Burtowy, 1992a). E. Gruszczyk-Kolczyńska uważa, że uznawanie przez dziecko stałości ilości nieciągłych jest pierwszym przejawem pojawienia się w jego rozumowaniu operacji konkretnych. „Na tym poziomie rozumowania dziecko potrafi skupić się na samej czynności przyporządkowania i oderwać ją od cech

jakościowych przedmiotów, którymi manipuluje. Dlatego obserwowane zmiany, np. w układzie rozpatrywanych obiektów, nie mają wpływu na sąd dotyczący ilości. Dziecko jest także zdolne do przegrupowania w wyobraźni przedmiotów i tym samym łatwiej mu je porównywać, porządkować lub przyporządkować” (Gruszczyk-Kolczyńska, 1989, s.55; także Kawczyńska, 2004). Potrafi skupić się na dwóch zbiorach jednocześnie i porównać ich liczebność, abstrahując od koloru, wielkości i ułożenia.

M. Fiedler (1983) zaznacza, że bardzo ważną rolę w kształtowaniu pojęcia równoliczności odgrywają doświadczenia własne dziecka, zwłaszcza, gdy porównywane dwa zbiory równoliczne różnią się jakością elementów, ich układem lub zajmowaną powierzchnią. Podobne stanowisko zajmują R. Dominek i A. Pełka-Woszko stwierdzając jednoznacznie, że „pojęcia stałości nie można dziecka nauczyć! Pojęcie stałości jest pojęciem operacyjnym (czynnościowym). Dziecko może je przyswoić jedynie w działaniu” (Dominek i Pełka-Woszko, 2004, s.27).

Liczebność zbiorów można porównać stosując dwie metody:

- poprzez przeliczenie elementów każdego zbioru i porównanie liczebników określających liczebność obu zbiorów;
- poprzez ustawienie obiektów w pary tak, aby na tej podstawie ustalić: tu i tu jest tyle samo, tu jest więcej (Fiedler, 1977; Gruszczyk-Kolczyńska, 1992; Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2004; Kawczyńska, 2004; Oszwa, 2008b; Kamińska, 2012).

Stosując pierwszy sposób, który E. Gruszczyk-Kolczyńska (1992) ocenia jako mniej dojrzały, dzieci nie mogą mieć wątpliwości, co do tego, że ostatni z wymienianych liczebników określa liczebność każdego rozpatrywanego zbioru. Muszą zapamiętać ostatnie wymieniane liczebniki, a potem – już bez liczenia – porównać je, zdecydować: w porównywanych zbiorach jest tyle samo elementów lub w jednym jest ich więcej, a w drugim mniej.

Przy ustalaniu równoliczności poprzez ustawianie w pary dzieci muszą być przekonane, że zmiana układu elementów (przesunięcie ich, położenie jednego na drugim itp.) nie ma wpływu na ich liczebność (Oszwa, 2008b). Ponadto dziecko musi umieć skupić uwagę na dwóch zbiorach jednocześnie, znać sposób układania w pary i konsekwentnie go stosować (każdemu elementowi jednego zbioru przyporządkowywać dokładnie jeden element drugiego zbioru). I chociaż taka metoda porównywania liczebności zbiorów nie wymaga umiejętności liczenia, to koniecznymi

są spore kompetencje dziecka, które musi prawidłowo zinterioryzować czynność przyporządkowywania.

W wyniku takiego sposobu porównywania kształtuje się obok pojęcia zbiorów równolicznych także pojęcie zbiorów nierównolicznych wyrażanych słownie „jest mniej niż”, „jest więcej niż” (Fiedler, 1977).

E. Gruszczyk-Kolczyńska na podstawie własnych badań podkreśla, że dzieci preferowały przeliczanie elementów, a „zbyt rzadko stosowały w życiu układanie w pary, aby swobodnie posługiwać się tą metodą” (Gruszczyk-Kolczyńska, 1992, s.33).

Dzieci w późnej fazie wieku przedszkolnego mają jeszcze kłopoty z ustalaniem równoliczności oraz określaniem, w którym zbiorze jest więcej. J. Piaget uważa, że dopiero dziecko 7-letnie może prawidłowo określać w różnych sytuacjach równoliczność dwóch zbiorów (za: Burtowy, 1992a). Trudności wielu dzieci w określaniu stosunków ilościowych potwierdzają także badania H. Moroza (1982) oraz A. Białej (za: Burtowy, 1992a).

Ustalanie równoliczności zbiorów, a przez to zrozumienie procesu liczenia wiąże się ze zrozumieniem znaczenia liczby porządkowej (Fiedler, 1977). H. Siwek twierdzi, że „w aspekcie porządkowym zwracamy uwagę na to, który z kolei element danego zbioru jest w danej chwili rozpatrywany. Ustawiając w szeregu przedmioty, porządkując je i numerując, dziecko odpowiada na pytanie: Który z kolei?” (Siwek, 2005, s.24).

A. Szemińska wskazuje jednoznacznie „prawidłowe ukształtowanie pojęcie liczby wymaga (...) rozumienia związku między liczbą (określającą liczebność zbioru) a jej miejscem w uporządkowanym ciągu liczb. Dlatego liczebniki kardynalne i porządkowe powinny kształtować się u dziecka jednocześnie” (Szemińska, 1981, s.177).

Do pojęcia aspektu porządkowego liczby naturalnej niezbędne jest rozumowanie operacyjne na poziomie konkretnym, które pozwala dzieciom porządkować elementy w serie według określonej narastającej lub malejącej cechy oraz określać miejsce danego elementu w takiej serii. Taki sposób rozumowania kształtuje się powoli, począwszy od narodzin dziecka, a być może nawet wcześniej (Gruszczyk-Kolczyńska, 2009b). Dziecięce rozumowanie podąża za manipulacją; wykonywane czynności i rozumowanie wzajemnie się przeplatają: „to zamysł wyznacza przebieg czynności, to znów czynność wyprzedza rozumowanie” (Gruszczyk-Kolczyńska, 2009b, s.242).

Przechodzenie z poziomu manipulowania przedmiotami na poziom rozumowania operacyjnego jest możliwe dzięki mechanizmowi interioryzacji (Gruszczyk-Kolczyńska, 2009b). Trwa dość długo, wymaga dużego wysiłku intelektualnego dziecka i zawsze bazuje na jego osobistych doświadczeniach.

Zdaniem M. Fiedler dziecko 6-letnie jest psychicznie gotowe do zrozumienia, że miejsce danej liczby w ciągu liczb naturalnych wyznacza liczebnik porządkowy (Fiedler, 1977).

Niestety praktyka szkolna pokazuje, że takie operacje sprawiają dużo kłopotów nie tylko dziecku przedszkolnemu, lecz także uczniom niższych klas szkoły podstawowej.

M. Burtowy podaje: „dzieci budujące schody z klocków, potrafią przeliczyć stopnie, posługując się liczebnikami porządkowymi. Natomiast wyjaśnienie, że będąc na czwartym schodku lalka przeszła trzy schodki, a będąc na szóstym pięć itp. sprawia dzieciom trudność” (Burtowy, 1992a, s.243, też Szemińska, 1981).

Dlatego tak ważne jest, aby nauczyciel w przedszkolu organizował dzieciom doświadczenia w ustawianiu obiektów w rzędzie lub szeregu, numerowaniu ich, określaniu miejsca wybranego obiektu w tak uporządkowanych szeregach. Wiele przykładów takich ćwiczeń z dziećmi przedszkolnymi podaje M. Fiedler (1977) oraz M. Skura, która uważa wręcz, że aspekt porządkowy liczby to „punkt wyjścia do tworzenia w umysłach dzieci syntezy ważniejszych aspektów liczby naturalnej, w następnej kolejności łączymy go z aspektem kardynalnym, symbolicznym i arytmetycznym”(Skura, 2009, s.257).

2.4. Rozróżnianie przez dzieci lewej i prawej strony, określanie kierunków i ustalanie położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów

Dzieci w wieku przedszkolnym często bywają świadkami sytuacji społecznych, w których pojawia się konieczność liczenia.

Jednak to nie na monografii liczb pierwszej dziesiątki (wraz z liczbą zero) i na działaniach arytmetycznych powinna koncentrować się edukacja matematyczna prowadzona w przedszkolu, lecz na poznawaniu przez dziecko relacji przestrzennych (zob. Burtowy, 1992a, Kamińska 2012). Orientacja w przestrzeni jest warunkiem dobrego funkcjonowania człowieka w otaczającej rzeczywistości. Jest to także

umiejętność wymagana w szkole, na każdej lekcji, nie tylko matematyki. Ponadto, jak zauważa M. Burtowy (1992a) doświadczenia, w których dziecko obserwuje wzajemnie zmieniające się relacje przestrzenne między przedmiotami prowadzą do zrozumienia stosunków jakościowych. Te z kolei są podstawą do zrozumienia stosunków ilościowych.

A. Szemińska zwraca uwagę, że „spowodowanie zainteresowania dziecka stosunkami wielkości powinno stanowić punkt wyjścia kształtowania pojęcia liczby oraz działań na liczbach” (Szemińska, 1972 s.58).

Z tych względów jednym z celów wychowania przedszkolnego, a potem nauczania w klasie pierwszej, jest troska o kształtowanie orientacji przestrzennej (Gruszczyk-Kolczyńska, 1992). Wzrasta ona w powiązaniu z samodzielnością dziecka i wraz z różnorodnością i złożonością jego otoczenia. M. Burtowy dodaje, że kształtowanie pojęć matematycznych u dzieci należy rozpoczynać od ćwiczeń orientacyjnych w najbliższym otoczeniu. Prowadzi to zdaniem autorki do „coraz dokładniejszego określania położenia przedmiotów w przestrzeni, orientowania się w kierunku ich ruchów, rozumienia związków między układem i zmianą położenia przedmiotów” (Burtowy, 1992a, s.232).

Mimo sporej już wiedzy o rozwoju człowieka mało wiadomo o tym, jak dziecko uczy się poznawać przestrzeń. E. Gruszczyk-Kolczyńska przytacza badania N. C. Kepharta, A. Szemińskiej, M. Kielar-Turskiej, J. Piageta, B. Inheldera czy Tuan Yi- Fu (Gruszczyk-Kolczyńska, 1992).

J. Hanisz twierdzi, że „dziecko zaraz po urodzeniu nie zna przestrzeni. Niemowlę w zasadzie leży nieruchomo.(...) Jego wizualna przestrzeń nie ma w zasadzie ani struktury, ani trwałości”(Hanisz, 2006, s.56). Autorka w procesie nabywania przez dziecko orientacji przestrzennej wyróżnia dwa etapy:

- etap spontanicznego nabywania sprawności przestrzennej,
- etap ukierunkowanego nabywania sprawności i wiedzy o przestrzeni, który przebiega z pomocą rodziców i nauczycieli (za: Hanisz, 2006).

Również E. Gruszczyk-Kolczyńska (1989, 1992, 2012a) zauważa, że kształtowanie orientacji przestrzennej to złożony proces, który trwa kilka lat i można w nim wyróżnić następujące prawidłowości rozwojowe:

- a. orientacja przestrzenna wywodzi z poczucia własnego „ja” oraz ze świadomości schematu własnego ciała;

b. najwcześniej dziecko uczy się określać kierunki i położenie przedmiotów w stosunku do własnego ciała;

c. kolejny krok to zdolność do różnicowania i określania kierunków oraz położenia przedmiotów w stosunku do drugiej osoby, czyli przyjmowanie punktu widzenia drugiej osoby;

d. wdrażanie dziecka do coraz bardziej precyzyjnego określania tego, co się znajduje i dzieje w otoczeniu, porównywanie własnych spostrzeżeń przestrzennych z tym, co widzi druga osoba;

e. w kolejnej fazie dziecko opanowuje umiejętność ustalania położenia jednych obiektów względem drugih i wyznaczać kierunek „od” lub „do” wybranego przedmiotu;

f. efekt końcowy to orientowanie się na kartce papieru (także Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 1997; Gruszczyk-Kolczyńska, 2012b).

Świadomość własnego „ja” oraz orientacja przestrzenna kształtują się w umyśle dziecka przez cały okres życia. To, jaką świadomość własnego „ja” posiada dziecko oraz jak orientuje się w otoczeniu, zależy od jego indywidualnych zdolności, a także od tego, czy miało okazję, by te umiejętności rozwinąć. Dlatego w grupach przedszkolnych występują duże różnice w kompetencjach przestrzennych dzieci. Można je łatwo zaobserwować, gdy nauczyciel prosi, np., aby dzieci ustawiły się po jego prawej stronie. Badania E. Gruszczyk-Kolczyńskiej wskazują, że „jedne dzieci doskonale rozumieją i ustawiają się tak jak trzeba, inne są tak zagubione, że nauczyciel musi podejść i ustawić dziecko we właściwym miejscu” (Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 1997, s.79).

Wśród dzieci w młodszym wieku przedszkolnym są takie, które mają już ukształtowaną świadomość własnego „ja”, lecz są też takie, które mają kłopot z rozpoznaniem i zaakceptowaniem swojego lustrzanego wizerunku. Jednakże pod koniec wieku przedszkolnego dziecko powinno być przekonane o swej indywidualności, mieć poczucie przynależności do rodziny oraz umieć nazwać części swego ciała. Dzięki świadomości własnego „ja” dziecko może postrzegać otoczenie z własnego punktu widzenia.

E. Gruszczyk-Kolczyńska (1992, 2012b) uważa, że należy rozwijać takie umiejętności jak:

- wyznaczanie kierunków od osi własnego ciała (w przód – przed siebie, w tył – za siebie, w górę – nad głowę, w dół – pod nogami itp.),
- porozumiewanie się z innymi, co do położenia obiektów względem siebie.

Ważnym etapem kształtowania się dziecięcych kompetencji jest poznawanie schematu ciała drugiej osoby oraz rozwijanie zdolności do przyjmowania jej punktu widzenia. Uwarunkowane jest to stopniowym przechodzeniem od dziecięcego egocentryzmu do decentracji, która przejawia się w rozwoju intelektualnym, emocjonalnym i społecznym dzieci (Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 1997; także Morawska, 1985; Burtowy 1992a; Kamińska 2012). Dzięki niej dziecko nabywa umiejętności postrzegania świata oczami drugiej osoby. Powoli uświadamia sobie, że drugi człowiek jest podobny do niego. Również M. Przetacznikowa uważa, że „ważnym czynnikiem orientacji przestrzennej jest, tzw. obiektywizacja stosunków przestrzennych przez dziecko. Polega ona na zmianie układu odniesienia, którym początkowo jest samo dziecko, na taki układ, w którym dziecko potrafi określić stosunek między przedmiotami na podstawie położenia niektórych przedmiotów względem innych” (za: Moroz, 1982, s.27-28). Zgodnie z tymi założeniami J. Hanisz (2006) proponuje ćwiczenia ruchowe, w których dzieci stoją parami zwrócone do siebie twarzami i jednocześnie pokazują określony kierunek np. „do przodu”, „w lewo”, „w prawo”. W czasie takich zajęć dzieci przekonują się, że każde z pary idzie w inną stronę, mimo, że wykonują te same polecenia.

Wzrastająca obiektywizacja pojęć i stosunków przestrzennych jest uwarunkowana doświadczeniem motorycznym i sensorycznym dziecka, a także rozwojem intelektualnym.

W okresie wychowania przedszkolnego istotna jest pomoc dziecku w uświadomieniu sobie, że druga osoba jest pod wieloma względami podobna do niego. Jednakże nie wszystko jest takie proste i oczywiste. Są sytuacje, w których druga osoba widzi otaczającą przestrzeń dokładnie tak, jak dziecko. Wystarczy jednak, że jedna z nich się odwróci i już widzą coś innego. Porozumiewanie się wymaga teraz wysiłku intelektualnego, w tym praktycznego rozumienia efektu przesunięcia i obrotu. Zrozumienie tego jest dla dziecka bardzo trudne i należy mu w tym pomóc. Dzieci w później fazie wieku przedszkolnego mają:

a. „poznać schemat ciała drugiej osoby, punktem odniesienia jest świadomość własnego schematu ciała i badawcze przyglądanie się drugiej osobie, pozwala to uświadomić dziecku, w czym inni są podobni, a czym się różnią;

b. wyprowadzać kierunki od drugiej osoby, w taki sposób jak to wcześniej czyniły w stosunku do siebie, w ten sposób uczą się rozpatrywać otoczenie tak, jak je widzi druga osoba;

c. przez dłuższy czas obdarzać uwagą drugą osobę i umieć porozumiewać się z nią tak, aby ona wszystko zrozumiała (komunikaty werbalne i niewerbalne)” (Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2004, s.88).

Dzieci, które kończą edukację przedszkolną powinny także posiadać umiejętność orientacji na kartce papieru, która jest niezbędna w nauce pisania, czytania oraz rozwiązywania zadań matematycznych. Jednakże, jak zauważa K. Kamińska „dziecko przedszkolne żyje w przestrzeni trójwymiarowej, tak ją widzi, w takiej się przemieszcza, takiej doświadcza. Przejście z tej przestrzeni na płaszczyznę tablicy czy kartki nie jest łatwe, wymaga wielu operacji w wyobraźni: zmniejszania, spłaszczania, zniekształcania, przesuwania, obracania” (Kamińska, 2012, s.10). W tym trudnym dla dziecka procesie E. Gruszczyk-Kolczyńska zaleca realizowanie kolejno następujących etapów:

„a) odwzorowywanie schematu własnego ciała na kartce papieru i wprowadzanie umów: „góra”, „dół”, „lewy brzeg”, „prawy brzeg”, „górne rogi” (lewy i prawy) i „dolne rogi” (lewy i prawy) kartki;

b) porozumiewanie się w sprawie miejsca na kartce papieru: „Rysuj od tego miejsca, narysuj na dole, u góry, w lewym górnym rogu itp.”;

c) umieszczanie informacji na kartce zgodnie z poleceniem i odczytywanie informacji zapisanych lub narysowanych na obrazkach, schematach, grafach itp.” (Gruszczyk-Kolczyńska, 2012b, s.151-152).

Ponadto autorka w procesie rozwijania orientacji przestrzennej dziecka uzdolnionego matematycznie zaleca również zapoznavanie go ze sposobem wykonywania prostych, schematycznych rysunków pomieszczeń oraz z odczytywaniem planu i mapy, co wyraźnie przyczynia się do dynamizacji możliwości umysłowych.

Odrębnym problemem jest – uwarunkowana rozwojem lateralizacji - zdolność do rozróżniania lewej i prawej strony. E. Gruszczyk-Kolczyńska podaje, że praworęczność zaczyna się ustalać około 2-3 roku życia, a leworęczność nieco później,

bo – około 3-4 roku życia. Autorka zauważa jednak, że „dominacja czynności manualnych ustala się u większości dzieci dopiero około 6. roku życia, a proces lateralizacji zostaje zakończony w końcu młodszego wieku szkolnego”(Gruszczyk-Kolczyńska, 1992, s.234). Dlatego należy wspierać dziecko najpierw w procesie zorientowania się w schemacie własnego ciała, a następnie w rozwoju dominacji stronnej.

Autorka zwraca również uwagę na kilka nieporozumień w kształtowaniu orientacji przestrzennej (nadmierny werbalizm, wykorzystanie obrazków na początku procesu) i podaje konkretne scenariusze zajęć sprawdzonych w przedszkolu, na zajęciach z dziećmi sześciolletnimi. Podobne obawy wyraża K. Kamińska zauważając, że dzieci w wieku przedszkolnym „mają trudności z prawidłowym nadawaniem i odbiorem komunikatów dotyczących relacji przestrzennych. Autorka wyjaśnia dalej: „Określenia przestrzenne w dużej mierze to przede wszystkim przyimki lub wyrażenia przyimkowe, które w mowie dziecka pojawiają się stosunkowo późno. Z tego powodu dzieci zdecydowanie szybciej odbierają i poprawnie odczytują znaczenie określeń przestrzennych zawartych w skierowanych do nich komunikatach oraz właściwie interpretują ich treść, niż same stają się autorami takich komunikatów” (Kamińska, 2012, s.8). W tej sytuacji J. Hanisz wskazuje skuteczniejsze rozwiązanie twierdząc, że „ruch na świeżym powietrzu, spacer, wycieczki stanowią doskonałą okazję do określania kierunku ruchu, do utrwalania wyrażenia określających kierunek” (Hanis, 2006, s.57).

2.5. Orientacja dziecka w zakresie pomiaru długości oraz znajomość prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą

Mierzenie długości jest ważną umiejętnością życiową. W szkole zazwyczaj poświęca się jej zbyt mało czasu. Ponadto „nauczyciele rzadko zdają sobie sprawę z tego, że rozumienie aspektu miarowego liczby jest szczególnie trudne” (Skura, 2009, s.255).

E. Gruszczyk-Kolczyńska i E. Zielińska (2009d) wyjaśniają przyczyny trudności, jakich doświadczają małe dzieci przy pomiarze długości. Przede wszystkim wynikają one z niskiej jeszcze umiejętności rozumowania operacyjnego na poziomie konkretnym oraz słabej orientacji w jednostkach długości i dziesiętkowym układzie pozycyjnym oraz liczbach mianowanych (także Skura, 2009).

Na lekcjach uczniowie mają za mało okazji do samodzielnego wykonania pomiarów. Za najważniejsze uznaje się zapoznavanie uczniów z jednostkami miar. Szybko przechodzi się do rozwiązywania zadań tekstowych, które dotyczą mierzenia. Jest to trudne dla dzieci, które nie rozumieją sensu pomiaru. Dlatego trzeba je wcześniej przygotować do mierzenia długości.

Rozumienie sensu pomiaru wymaga od dziecka rozumowania operacyjnego w zakresie zachowania stałości długości (Kawczyńska, 2004). Jest ono podstawą do rozwoju pojęć geometrycznych oraz opanowania umiejętności mierzenia długości. Metodocy edukacji wczesnoszkolnej wskazują, że dzieci stosunkowo wcześnie rozumują operacyjnie w zakresie stałości długości. Natomiast z analizy rozwoju umysłowego siedmiolatków wynika, że tylko, co drugie dziecko rozumuje operacyjnie w zakresie pomiaru długości, a dopiero w ósmym roku życia większość dzieci wnioskuje o stałości długości (Skura, 2009; także Gruszczyk-Kolczyńska, 1989; Kawczyńska, 2004).

W podręcznikach z psychologii rozwojowej mało jest wiadomości, które wyjaśniają, jak w umysłach dzieci w wieku przedszkolnym kształtuje się rozumienie długości. Informacje o tym, jak dziecko dochodzi do operacyjnego rozumowania w zakresie długości podają J. Piaget i współpracownicy (za: Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2009d). Są one jednak dość ogólnikowe i skrótowe, a dziecięce rozumienie długości i jej pomiaru to problem bardzo złożony. Świadczy o tym wielość słownych określeń, których używają dzieci chcąc określić długość. „Mówią na przykład:

- niski, wysoki, a gestem ręki pokazują, że chodzi o długość,
- daleko lub blisko i pokazują, że chodzi im o odległość poczynając od siebie,
- duży, mały, większy, mniejszy, mając na myśli wzrost na przykład pluszowych misiów,
- krótki, długi i mają na myśli jedynie coś cienkiego, na przykład sznurek, patyk” (Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2004, s.256).

Wynika to z tego, że dzieci rozpatrują długość jako cechę obiektu lub przestrzeni, której nie postrzegają jeszcze jako coś odrębnego. Dodatkową trudnością jest subiektywna ocena długości przebytej drogi. Z ustaleń J. Piageta wynika, że w rozumowaniu dzieci stałość przedmiotów jest związana z nadawaniem im stałego kształtu, a w konsekwencji i stałej wielkości, w tym także długości (za: Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2004, 2009d). Ważną rolę odgrywa w tym zakresie koordynacja percepcji wzrokowej

z umiejętnością chwytania przedmiotów i poznawaniem dotykowym. Wygląd przedmiotów, ich wielkość zmienia się bowiem w zależności od tego, jak dziecko na nie patrzy i z jakiej odległości.

Z kolei doświadczenia dotykowe dostarczają dziecku informacji o tym, że przedmiot pozostaje taki sam, niezależnie od tego, pod jakim kątem się na niego patrzy i z jakiej odległości.

E. Gruszczyk-Kolczyńska i E. Zielińska zwracają uwagę na jeszcze jedną trudność, jaką przeżywają dzieci w mierzeniu długości- „ (...) pojawiają się kłopoty z oceną długości: odtąd (początek) – dotąd (koniec), przebytej drogi między tymi punktami (może mieć ona przecież kształt prostej, łamanej, łuku) (Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2009d, s.352, także Szemińska, 1981).

Dopiero, kiedy dziecko zacznie rozumować na poziomie operacji konkretnych będzie mogło zrozumieć sens pomiaru długości i nauczyć się ją mierzyć.

Rozwijanie umiejętności mierzenia długości trzeba realizować na zasadzie stopniowych przybliżeń. A. Szemińska (1981) zauważa, że dzieci chętnie wykonują zadania z „mierzeniem”, jeśli nie są one dla nich za trudne. Pierwszym etapem jest tzw. mierzenie bezpośrednie przez nakładanie lub przekładanie. Najłatwiejsze dla dzieci jest porównywanie długości przedmiotów sztywnych, takich jak deseczki czy paski kartonu poprzez nałożenie obydwóch porównywanych przedmiotów. Zdecydowanie trudniejsze pod względem technicznym jest porównywanie przedmiotów wiotkich np. sznurki, tasiemki. Natomiast najwięcej kłopotów sprawia dzieciom porównywanie wysokości, kiedy nie można nałożyć jednego przedmiotu na drugi. Kolejnym etapem jest mierzenie pośrednie za pomocą wspólnej miary. Należy zacząć od doświadczeń w odmierzaniu krokami, stopą za stopą, łokciem, dłonią czy palcami. Później dzieci mierzą długość klockiem lub sznurkiem. Ważnym momentem jest uświadamianie sobie przez dziecko stałości pomiaru np. długość sznurka nie zmieni się, gdy zwiniemy go w kłębek lub zawiążemy w kokardę (Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2009d; też Szemińska, 1981).

Gdy dziecko jest przekonane o stałości pomiaru można zapoznać go z narzędziami do pomiaru i stymulować do mierzenia oraz zapisywania wyników pomiaru (Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2009d).

2.6. Znajomość przez dzieci stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku

W procesie kształtowania pojęć matematycznych w wieku przedszkolnym bardzo ważne jest zapoznanie dzieci z pojęciem czasu (Burtowy, 1992a). Rozwija się ono w ścisłym związku z pojęciami przestrzennymi, na bazie spostrzegania przemieszczania się przedmiotów w przestrzeni. H. Moroz uważa, że poczucie czasu jest pojęciem złożonym i trudnym dla małego dziecka. „Ocena długości trwania czasu, szybkości jego upływu i następstwa czasowego wymaga nie tylko przyswojenia sobie zbioru odpowiednich słów (*dzisiaj, wczoraj, jutro*), lecz również znajomości miar czasu (*godzina, miesiąc, rok*), a ta z kolei jest warunkowana znajomością pojęć liczbowych” (Moroz, 1982, s.30).

Również U. Osza (2006) zaznacza, że ten aspekt edukacji matematycznej rozwija się najpóźniej w stosunku do pozostałych zagadnień matematycznych. E. Gruszczyk-Kolczyńska podaje, że „dzieci zaczynają rozumować operacyjnie odnośnie do czasu dopiero około dziesiątego roku życia” (Gruszczyk-Kolczyńska, 2009a, s.437). Podobnie H. Białółcka i współpracownicy (za: Krzysztozek, 1975) uważają, że pojęcie czasu jako czynnika organizującego stosunki między wydarzeniami jest dla małego dziecka bardzo trudne i zalecają wprowadzanie go w odniesieniu do czasu trwania konkretnej czynności (także Moroz, 1982, Fiedler, 1983).

Rozwój umysłowy jest podstawą kształtowania zdolności do postrzegania regularności i posługiwania się nią. Rytm pozwala uświadomić dziecku rytmiczną, periodyczną organizację czasu. Trudno określić moment, w którym dziecko zaczyna odczuwać rytm. „Okazuje się, że w ostatnich miesiącach przed urodzeniem umysł dziecka jest na tyle dojrzały, że potrafi rejestrować pewne doznania. Dziecko żyje wówczas w środowisku wypełnionym:

- rytmem bicia matczynego serca,
- rytmem kołysania jej kroków,
- rytmem oddychania (Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2004, s.131).

Rytm określa sposób uczenia się zarówno dzieci, jak i dorosłych. Najwcześniej u człowieka rozwija się zdolność do postrzegania tego, co się powtarza. Umysł rejestruje to, co powtarza się jak najczęściej i jak najbardziej regularnie. Natomiast, aby zapamiętać coś jednostkowego potrzebny jest silny, szokujący impuls. Szczególną rolę

rytmów w liczeniu wykorzystują waldorfskie metody nauczania matematyki, nazywając to nieco żartobliwie „liczeniem rytmologicznym” (Schuberth, 2013, s.29).

W ujęciu J. S. Brunera (za: Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 2004) dziecko w swoim otoczeniu rozpoznaje powtarzające się prawidłowości oraz reaguje na nie za pośrednictwem swojego działania poprzez wyobraźnię oraz wycinkową organizację spostrzegania, a także językowo; kodując je i dekodując. Aby dziecko mogło uzyskać harmonię między swoim działaniem a obrazowym przedstawieniem zdarzeń musi nauczyć się przekładać dostrzeżone prawidłowości z jednego systemu reprezentacji na drugi: z enaktywnej (manipulowanie i działanie) na ikonyczną (wyobrażenia) oraz odwrotnie.

Na tej podstawie tworzy się trzecie narzędzie poznania, czyli reprezentacja symboliczna: słowa i symbole.

Zdolność do dostrzegania regularności jest wzmocniona przez takie czynniki, jak: przemienność dnia i nocy czy następstwo pór roku. Rytm przejawia się w wielu formach aktywności człowieka. Nawet język, którym się posługujemy na co dzień ma określony rytm i melodię. Matematyka także wypełniona jest rytmem, a liczenie wywodzi się z rytmów wskazywania obiektów.

Orientacja w czasie dziecka w wieku przedszkolnym wyraża się intuicyjną znajomością jednostek czasu oraz narzędzi do jego pomiaru, a także świadomością periodyzacji i cykliczności życia w formie pór dnia, dni tygodnia, pór roku, miesięcy. M. Burtowy (1992a) zwraca również uwagę, że poczucie czasu u dzieci w wieku przedszkolnym ma charakter subiektywny - szybko upływa czas wypełniony atrakcyjnym działaniem, a oczekiwanie na pójście do domu trwa bardzo długo (także Gruszczyk-Kolczyńska, 2009a). Dzieci zauważają przemijanie czasu na podstawie własnych obserwacji zjawisk i czynności, które najczęściej są związane z porządkiem dnia. Z badań H. Moroza wynika, że dzieci w tym wieku najlepiej znają czas teraźniejszy i przyszły, a najwięcej trudności sprawia im czas przeszły. Autor wyjaśnia, że „dziecko w tej fazie rozwojowej przeżywa trzy momenty czasowe: początek - rozwijanie się – zakończenie czynności lub zjawiska. Dzieci przypominają sobie fakty, zdarzenia z przeszłości, ale nie potrafią jeszcze określić miary czasu” (Moroz, 1982, s.31).

Znajomość pór doby (dzień, noc), pór dnia (rano, południe, wieczór) oraz kolejnych pór roku jest dowodem na posiadanie przez dziecko wiedzy o czasie, jego jednostkach i następstwach.

Analizując kompetencje matematyczne dziecka kończącego edukację przedszkolną należy jednak pamiętać o zaburzeniach rytmu i tempa rozwoju.

Z badań J.S. Brunera jasno wynika, że „ istnieją dwie krańcowo zróżnicowane i odległe od siebie grupy dzieci, liczebnie bardzo duże, obejmujące bowiem 20-25% populacji. Różnią się one między sobą trzema, czterema, a nawet sześcioma latami ogólnego, zwłaszcza intelektualnego rozwoju” (Bruner, 1978, s.688). A zatem w grupie przedszkolnej są zarówno dzieci o przyspieszonym tempie rozwoju, dzieci zdolne, a obok nich, dzieci z zaburzeniami rozwojowymi, opóźnione i mniej sprawne. Wymaga to zróżnicowania oddziaływań dydaktyczno-wychowawczych, dostosowanych do indywidualnych możliwości i potrzeb każdego dziecka.

IV. Metodyczne podstawy pracy pedagogicznej w przedszkolu tradycyjnym i przedszkolu Montessori a kształtowanie kompetencji matematycznych dzieci

1. Założenia metodyczne pracy pedagogicznej z dziećmi w przedszkolu tradycyjnym

Wiek przedszkolny jest bardzo ważnym etapem w rozwoju dziecka. Coraz lepiej przystosowuje się ono do środowiska, zyskuje możliwości podejmowania nowych działań, rozwija się jego wyobraźnia i doskonali mowa, a także pojawiają się pierwsze uczucia i postawy społeczne. Jest to okres, w którym możliwości rozwojowe są największe, a optymalne warunki dla rozwijania umiejętności i nabywania nowych kompetencji zapewnia edukacja przedszkolna. Jednakże jej efekty - jak zauważa A. Klim-Klimaszewska zależą od „uwzględniania właściwości rozwojowych dziecka jako aktywnie działającego podmiotu wychowania” (Klim-Klimaszewska, 2011, s.109), gdyż dziecko „zbiera doświadczenia w sposób czynny – uczy się, doskonalić własne działania” (Karbowniczek, Kwaśniewska i Surma, 2013, s.215).

Efektywny i skuteczny przebieg edukacji przedszkolnej warunkują cele, zasady, metody i formy pracy pedagogicznej z dzieckiem.

Nadrzędną rolę w procesie dydaktyczno-wychowawczym pełnią cele, które właściwie dobrane i sformułowane „stanowią dodatni impuls i motywy działania oraz pomagają w koordynowaniu czynności realizacyjnych. Stanowią także płaszczyznę odniesienia dla kontroli i oceny osiągnięć podjętej działalności oraz wskazują kierunek zmian w procesie edukacji” (Karbowniczek, Kwaśniewska i Surma, 2013, s.224).

Zasadniczym celem edukacji przedszkolnej jest wspomaganie i stymulowanie rozwoju oraz edukacji dziecka zgodnie z jego indywidualnymi możliwościami i potrzebami, zmierzające do osiągnięcia gotowości do podjęcia nauki w szkole. Realizacja tego zadania - zgodnie z obowiązującą Podstawą Programową Wychowania Przedszkolnego odbywa się poprzez:

1. „Wspomaganie dzieci w rozwijaniu uzdolnień oraz kształtowanie czynności intelektualnych potrzebnych im w codziennych sytuacjach i w dalszej edukacji;
2. Budowanie systemu wartości, w tym wychowywanie dzieci tak, żeby lepiej orientowały się w tym, co jest dobre, a co złe;
3. Kształtowanie u dzieci odporności emocjonalnej koniecznej do racjonalnego radzenia sobie w nowych i trudnych sytuacjach, w tym także do łagodnego znoszenia stresów i porażek;

4. Rozwijanie umiejętności społecznych dzieci, które są niezbędne w poprawnych relacjach z dziećmi i dorosłymi;
5. Stwarzanie warunków sprzyjających wspólnej i zgodnej zabawie oraz nauce dzieci o zróżnicowanych możliwościach fizycznych i intelektualnych;
6. Troska o zdrowie dzieci i ich sprawność fizyczną; zachęcanie do uczestnictwa w zabawach i grach sportowych;
7. Budowanie dziecięcej wiedzy o świecie społecznym, przyrodniczym i technicznym oraz rozwijanie umiejętności prezentowania swoich przemyśleń w sposób zrozumiały dla innych;
8. Wprowadzenie dzieci w świat wartości estetycznych i rozwijanie umiejętności wypowiedzania się przez muzykę, małe formy teatralne oraz sztuki plastyczne;
9. Kształtowanie u dzieci poczucia przynależności społecznej (do rodziny, grupy rówieśniczej i wspólnoty narodowej) oraz postawy patriotycznej;
10. Zapewnienie dzieciom lepszych szans edukacyjnych poprzez wspieranie ich ciekawości, aktywności i samodzielności, a także kształtowanie tych wiadomości i umiejętności, które są ważne w edukacji szkolnej” (Karbowniczek, Kwaśniewska i Surma, 2013, s.227-228).

A zatem proces oddziaływania pedagogicznego w przedszkolu ma stymulować emocjonalny, społeczny i moralny rozwój dziecka, wspierać jego dążenia do poznawania i uczenia się, rozwijać umiejętności intelektualne i językowe oraz popierać zdrowy styl życia (zob. Karbowniczek, Kwaśniewska i Surma, 2013).

Prawidłowo prowadzona edukacja przedszkolna wymaga stosowania swoistych norm postępowania pedagogicznego, czyli zasad wychowania i kształcenia. W pracy pedagogicznej z dziećmi w wieku przedszkolnym najważniejsze znaczenie – zdaniem A. Klim-Klimaszewskiej (2011), mają następujące zasady: zaspokajania potrzeb dziecka, aktywności, indywidualizacji oraz organizowania życia społecznego dzieci i integracji.

Podstawowym warunkiem skuteczności pracy wychowawczej z małymi dziećmi jest zasada zaspokajania potrzeb dziecka. Najistotniejsze w wychowaniu przedszkolnym jest zabezpieczenie potrzeb psychiczno-emocjonalnych małego dziecka, takich jak potrzeba bezpieczeństwa, uznania, osiągnięć i miłości. J. Karbowniczek, M. Kwaśniewska i B. Surma podkreślają, że „działania zgodne z zasadą zaspokajania potrzeb wpływają na dobre samopoczucie fizyczne, psychiczne i społeczne

przedszkolaków, a więc i na ich zdrowie” (Karbowniczek, Kwaśniewska i Surma, 2013, s.288). Ponadto takie oddziaływania zapobiegają nieprawidłowościom w rozwoju dzieci oraz ułatwiają kompensowanie ewentualnych zaburzeń.

Zasada aktywności z kolei dotyczy pobudzania aktywności własnej dziecka, co powoduje, że jest ono czynnym, kreatywnym uczestnikiem procesu wychowania, współdziałającym z nauczycielem. Dzięki temu rozwijają się takie umiejętności jak twórcze działanie czy podejmowanie inicjatywy. M. Kwiatowska stwierdza jednoznacznie, że „aktywność dziecka stanowi warunek skuteczności wychowania w każdej dziedzinie, zarówno w sferze wychowania zdrowotnego, jak i społeczno-moralnego, umysłowego i estetycznego” (Kwiatowska, 1985, s.59). Stosując tę zasadę nauczyciel musi uwzględniać indywidualne potrzeby i zainteresowania dzieci, ich wcześniejsze doświadczenia, stosować metody aktywizujące oraz mobilizować do wysiłku, gdyż – jak zauważają J. Karbowniczek, M. Kwaśniewska i B. Surma „dziecko odczuwa potrzebę bycia „ciągle zajęтым” (Karbowniczek, Kwaśniewska i Surma, 2013, s.289).

Kolejna zasada - indywidualizacji stosowana w pracy pedagogicznej nakłada na nauczyciela obowiązek otoczenia każdego dziecka indywidualizowaną opieką i troską oraz nawiązywania z nim indywidualnych kontaktów, ponieważ, jak zauważa A. Klim-Klimaszewska wszelkie „metody postępowania pedagogicznego powinny być dostosowane do potrzeb i możliwości dzieci wynikających z ich różnic indywidualnych” (Klim-Klimaszewska, 2011, s.115). Należy zatem różnicować poziom wymagań, tempo pracy oraz treści kształcenia. M. Kwiatowska (1985) dodaje, że zasada indywidualizacji implikuje także rozwijanie zainteresowań i jednostkowych uzdolnień dzieci.

Zasada organizacji życia społecznego wymaga wprowadzenia w procesie wychowania norm moralno- społecznych obowiązujących w grupie oraz dążenia, aby wszystkie dzieci te normy akceptowały i przestrzegały ich w swoim postępowaniu. Dzięki temu „budzi się u dzieci wrażliwość na opinię społeczną, spełniają one nowe dla siebie role i uczą się współdziałać z innymi” (Kwiatowska, 1985, s.60).

Zgodnie z zasadą integracji nauczyciel w przedszkolu musi respektować współzależność rozwoju somatycznego i psychicznego dziecka, zapewnić mu harmonijne oddziaływania poprzez łączenie treści różnych dziedzin wychowania oraz integrację treści wychowania i kształcenia. „Szkodliwe jest, bowiem jednostronne

wychowanie dzieci przedszkolnych, a zwłaszcza zaniedbywanie ich rozwoju emocjonalnego, społecznego i fizycznego na rzecz rozwoju umysłowego” (Klim-Klimaszewska, 2011, s.115).

Wiek przedszkolny, jak wskazano na wstępie, jest czasem, w którym dziecko przejawia nieograniczoną potrzebę poznawania tego, co je otacza, a wzmożona aktywność poznawcza jest z kolei warunkiem rozwoju umysłowego. Zadaniem wychowania przedszkolnego powinno być, zatem tworzenie takich sytuacji, w których dziecko znajdzie zaspokojenie swoich potrzeb poznawczych. Jednym z zasadniczych elementów ułatwiających to zadanie są właściwie dobrane metody pracy nauczyciela z dzieckiem. „Uwzględniają one właściwości psychiki małego dziecka i jego prawidłowości rozwojowe oraz obejmują zarówno proces wychowania, jak i kształcenia” (Wojciechowska, 2014, s.303).

J. Karbowniczek (2011), sygnalizując, że metody nauczania podlegały i nadal podlegają różnym przekształceniom, stwierdza, że w pracy z dzieckiem przedszkolnym istotne są następujące metody:

- aktywizujące,
- czynne, oparte na działaniu,
- oglądowe (percepcyjne),
- słowne.

Po wprowadzeniu reformy oświaty w Polsce (1999) jako najważniejsze uznaje się metody aktywizujące, które tworzy grupa metod ukierunkowanych na dziecko, na jego samodzielność, badania, poszukiwania i kreatywność. Należą do nich drama, metoda projektu, metoda globalnego czytania Glenna Domana, burza mózgów, mapa pojęciowa, piramida priorytetów, linia czasu, metaplan, metoda przypadków, dyskusja dydaktyczna, symulacja, gra zadaniowa i wiele innych. W prowadzonym procesie wychowawczo-dydaktycznym aktywne jest przede wszystkim dziecko. A. Borowska podkreśla, że „aktywizujące metody nauczania pobudzają dziecko do działania, do aktywności, która z kolei wpływa na rozwój myślenia i pamięci, na lepsze przyswajanie wiedzy i umiejętności oraz sprawniejsze wykorzystywanie nabytej wiedzy w życiu codziennym” (Borowska, 2009, s.22). J. Karbowniczek (2011) dostrzega natomiast znaczenie metod aktywizujących w rozwoju procesu samorealizacji dzieci i integracji grupy podczas wspólnej zabawy (także Wojciechowska, 2014).

Doceniając znaczenie i dominację metod aktywizujących w pracy przedszkola, J. Karbowniczek (2011) w konkluzji zauważa jednak konieczność właściwego doboru metod do możliwości rozwojowych dzieci, uwzględniającego zasadę stopniowania trudności w czasie ich stosowania. Poza tym autorka uważa, że należy wykorzystywać różne metody, zmieniać je i urozmaicać, tak, aby dziecko było twórcze i aktywne przez cały czas trwania zajęć.

W tym kontekście A. Borowska (2009) zaznacza, że każda metoda dydaktyczna oparta jest na słowie, stąd metoda słowna jest równie potrzebna, jak i skuteczna. Podobne stanowisko prezentuje M. Kwiatowska, pisząc, że słowo „pobudza procesy poznawcze i emocjonalne, dostarcza informacji, porządkuje wiadomości” (Kwiatowska, 1985, s.63).

Do metod słownych stosowanych w edukacji przedszkolnej zalicza się:

- rozmowy, opowiadania, zagadki, uczenie dzieci wierszy, tekstów piosenek;
- objaśnienia i instrukcje;
- sposoby społecznego porozumiewania się oraz
- metodę żywego słowa.

Rozmowy, opowiadania, zagadki, uczenie się wierszyków czy tekstów piosenek wzbogacają zasób słownictwa czynnego i biernego małych dzieci, uczą formułowania pełnych, poprawnych wypowiedzi, pobudzają do zadawania pytań. Odgadywanie zagadek, recytowanie wierszy, śpiewanie piosenek sprawia szczególnie dużo radości najmłodszym dzieciom.

Objaśnienia i instrukcje stosowane są podczas nabywania przez dzieci umiejętności technicznych, sprawności ruchowej, nawyków higienicznych oraz przy podejmowaniu różnych zadań do wykonania. J. Karbowniczek (2011) zwraca przy tym uwagę, aby przekazywane objaśnienia i instrukcje były jasne, zrozumiałe i adekwatne do możliwości percepcyjnych każdego dziecka.

Następna grupa metod słownych - sposoby społecznego porozumiewania się „związane są z wyrażaniem aprobaty lub dezaprobaty, pochwały lub nagany, jest to upomnienie, tłumaczenie, przekonywanie, nakazy, zakazy, wpływanie na postępowanie jednostki” (Karbowniczek, 2011, s.253).

Natomiast metodą żywego słowa przekazywane są przedszkolakom wartości literatury pięknej. Metoda ta zapewnia także rozwój wyobraźni i motywacji dziecka oraz kształtuje zainteresowania czytelnicze.

Omówione metody słowne należy jednak w pracy z dzieckiem przedszkolnym stosować z umiarem i rozważą, aby uniknąć nadmiernego werbalizmu; trzeba wspierać i uzupełniać je pokazem, oglądaniem ilustracji, przykładem osobistym i metodami czynnymi. Aby wzbudzić zaniepokojenie małego dziecka nie wszystko można i należy opisać za pomocą słów.

M. Kwiatowska wyraźnie zastrzega, że „mowa jest jednak zdolnością porozumiewania się za pomocą symboli, które pośrednio informują o rzeczach i zjawiskach oraz o stosunkach między nimi. Pojęcia zatem i treści podane słownie, dziecko w wieku przedszkolnym przyswaja sobie o tyle, o ile są one oparte na zasobie jego spostrzeżeń i wyobrażeń, nagromadzonych w bezpośrednim obcowaniu z rzeczywistością”(Kwiatowska, 1985, s.63).

Zatem w edukacji przedszkolnej powinny współwystępować także metody oglądowe, (percepcyjne) polegające na „bezpośrednim spostrzeganiu i przeżywaniu w kontakcie z otoczeniem materialnym, kulturalnym i społecznym” (Klim-Klimaszewska, 2011, s.118).

Wśród metod oglądowych wyróżnia się:

- metodę obserwacji i pokazu;
- metodę przykładu oraz
- metodę uprzystępniania sztuki plastycznej, teatralnej i utworów muzycznych.

Celem metody obserwacji i pokazu jest ukierunkowanie uwagi dzieci na określonym przedmiocie, zjawisku czy czynności. Często są to obserwacje przyrodnicze, prowadzone w warunkach naturalnych, jak i doświadczalnych, których obiektem są zwierzęta i rośliny.

W metodzie przykładu jako wzór do postępowania wykorzystywany jest osobisty przykład nauczyciela, innych osób dorosłych i dzieci, a także przedstawienia teatralne czy ilustracje.

Metoda uprzystępniania sztuki pozwala dzieciom zrozumieć i przeżyć dzieła sztuki plastycznej, teatralnej oraz muzycznej.

Szczególnie efektywne w edukacji przedszkolnej jest stosowanie przez nauczycieli metod czynnych „opartych na działaniu, aktywności dziecka, zarówno percepcyjnej, jak i słownej” (Bajorek, 2007, s.63).

Do metod czynnych należą:

- metody samodzielnych doświadczeń;

- metody kierowania własną działalnością dziecka;
- metody zadań stawianych dziecku;
- metody ćwiczeń (Klim-Klimaszewska, 2011).

Metoda samodzielnych doświadczeń oparta jest na inicjatywie własnej dziecka. Polega na tworzeniu warunków dla spontanicznej zabawy i innej dowolnej aktywności dziecka oraz ułatwianiu mu kontaktów ze środowiskiem społeczno-przyrodniczym. Nauczyciel nie bierze udziału w działaniach dziecka, ale jest czynnym obserwatorem i doradcą.

Natomiast istotą metody kierowania własną działalnością dziecka jest inspirowanie spontanicznego działania dziecka za pomocą sugestii, zachęty czy pobudzania zainteresowań. Zadaniem nauczyciela jest popieranie inicjatywy dzieci, wspomaganie ich wysiłków w przezwyciężaniu trudności, rozwiązywanie konfliktów, udzielanie rad, wskazówek czy potrzebnych informacji oraz ocenianie i nagradzanie.

W metodzie zadań stawianych dziecku aktywność dziecka pobudzana jest w kierunku ustalonym przez nauczyciela, który organizuje sytuację problemową rozbudzającą dziecięce wyzwania. Celem metody zadań jest „przyswojenie umiejętności, wiadomości, przeżycie emocjonalne, dokonywanie umysłowych operacji myślenia i działania wokół planowanych przez nauczycielkę treści”(Dmochowska, 1985, s.348-349). Dziecko aktywnie i samodzielnie rozwiązuje zadania odkrywając nowe zjawiska, zdobywając nową wiedzę oraz nabywając nowe umiejętności. J. Karbowniczek podkreśla wysoką efektywność wychowawczo-dydaktyczną omawianej metody, która „wdraża do pracy, sprawia radość, odwołuje się do dziecięcych doświadczeń, zaspokaja ciekawość” (Karbowniczek, 2011, s.250).

Metoda ćwiczeń służy usprawnianiu i utrwalaniu nabytych wcześniej doświadczeń, umiejętności i wiadomości w celu nabycia wprawy. Jest podstawą w procesie rozwoju mówienia, czytania, pisanie, liczenia, rysowania, w rozwijaniu sprawności ruchowej i usprawnianiu funkcji psychicznych. Dmochowska (1985) zaznacza jednak, że zamierzone ćwiczenie należy wprowadzać wówczas, gdy dana sprawność zaczyna pojawiać się spontanicznie, bo wówczas wymaga mniejszej ilości powtórzeń; utrwała się szybciej i łatwiej.

W przedszkolach od pewnego czasu obserwuje się duże zainteresowanie nauczycieli nowymi rozwiązaniami metodycznymi o charakterze innowacyjnym, które „w praktyce

przedszkolnej oznaczają osiągnięcie lepszych od dotychczasowych wyników wychowawczych i dydaktycznych” (Klim-Klimaszewska, 2011, s.175).

Do innowacyjnych metod twórczych stosowanych w przedszkolnym wychowaniu fizycznym zalicza się:

- metodę ekspresji ruchowej Carla Orffa;
- Metodę Ruchu Rozwijającego Weroniki Sherborne;
- Metodę gimnastyki rytmicznej Alfreda i Marii Kniessów;
- Kinezylogię Edukacyjną Paula E. Dennisona;
- Metodę Marianne i Christophera Knillów;
- Metodę opowieści ruchowej Józefa Gotfryda Thulina;
- eurytmie;
- aerobik (Klim-Klimaszewska, 2011).

Zajęcia prowadzone z zastosowaniem wymienionych metod zaspokajają potrzeby ruchowe dzieci, ale ukierunkowane są na tzw. „ruch kreatywny”, którego cechą charakterystyczną jest „spontaniczność i swoboda, co prowadzi do twórczego wyrażania siebie” (Klim-Klimaszewska, 2011, s.191).

Innowacyjne metody wychowania muzycznego w przedszkolu wykorzystują elementy ruchu, tańca, gestów, śpiewu oraz gry na instrumentach. A. Klim-Klimaszewska (2011) zalicza do nich:

- metodę Emila Jagues Dalcroze’a;
- zajęcia umuzykalniające metodą Edwina E. Gordona;
- metodę aktywnego słuchania muzyki Batti Struss.

Do innowacyjnych metod w zakresie przygotowania dzieci przedszkolnych do nauki pisania należą:

- metoda Hany Tymichowej;
- program Marianne Frostig rozwijający percepcję wzrokową;
- edukacja przez ruch Doroty Dziamskiej (za: Klim-Klimaszewska, 2011).

Są to zestawy szczegółowych ćwiczeń manualnych i grafomotorycznych, które usprawniają koordynację wzrokowo-ruchową i motorykę małą w celu skutecznego przygotowania dziecka do nauki pisania oraz wczesnego korygowania niewłaściwej techniki rysowania. „Ćwiczenia te pozwalają w sposób bardziej swobodny, a zarazem żartobliwy, wprowadzić dzieci w świat pisma (Klim-Klimaszewska, 2011, s.231).

Mimo, że Podstawa Programowa Wychowania Przedszkolnego wskazuje, że w pracy dydaktycznej nauczyciel musi uwzględniać elementy tylko wstępnego przygotowania dzieci w zakresie czytania i kształtować ich gotowość do podjęcia właściwej nauki czytania w warunkach szkolnych, to jednak, jak wskazuje A. Klim-Klimaszewska (2011) już w przedszkolu można uczyć dzieci czytania (także Kamińska-Juckiewicz, 2001). Autorka proponuje wykorzystywać w tym celu innowacyjne metody, wśród których wskazuje:

- metodę analityczno-syntetyczną o charakterze funkcjonalnym Ewy i Feliksa Przyłubskich;
- metodę barwno-dźwiękową Heleny Metery;
- Metodę Dobrego Startu Marty Bogdanowicz;
- metodę naturalnej nauki języka Wendy Pye;
- metodę fonetyczno-literowo-barwną Bronisława Ročławskiego;
- metodę wprowadzania w świat pisma Ireny Majchrzak;
- metodę zabawy w czytanie Glenna Domana;
- sojusz metod Ewy Arciszewskiej (Klim-Klimaszewska, 2011).

Wymienione metody (zwane też metodami nauki czytania bez liter) proponują alternatywne sposoby uczenia czytania. „Polegają one na wykorzystaniu globalnej nauki czytania odpowiednio dobranych wyrazów, z zachowaniem pewnej chronologii ich prezentacji, w ściśle określony przez danego autora sposób. Nauka czytania odbywa się w krótkich sesjach i przebiega etapami, które są niezależne od wieku dziecka, a ich ścisłe przestrzeganie pozwala na osiąganie najlepszych rezultatów” (Klim-Klimaszewska, 2011, s.254). Warto również zauważyć, że wszyscy autorzy zgodnie zalecają rozpoczęcie ćwiczeń w czytaniu już z dziećmi trzyletnimi.

W przedszkolach coraz popularniejsze stają się także elementy arteterapii, takie jak biblioterapia (praca z książką, drama, inscenizacja), choreoterapia (tańce integracyjne), terapia poprzez działalność plastyczną (rysunek dziecięcy) oraz metody, zwane jako pedagogika zabawy „Klanza”.

Wśród metod aktywizujących nauczyciele przedszkoli wykorzystują również metody z zakresu terapii pedagogicznej: prowadzą zajęcia korekcyjno-wyrównawcze, terapię zabawową, treningi interpersonalne oraz treningi relaksacyjne. A. Klim-Klimaszewska (2011) podaje, że z dziećmi w wieku przedszkolnym można wykorzystywać takie techniki relaksacyjne jak: Trening Jacobsona, Trening autogenny

Schulza, Trening autogenny według Anny Polender, czy metodę masażyków według Marty Bogdanowicz. Autorka podkreśla pozytywne oddziaływanie relaksacji powodującej „odprężenie fizyczne i psychiczne sprzyjające regeneracji sił i usunięciu napięć wywołanych przeżyciami, przemęczeniem lub znużeniem” (Klim-Klimaszewska, 2011, s.211).

Poszukując skutecznych, innowacyjnych metod edukacyjnych należy jednak pamiętać, że priorytetem pozostaje dziecko, jego dobro i rozwój. Na te problemy wyraźnie zwraca uwagę D. Waloszek (1998) przestrzegając przed podporządkowywaniem pracy edukacyjnej logice teleologicznej i stosowaniem wciąż nowych rozwiązań bez głębszej ich analizy oraz bezpośrednim przenoszeniem na własny warsztat pracy. Autorka na podstawie przeprowadzonych badań stwierdza z niepokojem, iż „nauczyciele w większości przejmują propozycje dlatego, że są nowe w czasie, stosują je bez odniesienia do możliwości dzieci czy sensowności proponowanych zmian. Poddają się także „modzie na” (...). Przedszkole wprowadzając różnorodne koncepcje jest oceniane jako dobre, aktywne (...). Liczy się to, ile się wprowadza zmian, a nie jakie one są” (Waloszek, 1998, s.31; także Kameduła, 1998).

Współczesna edukacja przedszkolna - jak wskazano kładzie nacisk na nowy styl pracy z dzieckiem. Służą temu omówione różnorodne metod pracy pedagogicznej. Istotną rolę odgrywają także formy pracy skierowane na dziecko, jego wychowanie oraz prawidłowy, wszechstronny rozwój.

Do najważniejszych form pracy w przedszkolu J. Karbowniczek (2011) zalicza:

- zabawę i inne rodzaje dowolnej aktywności dziecka;
- zajęcia organizowane przez nauczyciela;
- czynności samoobsługowe dzieci;
- uroczystości i imprezy;
- spacer i wycieczki;
- kontakty okolicznościowe.

Podstawową formą aktywności dziecka w wieku przedszkolnym jest zabawa (Brzezińska, 1992a; Waloszek, 1994, 2006, Borowska, 2009; Wiatrowska i Domochowska, 2013; Karbowniczek, 2011; Klim-Klimaszewska, 2005, 2011; Surma, 2011b; Wojciechowska, 2014), co oznacza, że przede wszystkim na niej powinien być oparty proces nauczania w przedszkolu. W. Puślecki stwierdza wprost: „przedszkole musi stwarzać naturalne okazje edukacyjne, motywujące dzieci do inicjowania własnej

aktywności zabawowej, w tym motorycznej, poznawczej i emocjonalnej” (Puślecki, 2006, s.99).

Zabawa jest, jak wskazuje D. Waloszek „przejawem biologicznych i psychicznych potrzeb dziecka” (Waloszek, 2006 s.253). A. Klim-Klimaszewska dodaje, że „dzięki niej poznaje ono coraz lepiej świat i stosunki społeczne, kształci umysł i umiejętności skutecznego działania, zaspokaja potrzebę ogólnej aktywności, a także tworzy pozytywne stany uczuciowe i rozładowuje napięcia emocjonalne”(Klim-Klimaszewska, 2005, s.39).

Znaczenie zabawy w rozwoju dziecka dostrzega również E. Gruszczyk-Kolczyńska pisząc: „zabawa sprzyja wydłużaniu czasu skupiania się na jednej złożonej działalności, na planowaniu i realizowaniu kolejnych czynności wyznaczonych przebiegiem zabawy, na porozumiewaniu się z innymi dziećmi w sprawie ich przebiegu oraz na odczuwaniu zadowolenia z przebiegu zabawy oraz uporządkowaniu miejsca, w którym zabawa była realizowana” (Gruszczyk-Kolczyńska, 2011, s.75).

A. Borowska podkreśla poznawcze, edukacyjne wartości zabawy twierdząc, że „poprzez zabawę dziecko uczy się, poznaje otaczającą go rzeczywistość, nabywa doświadczenia i wprawy w nawiązywaniu kontaktów z otoczeniem, współpracy z nimi sprawnego działania w różnych rzeczywistych już sytuacjach. Zabawa to nauka prowadzona w przyjemny sposób. Wyzwala w dziecku ciekawość i zainteresowanie, wzbudza motywację i rozwija twórcze myślenie. Zabawa to także dobry sposób na ćwiczenie koncentracji uwagi, spostrzegawczości i pamięci oraz rozwijania zdolności dostrzegania znaczących elementów obserwowanych zjawisk, zdarzeń, poznawania zależności i związków przyczynowo-skutkowych” (Borowska, 2009, s.23-24).

Podobne stanowisko zajmuje D. Waloszek (1994, 2006) postrzegając zabawę nie tylko jako jeden z rodzajów aktywności dziecka, ale przede wszystkim jako przestrzeń i strategię edukacyjną, strategię najbardziej efektywną. Autorka pisze wprost: „dziecko chce się bawić, a bawiąc się – doświadcza – uczy się” (Waloszek, 1994, s.15; także Surma, 2011b). E. Gruszczyk-Kolczyńska dodaje, że „im dłużej dziecko potrafi skupić się na zabawie, tym lepsze rokowania na sukcesy w nauce szkolnej” (Gruszczyk-Kolczyńska, 2011, s.65).

Ważne jest, aby wspomnianą przestrzeń edukacyjną tworzyło samo dziecko, bo jeśli czyni to dorosły, to dziecko „jest, co najwyżej zabawiane przez zadania,

przedmioty podsuwane czy wkładane do ręki, przez określanie miejsca „zabawy”, czasu jej realizacji” (Waloszek, 2006, s.269). Zadaniem dorosłych jest natomiast wspieranie rozwoju dziecka, podążanie za jego potrzebami i takie ich przekształcanie, aby sprzyjały wzrostowi i dojrzewaniu. L. Wiatrowska i H. Dmochowska przestrzegają wyraźnie, że „dziecko w zabawie może być twórcą, wynalazcą czy odkrywcą, o ile dorosły będzie je wspomagał, a nie próbował tylko zewnętrznego sterowania, bez uznania podmiotowości dziecka”(Wiatrowska i Dmochowska, 2013, s.87).

Dziecko przedszkolne przejawia swą aktywność zabawową w zabawach manipulacyjnych, konstrukcyjnych, tematycznych, badawczych, dydaktycznych, tropiących, teatralnych oraz ruchowych (Kowalik-Olubińska, 2008; Karbowniczek, 2011; Klim-Klimaszewska, 2005, 2011; Lipina, 1983; Dmochowska i Wiatrowska, 2013).

Najbardziej typowe dla dzieci przedszkolnych są zabawy tematyczne, które stanowią według określenia S. Lipiny „swoistą formą działalności, w której dziecko w postaci zabawowej wprowadza w czyn to, co przedtem zaobserwowało, poznało i przeżyło, czego dowiedziało się i doświadczyło” (Lipina, 1983, s.76). Podczas tych zabaw dzieci wykorzystują swą fikcję i wyobraźnię.

Natomiast zabawy manipulacyjne pojawiają się bardzo wcześnie – około 4-5 miesiąca życia i są wstępem do zabaw konstrukcyjnych i badawczych. Zdaniem Z. Topińskiej „poczynając od drugiej połowy czwartego miesiąca życia dziecko chwytając przedmioty i odtąd przez długie miesiące ćwiczy koordynację swoich ruchów, maca zabawki różnych kształtów, wkłada je do ust, rzuca nimi, stuka” (Topińska, 1985, s.174).

We wspomnianych zabawach konstrukcyjnych aktywność dziecka przejawia się w czynnościach budowania z rozmaitego materiału: klocków, kamyków, patyczków czy piasku. Takie działania zaspokajają potrzebę tworzenia, kształtują myśl techniczną dziecka, wyobraźnię przestrzenną, inwencję twórczą oraz pozwalają poznać właściwości tworzyw (Lipina, 1983; Topińska, 1985; Waloszek, 2006; Karbowniczek, 2011).

Zabawy dydaktyczne z kolei, takie jak loteryjki, rebusy, układanki czy gry stolikowe są najczęściej inaugurowane przez dorosłych. Ich celem jest eskalowanie myślenia dzieci, ich uwagi i bystrości, a także wdrażanie do przestrzegania zasad i reguł. Ponadto „zabawy dydaktyczne dają dziecku okazję do porządkowania swoich

wiadomości, operowania nimi, rozumowania, dociekania”(Topińska, 1985, s.176). Do zabaw dydaktycznych należą także gry dydaktyczne, które jak zauważa A. Klim-Klimaszewska (2011) najszerzej są wykorzystywane w edukacji matematycznej starszych przedszkolaków.

Kolejny rodzaj zabaw - zabawy tropiące pozwalają dzieciom na „bezpośredni kontakt z rzeczywistością przyrodniczą (teren) i społeczną (treść zabawy), przeżywanie dodatnich emocji, jakie towarzyszą docieraniu do nieznanego celu oraz wykonywanie ciekawych zadań”(Klim-Klimaszewska, 2011, s.46). Tego typu zabawy uczą dzieci samodyscypliny i zaradności, wzmacniają więzi koleżeńskie, rozwijają percepcję wzrokową, a także umiejętność kojarzenia faktów, dostrzegania przyczyn i skutków.

Celem zabaw teatralnych organizowanych w przedszkolu jest „zdobywanie przez dzieci umiejętności poruszania się w przestrzeni, słuchania, wypowiadania się, współdziałania w zespole, rozwijania twórczej wyobraźni”(Klim-Klimaszewska, 2011, str.48). Takie zabawy teatralne są również doskonałą okazją do realizowania dziecięcego animizmu.

Zabawy ruchowe nie tylko usprawniają dziecko ruchowo i zaspokajają potrzebę ruchu, lecz także przyczyniają się do jego rozwoju społecznego, uczą współdziałania z innymi, respektowania zasad i reguł. A ponadto, jak zauważa Z. Topińska „ugruntowane w dzieciństwie zamiłowanie do ruchu, do nabywania sprawności czyni dziecko gotowym do uprawiania sportu” (Topińska, 1985, s.175). Pogląd ów nabiera obecnie szczególnego znaczenia, gdyż współczesne dziecko coraz więcej czasu spędza biernie przed telewizorem lub monitorem komputera.

Obok zabawy pojawiają się także elementy innych form działania dziecka przedszkolnego, związane z nauką i pracą. Są to czynności planowane i organizowane przez nauczyciela, które I. Dudzińska (1983) określa jako „zajęcia”. Mają one zaplanowany przebieg i cel, do którego konsekwentnie zmierza nauczyciel. Są w zasadzie obligatoryjne dla wszystkich dzieci, a ich treści wynikają głównie z realizowanej Podstawy Programowej Wychowania Przedszkolnego. Ze względu na dominujący rodzaj działalności dziecka I. Dudzińska (1983) wymienia trzy rodzaje zajęć:

- zajęcia z dominacją ruchu, czyli organizowane przez nauczyciela zabawy ruchowe, ćwiczenia gimnastyczne czy zajęcia muzyczno-ruchowe;

- zajęcia z dominacją działalności plastycznej, technicznej i konstrukcyjnej, podczas których wykonywane są prace z wykorzystaniem wszystkich technik plastycznych;
- zajęcia z dominacją działalności umysłowej, takie jak opowiadania, rozmowy, uczenie się wierszy, kształtowanie pojęć matematycznych itp.

Ważne jest, aby czas trwania wymienionych zajęć był adekwatny do możliwości percepcyjnych dzieci, do ich zdolności skupienia uwagi i skoncentrowania się na jednym zagadnieniu. W pracy z dziećmi 6-letnimi zajęcia powinny trwać 20-30 minut.

I. Dudzińska (1983) szczegółowo omawia cele zajęć prowadzonych w edukacji przedszkolnej, do których zalicza:

- aktywizowanie myślenia dzieci;
- przekazywanie wiedzy o środowisku przyrodniczo-społecznym;
- rozwijanie wyobraźni, ekspresji i pomysłowości;
- rozwój społeczno-moralny;
- stymulowanie rozwoju mowy dzieci;
- przygotowanie do nauki czytania i pisanie;
- wychowanie estetyczne;
- rozwój zainteresowań i zamiłowań.

W podsumowaniu I. Dudzińska (1983) podkreśla, że warunkiem realizacji wymienionych celów jest właściwe i świadome przygotowanie zajęć przez nauczyciela. Z. Topińska dodaje, iż „cała sztuka prowadzenia udanych zajęć przedszkolnych polega na tym, aby dzieci stawiane im zadania przyjmowały za swoje. Zajęcia obce zamierzeniom dziecka, jego pragnieniom, zainteresowaniom nie będą udane, choćby im przyświecały najśluszniesze intencje nauczycielki”(Topińska, 1985, s.188).

Również D. Waloszek (2009) mówi o drugiej (obok zabawy) strategii edukacyjnej, czyli działaniu zadaniowym i podkreśla jego rolę przytaczając myśl Owidiusza, że „wprowadzenie dzieci w procedurę zadaniową jest/ będzie połową ich sukcesu w nauce w szkole” (Waloszek, 2006, s.317). Autorka stwierdza, że wobec dzieci przedszkolnych można stosować zadania różnicując jednak ich treść i konstrukcję oraz uwzględniając wiek i płeć dzieci. I tak „dzieci młodsze, do około piątego roku życia chętnie podejmują zadania nadane im przez nauczyciela w związku z ich potrzebami działania, zadania proste, pełne, manipulacyjne, o treści przyrodniczej, lokowanej przede wszystkim w kręgu potrzeb biologicznych, emocjonalnych. (...)

Dzieci starsze, 5- 6-letnie chętnie podejmują wszystkie rodzaje zadań, (...) związane z poszerzaniem wiedzy ogólnej, związanej z fauną i florą, historią świata, techniką” (Waloszek, 2006, s.333). Jest to uwarunkowane wyraźnie wzrastającą motywacją zadaniową, która pojawia się około piątego roku życia i stwarza szerokie możliwości uczenia się działania ukierunkowanego, celowego i zorganizowanego. W ten sposób odbywa się skuteczne przygotowanie dziecka do nauki w warunkach szkolnych.

Kolejną formą pracy w przedszkolu są czynności samoobsługowe, dzięki którym dzieci uczą się samodzielnie obsługiwać siebie oraz uczestniczyć w utrzymywaniu czystości, porządku i estetyki w najbliższym otoczeniu. W tych działaniach bardzo istotna jest współpraca nauczycieli z rodzicami, którzy nie mogą wyręczać swego dziecka, w tym, co ono potrafi już zrobić samodzielnie, choć może jeszcze nieporadnie | i powoli.

Wśród form, które pobudzają aktywność dzieci przedszkolnych wymienia się także spacer i wycieczki, które poza aktywizowaniem spełniają wiele innych funkcji, takich jak: poznawcza, kształcąca i wychowawcza. Spacer bowiem nie tylko zapewnia dzieciom ruch na świeżym powietrzu, ale także pozwala na poznawanie otaczającego środowiska społeczno-przyrodniczego. Natomiast „wycieczki starannie przygotowane i metodycznie przeprowadzone rozwijają u dzieci takie cechy, jak: chęć eksperymentowania, ciekawość poznawcza, gotowość pomagania innym, fantazja, dociekliwość, wytrwałość, zaradność, samodzielność, otwartość” (Parczewska, 2008, s.161, także Dudzińska, 1983). A ponadto „udana wycieczka najczęściej inspiruje dziecięce zabawy i twórczość plastyczną. Wzbogaca treść rozmów dzieci między sobą, a nauczycielce daje wiele okazji do stymulowania ich wypowiedzi, poszerzania zasobu słownictwa i wiedzy o otoczeniu, kształtowaniu stosunku do ludzi i przyrody, wiązania doznawanych przeżyć z literaturą piękną” (Topińska, 1985, s.201). Szczegółowej analizy funkcji wycieczek i spacerów w edukacji przedszkolnej dokonuje J. Karbowniczek (2011) oraz I. Dudzińska (1983). Z. Topińska (1985) z kolei przedstawia istotne, praktyczne wskazówki dotyczące organizowania wycieczek dla dzieci przedszkolnych. Natomiast I. Dudzińska (1983) podejmuje również ważną problematykę bezpieczeństwa dzieci podczas spacerów i wycieczek oraz ich samopoczucia.

W życiu przedszkola istotną rolę odgrywają również uroczystości i imprezy, które „kształtują i rozwijają dziecięce zainteresowania – literaturą, kulturą, sztuką – oraz umiejętności plastyczne, językowe, muzyczne, taneczne, mimiczne, aktorskie, twórcze, spontaniczne” (Karbowniczek, 2011, s.279). Ponadto pozytywnie wpływają na rozwój autonomii i niezależności dzieci. I. Dudzińska (1983) zwraca jednak uwagę, że o wartości uroczystości czy imprezy decyduje właściwe jej przygotowanie i sprawna organizacja. Autorka zaznacza, że „dzieci muszą być zaangażowane w ciąg całego okresu poprzedzającego uroczystość, oczekiwać na nią, brać aktywny udział w przygotowaniach. Sama uroczystość powinna być źródłem radości, przyjemności, a nie momentem męczącym” (Dudzińska, 1983, s.116). W tym kontekście I. Dudzińska (1983) podaje praktyczne wskazówki, jak należy najpierw dobrze przygotować uroczystość w przedszkolu, a następnie skutecznie ją zrealizować.

A. Klim-Klimaszewska podkreśla równorzędne znaczenie wszystkich omówionych form pracy wychowawczej z dziećmi w przedszkolu, gdyż „każda z nich obejmuje treści wielostronne, choć w różnym stopniu stymulujące poszczególne sfery rozwoju dziecka. Ponadto te wszystkie formy służą w mniejszym lub większym stopniu integracji treści programowych zawartych w rozmaitych dziedzinach wychowania przedszkolnego” (Klim-Klimaszewska, 2011, s.117). M. Kwiatowska uzupełnia, że „błędem byłoby przypisywać najważniejszą w tym rolę codziennym zajęciom obowiązkowym, prowadzonym przez nauczycielkę, a zaniedbywać zabawy, czynności samoobsługowe, sytuacje okolicznościowe itp. (Kwiatowska, 1985, s.67).

D. Waloszek (1993) zwraca uwagę na niekorzystne tendencje wprowadzania do przedszkoli systemu pracy szkolnej, kopiowania jej metod oraz organizacji. Autorka tłumaczy ten fakt wprowadzeniem do przedszkoli rozszerzonego programu kształcenia. „Powoduje to powstawanie sytuacji, w których podstawą pracy pedagogicznej przedszkola stają się nie potrzeby, zainteresowania dzieci, lecz treści programowe” (Waloszek, 1993, s.3), a przecież „wiek przedszkolny jest wiekiem zabawy i zabawowego uczenia się” (Waloszek, 1994, s.14). D. Waloszek wyraźnie przestrzega przed charakterystycznym obecnie (nawet w edukacji przedszkolnej) postrzeganiem zabawy jako straty czasu i zastanawia się „co takiego tkwi w nas dorosłych, że ustawicznie bagatelizujemy jej wartość? Dlaczego bawiące się dziecko niepokoi nas bardziej niż dziecko „uczące się” i odrabiające lekcje?” (Waloszek, 2006, s.253; także Kapica, 2006). W konkluzji badaczka stwierdza, że wartość zabawy jest nadal

lekceważona. „Ciągłe uważamy, że tak naprawdę ważność przypisana jest nauce i szkole, (...), zabawa jedynie upiększa życie, można więc obyć się bez niej, dziecko im szybciej z niej „wyrośnie”, tym lepiej dla jego kariery. W taki sposób myślenia wpisuje się także wielu nauczycieli” (Waloszek, 2006, s.256; podobnie, Dmochowska i Wiatrowska, 2013). A jak zauważa D. Waloszek „obawy te skierować należałoby raczej na formy i rodzaje aktywności niezabawowej” (Waloszek, 2006, s.270). J. Karbowniczek dodaje kategorycznie, że „zabawa nie jest „luką”, czy też wypełnieniem wolnego czasu, sama w sobie kryje niesamowitą otwartość oraz wiele wartości poznawczych, kształcących i wychowawczych” (Karbowniczek, 2011, s.274).

2. Edukacja matematyczna w przedszkolu tradycyjnym

Jednym z celów wychowania przedszkolnego jest zapewnienie warunków edukacyjnych, w których dzieci zdobędą podstawowe wiadomości i umiejętności matematyczne niezbędne do nauki matematyki w szkole.

Edukacja matematyczna w przedszkolu to - jak wskazuje A. Klim-Klimaszewska- „poznawanie stosunków jakościowych i ilościowych oraz kształtowanie pojęć matematycznych” (Klim-Klimaszewska, 2011, s.135). Obejmuje ona następujące zagadnienia:

- poznawanie cech jakościowych przedmiotów, takich jak: wielkość, ciężar, pojemność, kształt, długość, szerokość i wysokość;
 - rozwijanie pojęć dotyczących położenia przedmiotów w przestrzeni i określania kierunków;
 - pojęcia do określania czasu, w tym nazwy dni tygodnia, pór roku, miesięcy;
 - podstawowe figury geometryczne płaskie i przestrzenne, układanie z nich kompozycji przestrzennych, rozpoznawanie figur geometrycznych w otoczeniu;
 - zbiory i podzbiory;
 - pojęcie liczby elementów zbioru, w tym pojęcia równoliczności i nierównoliczności zbiorów;
 - arytmetyka liczb naturalnych, czyli posługiwanie się liczebnikami głównymi i porządkowymi w zakresie 10 oraz proste przykłady dodawania i odejmowania
- (za: Klim-Klimaszewska, 2011).

E. Gruszczyk-Kolczyńska (1997) uważa, że edukację matematyczną dzieci w wieku przedszkolnym należy widzieć wielopłaszczyznowo. Wspominając o

integralnym rozwoju umysłowym, badaczka podkreśla zarówno rozwój zdolności rozumienia, rozumowania, przewidywania i oceniania faktów, jak i rozwój pamięci i wyobraźni oraz przekazywanie informacji na temat swoich doświadczeń i wyobrażeń. Podobne stanowisko zajmuje E. Swoboda stwierdzając, że „aby znać matematykę, trzeba przede wszystkim umieć myśleć w charakterystyczny sposób, choćby po to, aby potrafić skonstruować w umyśle pojęcia matematyczne i umieć się potem nimi posługiwać. Przygotowanie dzieci do rozumienia pojęć i procedur matematycznych polegać powinno głównie na dostarczeniu wzorców organizowania myślenia czy wyposażeniu w umiejętność skupienia uwagi na określonych fragmentach rzeczywistości” (Swoboda, 2007, s.70). A zatem edukacja matematyczna w okresie przedszkolnym ma charakter polisensoryczny; jest wtopiona w działania wspomagające ogólny rozwój umysłowy dziecka, aktywizuje myślenie sensoryczno-motoryczne i konkretno-wyobrażeniowe dziecka (Oszwa, 2006). Stanowi to budulec, z którego dziecięcy umysł tworzy pojęcia i umiejętności, przyczyniające się do rozwijania myślenia i hartowania odporności emocjonalnej.

Aby w przyjemny sposób wprowadzić małe dziecko w „świat matematyki”, nauczyciel musi wiedzieć, jak organizować zajęcia i jak właściwie dobierać metody, formy i zasady pracy pedagogicznej. Bardzo ważne jest, aby przedszkolaki zdobywały wiedzę dzięki własnemu działaniu, autopsji i samodzielnemu wyciąganiu wniosków, a nie przez zapamiętywanie gotowych wiadomości podawanych przez nauczyciela. Dziecko - jak wspomniano pierwszej części rozdziału - uczy się poprzez działanie (nie słuchanie) i dlatego najważniejsze są osobiste doświadczenia dziecka, eksperymentowanie, manipulowanie przedmiotami, próby uogólniania zaobserwowanych prawidłowości. Z. Morawska dowodzi, że „każde nowe pojęcie, własność, czy zależność dziecko powinno zrozumieć tak, jakby samo ją odkryło” (Morawska, 1985, s.405). Tak więc podstawą tworzenia pojęć i umiejętności matematycznych jest działanie, któremu towarzyszy nazywanie przedmiotów i wykonywanych czynności. Pomaga ono dostrzec to, co najważniejsze, sprzyja też koncentracji uwagi. Podobnych spostrzeżeń dokonują J. Filip i T. Rams twierdząc, że małe dziecko uczy się najskuteczniejszej, gdy aktywności umysłowej towarzyszą odpowiednio dobrane czynności. Czynności fizyczne - wyjaśniają autorzy „powodują napięcie uczuciowe dziecka i wysiłek umysłowy, co ułatwia osiągnięcie wyznaczonego celu”(Filip i Rams, 2000, s.58).

Zgodnie z tymi założeniami podstawowymi metodami w przedszkolnej edukacji matematycznej we wszystkich grupach wiekowych powinny być metody czynne, a więc metody samodzielnych doświadczeń, metoda zadań stawianych dziecku przez nauczyciela oraz metoda ćwiczeń umożliwiająca ugruntowanie pojęć i umiejętności. Jednakże, jak zauważa M. Fiedler (1983), aby rozwinęły się wyobrażenia i procesy myślenia dziecka, jego bezpośrednie spostrzeżenia muszą być powiązane z wyjaśnieniem, instrukcją, rozmową z nauczycielem. A zatem metody czynne są ważne na równi z metodami słownymi.

Podejmując poszukiwania efektywnych i jednocześnie atrakcyjnych dla dziecka sposobów uczenia matematyki w przedszkolu A. Klim-Klimaszewska (2011) zaleca stosowanie w edukacji metod wyzwalających aktywność twórczą małych dzieci. Takim przykładem jest konstruowanie gier planszowych o tematyce matematycznej. Również J. Filip i T. Rams (2000) przyznając, że edukacja matematyczna małych dzieci jest wyjątkowo trudna, proponują, aby ją uatrakcyjnić i uskutecznić poprzez zastosowanie gier i zabaw matematycznych i paramatematycznych (Fechner-Sędzicka, Ochmańska i Odrobina 2012). Jak dowodzi Z. Krygowska „gra sprzyja rozbudzeniu aktywności intelektualnej, teoretycznym zainteresowaniom dziecka, chęć wygranej stanowi często motywację, której transfer na inne zagadnienia, już poza grę, w procesie uczenia się matematyki obserwuje się bardzo często” (za: Filip i Rams, 2000, s.68). W tym kontekście należy przytoczyć przykład przedszkola nr 30 w Poznaniu, które od wielu lat organizuje konkurs dla przedszkolaków na grę matematyczno-logiczną „Moja wesoła matematyka”. Celem konkursu jest wykorzystanie zdobytej wiedzy matematycznej, wyobraźni oraz zdolności myślenia przyczynowo-skutkowego w tworzeniu gier. Honorowy patronat nad VI edycją konkursu objęła profesor Edyta Gruszczyk-Kolczyńska.

Edukacja matematyczna powinna być związana z inspirowaniem dziecka podczas całego dnia jego pobytu w przedszkolu, podczas różnorodnych form aktywności. Zdaniem R. Dominek i A. Pełki-Woszko przygoda dziecka z matematyką zaczyna się już „podczas pierwszych porannych ofert nauczyciela, poprzez pracę indywidualną, propozycje dla małych zespołów, czynności okolicznościowe, dyżury, zabawy inspirowane i spontaniczne, a kończy się ofertami dla dzieci późnym popołudniem” (Dominek i Pełka-Woszko, 2004, s.12).

M. Fiedler (1983) uważa, że o skuteczności procesu kształtowania pojęć matematycznych w edukacji przedszkolnej w wysokim stopniu decyduje stosowanie adekwatnych zasad, wśród których za najistotniejsze uznaje zasadę systematyczności i utrwalania. Autorka wyjaśnia, iż w matematyce wszystkie terminy i prawa są ze sobą ściśle powiązane, a „brak najmniejszego elementu, jako części składowej danego pojęcia, uniemożliwia dziecku uchwycenie pełnej treści pojęciowej wyrażonej słowami, liczebnikami głównymi czy też liczebnikami porządkowymi” (Fiedler, 1983, s.291).

Należy również pamiętać, że nie można prowadzić zajęć w przedszkolu bez specjalnie dobranych przedmiotów – środków dydaktycznych. Myślenie małych dzieci ma charakter konkretno-obrazowy i dlatego ich czynności poznawcze nie mogą opierać się wyłącznie na słowie, ale przede wszystkim na odpowiednio dobranych przedmiotach. Stopień skomplikowania środków dydaktycznych nie może przekraczać możliwości percepcyjnych dziecka. Im prostsza jest ich konstrukcja, tym łatwiej jest skanalizować uwagę dziecka na problemie matematycznym.

W przedszkolach w edukacji matematycznej stosowane są rozmaite pomoce dydaktyczne, takie jak: klocki logiczne, liczby w kolorach, goplany, patyczki do ćwiczeń arytmetyczno-geometrycznych. W ostatnich latach coraz popularniejsze staje się również wykorzystanie komputerów w procesie dydaktycznym. Komputer z odpowiednim oprogramowaniem edukacyjnym może pozytywnie motywować do nauki matematyki. Z wielu programów komputerowych wykorzystywanych w edukacji matematycznej w przedszkolu można wymienić: „Moje pierwsze zabawy matematyczne”, „Matematyczne przygody”, „Matematyk Miś” czy „Figurki-cyferki – kierunki”.

Problematykę metodycznych aspektów edukacji matematycznej w przedszkolu podejmuje również E. Swoboda (2007), która uważa, że właściwe przygotowanie matematyczne dzieci przedszkolnych należy oprzeć na trzech elementach:

1. dostrzeganie regularności, funkcjonowanie w świecie rytmów i regularności;
2. umiejętność nazywana „Wymyślanie sobie”, czyli zauważanie logicznej sekwencji zjawisk i zależności;
3. umiejętność argumentowania, przekonywania, obrony własnego poglądu.

Autorka podaje propozycje własnych rozwiązań metodycznych łączących wymienione elementy, które mogą być stosowane w pracy z dziećmi w przedszkolu. Są to:

- wykorzystywanie historyjek i wierszyków do kształtowania myślenia matematycznego, które ćwiczą umiejętność analizowania i stosowania regularności;
- klasyfikowanie i sortowanie z użyciem niebanalnych kryteriów, argumentowanie, spieranie się np. w trakcie samodzielnego tworzenia kart logicznych, co jest drogą do kształtowania pojęć i prowadzi do umiejętności definiowania;
- tworzenie wzorków (szlaczków) ukierunkowanych na matematykę z wykorzystaniem powtarzalnych elementów, symetrii, dzięki którym dzieci są wprowadzane w rytmy i regularności oraz uzyskują podstawy do tworzenia intuicji wielu geometrycznych związków i relacji (Swoboda, 2007).

A. Tyl (2006b) z kolei wskazuje na bardzo ważne zadanie nauczyciela prowadzącego przedszkolną edukację matematyczną, jakim jest rozbudzanie i rozwijanie zainteresowań matematyką od najmłodszych lat. W wyniku przeprowadzonych badań autorka podaje listę propozycji działań sprzyjających kształtowaniu zainteresowań matematycznych przedszkolaków. Za najbardziej istotne nauczyciele uznali „kierowanie uwagi dzieci na problemy matematyczne przejawiające się w codziennych sytuacjach” (Tyl, 2006a, s.260), co pozwala na dostrzeżenie praktycznej użyteczności nabywanej wiedzy i umiejętności. A. Tyl w podsumowaniu wyraża optymistyczne przekonanie, że „jeżeli nauczyciele przedszkoli będą stosowali w codziennej pracy dydaktyczno-wychowawczej choćby część z propozycji, które wymienili, wskazując na sposoby realizowania (...) zagadnienia rozbudzania od najmłodszych lat zainteresowania matematyką, to rzadziej będziemy obserwować zjawisko matofobii (polegające na spowodowanym strachem złym nastawieniu emocjonalnym do uczenia się matematyki), a częściej będziemy diagnozowali zamiłowanie do rozwiązywania problemów z dziedziny matematyki” (Tyl, 2006a, s.261).

Przygotowanie do uczenia się matematyki powinno zaczynać się jak najwcześniej. A. Klim-Klimaszewska twierdzi, że „wszystkie ćwiczenia związane z poznawaniem stosunków jakościowych i ilościowych oraz kształtowaniem pojęć matematycznych powinny być wplecione do zabaw przedszkolnych począwszy od zabaw dzieci trzyletnich” (Klim-Klimaszewska, 2011, s.136; także Morawska, 1985; Swoboda, 2007). Tymczasem, jak zauważa E. Swoboda (2007), w przedszkolach realizowany jest długoterminowy (obejmujący już trzylatków) program przygotowujący

dzieci do nauki czytania i pisania, a pomijana jest zupełnie kwestia przygotowania do nauki matematyki.

W tej niekorzystnej edukacyjnej sytuacji szczególnego znaczenia nabierają innowacyjne metody nauczania matematyki stosowane w przedszkolu, do których A. Klim-Klimaszewska (2011) zalicza:

- nauczanie małego dziecka matematyki metodą Glenna Domana,
- dziecięcą matematykę E. Gruszczyk-Kolczyńskiej.

W metodzie Domana pomocami dydaktycznymi jest sto dużych kartonów, na których umieszcza się w dowolny sposób kropki w ilości od 1 do 100. Na drugiej stronie planszy zapisana jest liczba oznaczająca ilość kropek. Na stu kolejnych, mniejszych planszach zapisane są czerwonym kolorem liczby od 1 do 100. W pracy metodą Domana bardzo istotne jest przestrzeganie kolejno następujących po sobie etapów. Na początku dziecko uczy się rozpoznawania kart z kropkami, ale nie przez liczenie, lecz poprzez wizualne wrażenie. Od trzydziestego dnia nauki wprowadza się dodawanie, a od czterdziestego dnia również odejmowanie liczb. Kolejnymi etapami jest rozwiązywanie zadań, działania multiplikatywne, czyli mnożenie i dzielenie oraz równania i wprowadzenie cyfr. Tak realizowana edukacja matematyczna uwzględnia zasadę stopniowania trudności oraz właściwości rozwojowe małego dziecka. Ponadto, jak wskazuje A. Klim-Klimaszewska „dziecko zauważa, że nauka jest procesem bardziej radosnym niż inne czynności i takie podejście będzie miało przez całe życie” (Klim-Klimaszewska, 2011, s.233).

W przedszkolach realizowany jest również program „Edukacja matematyczna”, który opracowała E. Gruszczyk-Kolczyńska wraz z zespołem. Dzięki tej metodzie dzieci rozwijają i poszerzają zdolności umysłowe potrzebne do nauki matematyki, w wyniku czego edukacja matematyczna staje się przyjemna i przynosi efekty dydaktyczne. Omawiany program uwzględnia znaczenie osobistych doświadczeń dziecka, stanowiących budulec, z którego tworzy ono nowe pojęcia, nabywa kolejne umiejętności oraz rozwija odporność emocjonalną (Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 1997). Również E. Swoboda (2007), uzupełniając program E. Gruszczyk-Kolczyńskiej zwraca uwagę na rolę własnych doświadczeń dziecka w procesie kształtowania się jego myślenia matematycznego. „Mogą to być doświadczenia związane z rozumieniem pewnych faktów i zjawisk, a także doświadczenia dotyczące pewnych procedur, działań, zachowań w określonych sytuacjach (...). Posiadane doświadczenia w tym

względnie spowodują, że dziecko nie będzie musiało tracić czasu i energii na zapoznanie się z sytuacjami zadaniowymi, będzie przygotowane do odpowiedniego wychwytywania i strukturyzowania informacji”(Swoboda, 2007, s.72). Podobne stanowisko zajmują R. Dominek i A. Pełka-Woszko twierdząc, że uczenie się-nauczanie matematyki „realizuje się najpełniej w toku wykonywanych przez dziecko działań dowolnych, umożliwiających eksperyment, dociekanie, wysuwanie pomysłów, hipotez (i najważniejsze – przerwanie ich w przypadku znużenia), ponieważ dziecko ma największą szansę zrozumieć struktury matematyczne w toku działania” (Dominek i Pełka-Woszko, 2004, s.13).

Program edukacji matematycznej wg E. Gruszczyk-Kolczyńskiej obejmuje następujące kręgi tematyczne:

1. Orientacja przestrzenna, czyli kształtowanie umiejętności, które pomogą dziecku dobrze orientować się w otoczeniu i będą przydatne w szkole na lekcjach matematyki oraz środowiska społeczno-przyrodniczego.
2. Rytm, który rozwija umiejętność dostrzegania prawidłowości i korzystania z nich w różnych sytuacjach. Jest to istotne w nauce liczenia oraz pozwala zrozumieć sens mierzenia.
3. Kształtowanie umiejętności liczenia, a także dodawania i odejmowania: od liczenia na konkretnych przedmiotach przez liczenie na palcach do rachunku pamięciowego.
4. Wspomaganie rozwoju operacyjnego rozumowania, którego celem jest przygotowanie dziecka do zrozumienia pojęcia liczby naturalnej.
5. Rozwijanie umiejętności mierzenia długości; potrzebnej nie tylko w szkole, lecz także w życiu codziennym.
6. Klasyfikacja, czyli wprowadzenie dzieci do zadań o zbiorach i ich elementach.
7. Układanie i rozwiązywanie zadań arytmetycznych doskonalących kolejne umiejętności rachunkowe dzieci.
8. Zapoznanie dzieci z wagą i sensem ważenia.
9. Mierzenie płynów.
10. Intuicje geometryczne obejmujące kształtowanie pojęć geometrycznych i układanie szlaczeków.
11. Konstruowanie przez dzieci gier matematycznych, co wzmacnia odporność emocjonalną i rozwija zdolność do wysiłku intelektualnego.
12. Zapisywanie czynności matematycznych za pomocą znaków ($<$, $>$, $+$, $=$)

(Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 1997).

Dwanaście wymienionych kręgów tematycznych - zdaniem autorki - należy realizować w podanej kolejności, zgodnie z zasadą stopniowania trudności oraz uwzględnieniem prawidłowości rozwojowych małego dziecka.

W podsumowaniu należy stwierdzić, że prowadzona w przedszkolach edukacja matematyczna powinna:

- dążyć do tego, by wszystkie dzieci osiągnęły dojrzałość do uczenia się matematyki;
- rozwijać aktywną postawę intelektualną wobec sytuacji problemowych;
- rozwijać język, spostrzegawczość, inwencję i pomysłowość w rozwiązywaniu zadań;
- rozwijać i rozbudzać naturalną ciekawość dziecka i jego chęć poznawania otaczającej rzeczywistości;
- stwarzać atmosferę stymulującą do zadawania pytań oraz do rozwoju umiejętności liczenia, a także dodawania odejmowania;
- wspomagać rozwój operacyjnego rozumowania;
- wykorzystywać wrodzoną potrzebę twórczości dzieci;
- mieć na uwadze naturalny rozwój operacji myślowych dziecka i jego zainteresowania;
- opierać się na osobistych doświadczeniach dziecka;
- wpłatać ćwiczenia matematyczne w najróżniejsze sytuacje pozornie nie matematyczne np. zabawy ruchowe i badawcze, czynności porządkowe, działalność plastyczno-konstrukcyjną oraz muzyczną; chodzi o dostarczenie dziecku jak największej liczby konkretnych doświadczeń niezbędnych do ukształtowania podstawowych pojęć matematycznych i logicznego myślenia;
- zapewnić warunki materialne tj. zgromadzić zabawki i przedmioty typu manipulacyjnego, założyć kącik matematyczny i skrzynie skarbów do działań praktyczno-badawczych, zdobyć środki dydaktyczne np. mozaiki, liczydła;
- stworzyć komfort psychiczny tj. klimat swobody, bezpieczeństwa i akceptacji.

Ostatni postulat jest szczególnie istotny w pracy z dzieckiem, które ma trudności w nabywaniu wiedzy i umiejętności matematycznych. Często wymaga ono pomocy psychologiczno-pedagogicznej, aby uniknąć w przyszłości poważniejszych problemów w nauce matematyki na poziomie szkolnym. Należy jednak pamiętać, że poziom rozwoju poszczególnych dzieci nie jest jednolity. W ocenie stref aktualnego i najbliższego rozwoju umiejętności matematycznych dziecka nie można sugerować się

określonym wiekiem poszczególnych etapów, ponieważ wiek biologiczny podawany jest jedynie szacunkowo i to z dużym przybliżeniem. Zawsze i wszędzie należy dziecko traktować indywidualnie, gdyż każde rozwija się w swoim tempie, osiągając w zróżnicowanym czasie dojrzałość do uczenia się matematyki i myślenie na poziomie operacyjnym.

Ponadto trzeba zaznaczyć, iż przedszkolna edukacja matematyczna będzie zdecydowanie skuteczniejsza, jeśli odbywać się będzie nie tylko w przedszkolu, ale także w domu rodzinnym dziecka, na co zwracają uwagę E. Gruszczyk-Kolczyńska i E. Zielińska (1997). Nauczyciel powinien zachęcić i wskazać rodzicom, jak wykorzystać otaczające dziecko środowisko domowe w nabywaniu prawidłowych doświadczeń i pojęć matematycznych. Rodzic z pewnością okaże się świetnym partnerem nauczyciela w procesie wspomagania rozwoju umiejętności matematycznych dziecka.

3. Założenia systemu pedagogicznego Marii Montessori

W dobie przemian społecznych i ekonomicznych często pojawia się konieczność wprowadzania nowych, alternatywnych (wobec oferty edukacji publicznej) systemów nauczania. Szuka się sposobów ożywienia i głębszej reinterpretacji dotychczasowych praktyk edukacyjnych. Najbardziej znaczące w podejmowanych działaniach innowacyjnych są -zdaniem J. Kruk (2011) ustalenia nurtu tzw. dydaktyki konstruktywistycznej. Na tym gruncie, dzięki badaniom J. Piageta i L. S. Wygotskiego oraz ich kontynuatorów w obrębie psychologicznego i społecznego konstruktywizmu, powstał paradygmat Nowego Wychowania (zwanego w Stanach Zjednoczonych – progresywizmem) i „szkoły aktywnej”.

Zgodnie z nim zrodził się system pedagogiczny M. Montessori, coraz powszechniej wkraczający do polskich przedszkoli i szkół (Tuszyńska-Bogucka, 1999; Surma, 2008, 2011b). Jak pisze S. Guz „jest to jedna z wielkich koncepcji edukacyjnych tworzonych w myśl hasła „szkoła na miarę dziecka” (Guz, 2006, s.15).

Obserwacje i doświadczenia nabyte w obszarze medycyny, psychologii, antropologii i pedagogiki, stały się podstawą do opracowania przez M. Montessori metodyki wychowania i nauczania małych dzieci, szczególnie w wieku przedszkolnym (3-6. rok życia) oraz młodszoszkolnym (7-10. rok życia).

Trzy główne aspekty pedagogiki Montessori są związane z:

- osobą dziecka,
- nauczycielem oraz
- przygotowanym otoczeniem.

Najważniejsze zasady pedagogiki Montessori analizuje wielu polskich i zagranicznych badaczy, m.in. H. Holtstiege (1987, 1991), J. Chattin-McNichols (1992), A. Lillard 2006, K. Skjöld Wennerström i M. Bröderman Smeds (2007), M. Miksza (1994), B. Stein (2003), U. Steenberg (2004), P. Epstein (2012, 2014), S. Guz (1998, 2006, 2008), B. Surma (2008, 2011a, 2011b), B. Bednarczuk (2003, 2007) oraz J. Karbowniczek (2011).

W koncepcji Montessori dziecko traktowane jest podmiotowo, jako istota, która dąży przez własne zaangażowanie i samodzielne działanie do niezależności od dorosłych (Oswald i Schlutz-Benesch, 1990; Miksza, 1994; B. Bednarczuk, 2007; Guz, 2008). To aktywność własna jest w ujęciu Montessori niezbędnym czynnikiem i warunkiem rozwoju, a jak wskazuje S. Guz „dzieci są nieustraszone w swojej aktywności, nie boją się wysiłku, ale stale go poszukują i z wytrwałością realizują podjęte działania” (Guz, 1998, s.18). Udzielając zatem pomocy wychowawczej należy postępować zgodnie z prośbą dziecka: „daj mi czas”, wyrażającą szacunek dla praw rozwojowych (Miksza, 1994; Stein, 2003; podobnie Waloszek, 1998) oraz przesłaniem, że „nikt nie może rosnąć za dziecko, to ono samo buduje siebie i swoje człowieczeństwo” (Guz, 1998, s.18).

W praktyce szkolnej takie stanowisko jest zgodne z teorią J. Piageta, według którego spontaniczna lub stymulowana przez nauczyciela aktywność dziecka prowadzi do jego intelektualnej autonomii. R. Michalak twierdzi za konstruktywistami, że „uczeń w wyniku eksploracji otaczającego świata tworzy własną wiedzę, która jest użyteczna w przyszłym działaniu” i daje mu „poczucie skuteczności nawet w sytuacjach bardzo trudnych” (Michalak, 2011, s.148). G. Badura-Strzelczyk wskazuje jednoznacznie, że „uczniowie powinni tak często i tak długo, jak to tylko możliwe, zdobywać wiedzę poprzez osobiste, konkretne działania, doświadczenia. Tylko wtedy, kiedy uczeń potrafi wyjaśnić innym to, czego dowiedział się w wyniku swoich osobistych działań, można stwierdzić, że nowo zdobyta wiedza jest w jego umyśle w wieloraki sposób utrwalona i zapamiętana” (Badura-Strzelczyk, 2008, s.4).

B. Dudel i J. Szada-Borzyszkowska dodają „w myśl podejścia konstruktywistycznego uczeń powinien aktywnie przetwarzać lub wykorzystywać wypracowane w trakcie

interakcji społecznych informacje i narzędzia (...) do budowania własnych, nowych lub modyfikowania istniejących struktur poznawczych” (Dudel i Szada-Borzyszkowska, 2013, s.103; też Loeffler, 1992). Nie można jednak zgodzić się z opinią J. Kruk, która uważa, że „ta aktywność ma charakter jednostkowy, gdyż uczący się jest sam i nie konsultuje swych spostrzeżeń z rówieśnikami” (Kruk, 2011, s.499).

Bardzo ważnym założeniem w pedagogice Montessori jest stwierdzenie, że każde dziecko jest inne i powinno rozwijać się zgodnie z zawartym w tzw. „psychicznym zarodku” indywidualnym „planem rozwojowym” (Loeffler, 1992; Bednarczuk, 2002, 2007; Skjöld Wennerström i Bröderman Smeds, 2007; Tuszyńska-Bogucka, 1999; Guz, 2006; Surma, 2008). Tworzą go możliwości, kompetencje i umiejętności dziecka, które umożliwiają samodzielną i najbardziej efektywną naukę. Dziecko jest zatem podmiotem i bohaterem swojej własnej historii, bo ma w sobie wpisany plan własnego życia (Holtstiege, 1991; Schmutzler, 1993; Miksza, 1994; Steenberg, 2004; Guz, 2006, 2008; Bednarczuk, 2007; Surma, 2008, 2011a). M. Montessori dowodzi, że dziecko jest zdolne do budowania niezależnej osobowości, potrafi swobodnie rozwijać swe uzdolnienia, zainteresowania i mocne strony. „Oznacza to, że dziecko swobodnie wybiera zajęcie i oddaje się mu tak długo, jak długo tego chce. Wybór dziecka wyrasta z jego wewnętrznych potrzeb i pragnień, a pragnienia te zostają zaspokojone, gdy dziecko koncentruje się na wybranym zadaniu” (Epstein, 2014, s.119). Ten proces normalizacyjny M. Montessori nazywała „aktywnym samourzeczywistnieniem” (Schmutzler, 1993).

Zatem pedagogika montessoriańska opiera się na tym, co interesuje dziecko, co pobudza jego ciekawość, sprzyja jego uniesieniom i sprawia mu satysfakcję, a tym samym prowadzi do sukcesu. J. Chattin-McNichols dodaje, że „struktura i treść edukacji powinny być zdeterminowane potrzebami dziecka, a nie tym, co według społeczeństwa dziecko wiedzieć powinno” (Chattin-McNichols, 1992, s.37)

Celem metody Montessori jest przygotowanie wychowanka do samodzielnego życia przez wspieranie jego potencjalnych możliwości (Stein, 2003). Wychowanie w koncepcji Montessori ma zatem charakter pośredni (Surma, 2008, 2011a). Na dorosłych nakłada natomiast obowiązek zorganizowania takiego otoczenia w domu, w przedszkolu i w szkole, aby wesprzeć indywidualny rozwój dziecka.

Właściwie przygotowane otoczenie jest podstawowym pojęciem w pedagogice montessoriańskiej (porównaj Holtstiege, 1991; Miksza, 1994; Guz, 1998, 2006, 2008,

Stein, 2003; Albinoska i współ., 2008; Steenberg, 2004; Bednarczuk, 2007; Surma, 2008, 2011a, 2011b).

Zgodnie z założeniami teorii Montessori, aby zapewnić dziecku wszechstronny rozwój i aktywność, należy je umieścić w bogatym, dobrze zorganizowanym środowisku wychowawczym, które będzie dostosowane do jego potrzeb oraz możliwości. „Środowisko to powinno z jednej strony wychodzić naprzeciw rozwijającym się potrzebom dziecka, a z drugiej zaś pozwalać je dziecku swobodnie i bez przeszkód realizować” (Guz, 1998, s.18). Odpowiednio przygotowane otoczenie stanowi podstawowy warunek osiągania przez dziecko pełnego samorozwoju, samowychowania i życiowej niezależności.

W tak przygotowanym środowisku muszą być zawarte „impulsy” właściwe dla wrażliwych faz, pobudzające dziecko do działania, aby jak najczęściej mogło doświadczać polaryzacji uwagi, która weszła do historii pedagogiki pod nazwą „fenomenu Montessori”. Swoje obserwacje na temat polaryzacji uwagi dziecka w systemie Montessori przedstawiają P. Oswald i G. Schlutz-Benesch (1990), H. Holtstiege (1987), B. Stein (2003), P. Epstein (2014), S. Guz (2006), B. Bednarczuk (2007), B. Surma (2008, 2011a) oraz U. Steenberg (2004). Ten ostatni pisze: „dla Montessori polaryzacja uwagi jest czymś więcej niż tylko kognitywnym procesem, który dąży do rozwijania intelektualnych zdolności przyswajania. Jest to raczej podstawa tworzącego osobowość zazębiania się i współdziałania ciała i duszy, całościowy, właściwy dziecku proces rozwoju” (Steenberg, 2004, s.16). W czasie skoncentrowanej pracy dziecko zdobywa nie tylko wiedzę, lecz wzmacnia również poczucie własnej wartości, uczy się radzenia sobie z rzeczywistością oraz zdobywa kompetencje społeczne. Dzięki przyzwyczajeniu do skupienia w działaniu trenuje wytrwałość, dążenie do wyznaczonego celu, niezawodność oraz gotowość do podejmowania wysiłku. Skutki „polaryzacji uwagi” są, więc o wiele bardziej różnorodne i trwałe niż nakaz, aby dziecko skupiło się w pracy. Obserwacje M. Montessori dowodzą, że w czasie skoncentrowanej pracy „dziecko staje się spokojne, zajęte, promienieje szczęściem, zapomina o sobie i, w konsekwencji, obojętne są mu nagrody czy materialne gratyfikacje” (Montessori, 1949/1994, s.241).

Przygotowane otoczenie – jak wskazano - ma być pomocą dla dziecka w rozwoju, ma być drogowskazem podejmowanych działań, które prowadzą do rozwoju osobowości. Jak pisze S. Guz „przygotowane otoczenie w każdym detalu

fizycznym i psychicznym powinno odpowiadać potrzebom i możliwościom dzieci, pobudzać je do działania, sprzyjać rozwojowi i pomagać w stawianiu się samodzielnymi. Służyć ono powinno rozwijaniu i wzmacnianiu dziecięcej aktywności, uzdolnień, sprawności i zainteresowań aż do pełnego wykorzystania ich potencjału rozwojowego” (Guz 2006, s.25).

Tak rozumiane przygotowane otoczenie można scharakteryzować w trzech aspektach: materialnym, strukturalno-dynamicznym (strategicznym) i osobowym (Guz, 1998, 2008; Skjöld Wennerström i Bröderman Smeds, 2007; Bednarczuk, 2007; Surma, 2011a, 2011b).

Strukturalno-dynamiczny (strategiczny) aspekt przygotowanego otoczenia określają pedagogiczne zasady, które dotyczą norm budowy materialnego aspektu otoczenia, w tym pomocy rozwojowych Montessori, zasady pracy z nimi oraz zasady porządku i wolności, które wyjaśniają koncepcję przygotowanego otoczenia we wszystkich jego aspektach.

Jako najważniejsze zasady pedagogiczno-wychowawcze zdaniem S. Guz (1998) należy uznać zasadę indywidualizacji, samodzielności, swobody i wolności w działaniu, zasadę ograniczenia oraz ładu i porządku.

Stosowanie zasady indywidualizacji zapewnia dostrzeżenie i wykorzystanie w pracy pedagogicznej okresów szczególnej wrażliwości dziecka na poszczególne rodzaje oddziaływań, które wynikają z osobniczych „planów rozwoju”, determinowanych przez jednostkowe zainteresowania, potrzeby i możliwości dzieci. Realizacji tej zasady, zdaniem S. Guz służą „zróżnicowane wiekiem grupy dzieci, przykładanie dużej wagi do obserwacji dziecka w celu poznania jego rozwoju, określenie aktualnych umiejętności, preferencji, zainteresowań, uzdolnień” (Guz, 1998, s.30).

Zasada samodzielności pozwala dziecku na własną aktywność i poczucie odpowiedzialności za jej efekty. Zapewnia również rozwój indywidualnych uzdolnień i uczenie się realnej oceny swoich umiejętności.

Porządek i ład zapewnia logicznie i przejrzysto zorganizowana sala przedszkolna, w której każdy przedmiot ma swoje stałe miejsce i przeznaczenie oraz spójna budowa materiałów montessoriańskich. Realizacja tej zasady pozwala na selekcjonowanie obfitości wrażeń i doświadczeń dziecka, pomaga mu budować własny ład duchowy oraz rozwija umiejętność porządkowania.

Zasada wolności i swobody w działaniu dotyczy możliwości wyboru przez dziecko rodzaju materiału, miejsca, formy i czasu pracy. Umożliwia „planowanie i przemyślenie swoich czynności, wykonywanie pracy na własną odpowiedzialność, zastanowienie się nad konsekwencjami własnej aktywności dla siebie i innych, sprawdzenie siebie odkrycie swoich mocnych i słabych stron, przeżywanie poczucia sukcesu lub niepowodzenia, które stają się czynnikami wyzwającymi aktywności” (Guz, 1998, s.31).

Jednakże uwzględniając, że małe dziecko jest z natury aktywne i dąży do swojej niezależności, w przedszkolu należy bardzo rozważnie realizować omawianą zasadę i wyraźnie akcentować, że wolność w rozumieniu M. Montessori nie oznacza swawoli. Świadczy o tym również postulowana zasada ograniczenia. Dziecko musi nauczyć się respektować cudzą wolność i nie może przeszkadzać innym w działaniu. Twórczyni systemu wyjaśniała, że „granica swobody powinien być interes zbiorowy, a formą to, co nazywamy grzecznym zachowaniem się i taktownym postępowaniem” (Montessori, 1913, s.67). Ponadto w systemie Montessori istnieje wiele innych ograniczeń, jak np. fakt, że każdy rodzaj materiału występuje tylko w jednym egzemplarzu, trzeba go stosować zgodnie z jego przeznaczeniem i nie wolno niszczyć.

Drugi aspekt przygotowanego otoczenia- osobowy tworzy nauczyciel, grupa dzieci oraz inne osoby biorące udział w wychowaniu np. rodzice.

Istotny staje się tu opis pożądanych cech osobowych wychowawcy, jego roli i zadań. Zagadnienie osobowości wychowawcy – nauczyciela, jego roli i zadań w poglądach M. Montessori podejmowali m.in. tacy autorzy jak W. Bohm, H. Elsner, B. Esser i Ch. Wilde, H. Helming, H. Holtstiege, P. Oswald, H. J. Schmutzler i B. Stein (za: Miksza, 1994). Większość z nich np. B. Gerhard i H. Helming (za: Miksza, 1994) przedstawiają tezę o bardzo szerokim widzeniu nauczyciela podkreślając odpowiedzialność każdego dorosłego człowieka za dziecko oraz konieczność postrzegania dziecka nie tylko w relacjach nauczyciel – dziecko, lecz szerzej w kategorii dorosły – dziecko. W koncepcji Montessori rola nauczyciela ogranicza się do podążania za dzieckiem oraz do mądrego przebywania przy nim (Tuszyńska-Bogucka, 1999; Bednarczuk, 2007; Guz, 1998, 2008; Badura-Strzelczyk 2008; Surma 2011b). Zadaniem wychowawcy jest więc wspieranie rozwoju dziecka, współdziałanie z nim, a także tworzenie wokół niego atmosfery bezpieczeństwa i akceptacji. M. Montessori zauważała, że „nauczyciel musi stać się bierny, aby dziecko mogło stać

się aktywne” (Surma, 2008, s.64). Nauczyciel powinien dawać odczuć swoją obecność tym, którzy jej szukają oraz być niewidzialnym dla tych, którzy znaleźli (Guz, 2006, 2008). W stosunku do dziecka odnoszącego sukcesy w działaniu powinien zamienić się z nauczyciela w obserwatora, z osoby mówiącej w osobę słuchającą, z osoby przekazującej wiedzę w osobę uczącą się (Tuszyńska-Bogucka, 1999; Guz, 2006, 2008; Bednarczuk, 2007; Surma, 2008).

Rola nauczyciela polega na stymulowaniu aktywności i podtrzymywaniu wewnętrznej motywacji do samodzielnego zdobywania przez dziecko wiadomości i umiejętności, ukazywania sposobów wykorzystywania materiałów. U. Steenberg twierdzi, że w metodzie Montessori „nauczyciel nie kształci i nie poucza dziecka, lecz jest jego pomocnikiem” (Steenberg, 2004, s.35), a S. Guz dodaje, iż „ma on nie tyle uczyć, co podążać za dzieckiem” (Guz 1998, s.18). A zatem nauczyciel montessoriański postrzegany jest jako „sługa umysłu”, którego zadanie polega na udzielaniu dzieciom pomocy tak, „aby mogły samodzielnie działać, chcieć i myśleć” (Stein, 2003, s.31).

Nauczyciel jest również twórcą i organizatorem. Razem z dziećmi dba o otoczenie w przedszkolu (szkole), o ład i porządek, o estetykę i kompletność materiałów montessoriańskich. P. Epstein uważa, że „Montessori zdefiniowała rolę nauczyciela także w kategoriach przygotowania otoczenia i chronienia wolności każdego z dzieci” (Epstein, 2014, s.21). W tym kontekście autor zwraca uwagę na jeszcze jedno bardzo istotne zadanie nauczyciela montessoriańskiego, jakim jest wnikliwa obserwacja dziecka, jego rozwoju, postępów w nauce, rodzaju zainteresowań, a także trudności i ewentualnych zaburzeń. „Jeśli zadaniem nauczyciela jest umożliwić każdemu dziecku naukę i jeśli każde dziecko, zgodnie ze swą naturą, ma inne potrzeby i odrębny plan rozwoju, to nauczyciel nie mógłby działać skutecznie, nie mając w pamięci nieskończonej liczby zmiennych w zachowaniu dziecka. Zgodnie z zasadą Montessori: nauczyciel niezdolny do obserwacji nie mógłby uczyć” (Rambusch, 1978, s.15). M. Montessori wyjaśnia: „Z tego właśnie powodu powołałam do życia szkołę, w której dzieci mogą oddawać się swoim zajęciom w sposób spontaniczny, podczas gdy nauczyciel zadowala się rolą obserwatora (...). Im dalszy rozwój dzieci, tym większa konieczność, by nauczyciel ograniczył swą rolę jedynie do obserwacji” (Montessori, 1923/1979, s.101).

Taka koncepcja nauczyciela jest zgodna z założeniami nowoczesnych teorii uczenia się i zalecanym modelem nauczania, który w centrum stawia ucznia aktywnie

tworzącego własną wiedzę, a zadanie nauczyciela „polega na stymulacji, ukierunkowaniu i podtrzymaniu aktywności ucznia poprzez organizowanie odpowiednich do tego sytuacji edukacyjnych (Michalak, 2011, s.147). B. Surma wyjaśnia, że nauczyciel „umiejętnie powinien współpracować z dzieckiem, ale się mu nie narzucać, tłumaczyć dziecku i interpretować skomplikowany dla niego świat, prezentować postawę gotowości do pomocy, aby umożliwić mu radość samodzielnej pracy w myśl podstawowej maksymy wzajemnych relacji: „Pomóż mi zrobić to samodzielnie” (Surma, 2011b, s.211).

Trzeci aspekt przygotowanego otoczenia – materialny stanowi budynek (przedszkola lub szkoły), odpowiednio wyposażone sale, pomoce rozwojowe Montessori oraz inne pomoce i przedmioty wspierające rozwój dziecka, które S. Guz (1998) nazywa materiałami uzupełniającymi i praktycznymi.

O materiale rozwojowym, jego cechach i celach piszą m.in. V. Tuszyńska-Bogucka (1999), B. Stein (2003), A. Albinoska i współ. (2008), K. Skjöld Wennerström i M. Bröderman Smeds (2007), S. Guz (1998, 2006, 2008), B. Bednarczuk (2007) oraz B. Surma (2008, 2011a, 2011b). Został on empirycznie opracowany przez autorkę w oparciu o własne doświadczenia oraz osiągnięcia francuskich lekarzy i pedagogów – J. M. Itarda i E. Sequina. M. Montessori celowo nazywała go materiałem rozwojowym, a nie dydaktycznym, gdyż jego rolą jest stymulowanie i wspieranie rozwoju dziecka zgodnego z wrażliwymi fazami (natomiast pomoce dydaktyczne służą nauczycielowi do pokazu w czasie przez siebie ustalonym). Autorka wyróżniła wiele wrażliwych faz, np. w okresie 0-3. roku życia występują wrażliwe fazy na mówienie, chodzenie; w przedziale od 3-6. roku życia pojawia się faza na ruch, porządek, doświadczenia zmysłowe, na zainteresowanie językiem, matematyką, otaczającym światem, pierwszymi kontaktami społecznymi (Stein, 2003, Bednarczuk, 2007). M. Montessori uważała, że dziecko będąc we wrażliwej fazie wykazuje podwyższoną gotowość do ich przyjęcia, co oznacza wyjątkowo duże możliwości nauczania się danej umiejętności, sprawności czy nabycia wiedzy o świecie (Stein, 2003; Surma, 2008). Poglądy M. Montessori potwierdza dużo później M. Przetacznikowa pisząc „zarówno badania eksperymentalne, jak też praktyka pedagogiczna i obserwacje dzieci w naturalnych warunkach wykazują z dużym prawdopodobieństwem, że istnieje jakiś optymalny, najbardziej korzystny okres, w którym uczenie się i wychowanie w danej dziedzinie przynosi najlepsze efekty” (Przetacznikowa, 1973, s.48).

Poszczególne materiały rozwojowe opracowane przez M. Montessori tworzą logicznie uporządkowaną całość programową, stwarzają dziecku okazję do poznawania, doświadczania i przemyśleń (Bednarczuk, 2003, 2007; Guz 1998). Pozwalają one nabywać kolejne umiejętności: od samoobsługowych, takich jak kontrola nad własnym ciałem, poprzez elementarne np. czytanie, pisanie, liczenie aż do umiejętności uniwersalnych typu planowanie, projektowanie czy ocena własnej pracy. „Duże bogactwo, zróżnicowanie i przejrzyste uporządkowanie materiału znajdującego się w przygotowanym otoczeniu (...) sprawia, że dziecko może wybierać działania i rozwiązywać takie problemy, które odpowiadają jego aktualnym potrzebom i możliwościom oraz zainteresowaniom, natomiast rezygnować z wykonywania zadań zbyt łatwych i nieinteresujących lub trudnych w danym momencie” (Guz, 2008, s.79).

Celem pracy z materiałami rozwojowymi jest wprowadzanie dzieci do świata kultury i cywilizacji zgodnie z zasadą: od konkretnego (doświadczenia wielozmysłowego) do abstrakcji, czyli kształtowania pojęć (Surma, 2008; także Guz, 1998, 2008).

B. Bednarczuk podkreśla, że praca z materiałami ukierunkowana jest na wspomaganie rozwoju dziecka. „Jeśli więc uczeń poprawnie wykonuje ćwiczenie, nabrał wprawy i posługuje się materiałem bezbłędnie, to dalsze ćwiczenia z tym materiałem nie mają sensu i powinny ustąpić miejsca innemu, bardziej złożonemu działaniu” (Bednarczuk, 2007, s.43).

Wyróżnia się następujące grupy materiałów montessoriańskich:

- materiały życia codziennego (życia praktycznego);
- materiały sensoryczne;
- materiały matematyczne;
- materiały językowe;
- materiały z edukacji kosmicznej (lub środowiskowej).

Materiał rozwojowy spełnia następujące zasady:

- estetyka,
- atrakcyjność, „zaproszeniowy charakter” - materiał powinien przyciągać uwagę dziecka, absorbować przez dłuższy czas, zachęcać do ćwiczeń;
- izolacja jednej trudności – budowa materiału musi być jasna, jednoznaczna, dotyczyć tylko jednej trudności np. rozróżniania albo koloru, albo kształtu;
- kontrola błędów – materiał musi posiadać element samokontroli, tak, aby dziecko mogło samo zauważyć lub doświadczyć popełniony błąd i go poprawić;

wyróżnia się kontrolę mechaniczną, sensoryczną opartą na porównaniach ze wzorem oraz kontrolę abstrakcyjną;

- ograniczenie materiału – wszystkie materiały znajdujące się w sali są w jednym egzemplarzu; każdy komplet składa się z określonej ilości elementów; określony jest sposób używania materiału;
- stopniowanie trudności, czyli przechodzenie od materiału konkretnego do coraz bardziej abstrakcyjnego, od łatwiejszego do trudniejszego, od działań prostych do bardziej złożonych, od czynności motorycznych, poprzez wyobrażone do czynności umysłowych;
- ciągłość oddziaływań, kontynuacji – poszczególne materiały pośrednio przygotowują dzieci do dalszej nauki np. praca z materiałami sensorycznymi przygotowuje do późniejszych ćwiczeń z materiałami językowymi i matematycznymi (za: Guz, 1998, 2008; Bednarczuk, 2007; Surma, 2011a, 2011b; Epstein, 2014).

W procesie nauczania metodą Montessori wyróżnia się następujące formy organizacyjne pracy:

- praca indywidualna, zwana „swobodną pracą”(Stein, 2003), do której zalicza się lekcję podstawową i trzystopniową lekcję nazw;
- praca grupowa, czyli ćwiczenia koncentracji, lekcje rozwojowe, zwane „wiązanymi lekcjami” np. z wychowania kosmicznego, a także gry z wykorzystaniem materiału rozwojowego oraz trzystopniowe lekcje ogólne;
- praca zespołowa – praca w laboratorium, praca własna z wybranym tematem (Surma, 2008, 2011a).

M. Montessori proponuje także trzy formy lekcji: podstawową, trzystopniową i lekcję ciszy (Surma, 2011b).

Lekcja podstawowa (wprowadzająca, fundamentalna lub prezentacja) to wprowadzenie materiału, pokaz jego zastosowania, czyli sposobu pracy.

Podczas jej prowadzenia szczególnie ważna jest izolacja trudności, tak, aby uwaga dziecka była skoncentrowana wyłącznie na tym, co jest celem lekcji podstawowej. Z tego też względu nauczyciel wyraźnie ogranicza informacje słowne i precyzyjnie demonstruje manipulowanie materiałem. B. Stein zaznacza: „podczas takiej lekcji ważne jest *dokładne posługiwanie się daną rzeczą*. Wprowadzenie materiału wymaga spokoju i czasu. (...) Nauczycielka (...) nigdy nie może popełnić błędu, polegającego na chaotycznym lub niedokładnym przybliżeniu dziecku danego materiału. Sposób jej

pracy stanie się sposobem, w jaki dzieci będą później pracowały z tymi pomocami. Podczas wprowadzania dzieci przejmują nie tylko technikę pracy, lecz również dokładność, spokój i staranność nauczycielki – albo też jej niedbałość, chaotyczność i powierzchowność” (Stein, 2003, s.103). Podobne stanowisko zajmuje P. Epstein pisząc, iż „wyzwaniem jest takie zademonstrowanie pomocy, by przekazać centralną ideę i jednocześnie zaprosić dziecko do ponownego sięgnięcia po nie w celu niezależnych eksploracji i odkryć”(Epstein, 2014, s.61).

Lekcja podstawowa składa się z trzech etapów:

- demonstracji nauczyciela;
- samodzielnych powtórzeń dziecka, dzięki którym nabywa ono nowe umiejętności;
- własnych i nowych ćwiczeń dziecka, kiedy próbuje ono innych od poznanych sposobów pracy z danym materiałem lub łączy kilka różnych ćwiczeń.

B. Bednarczuk wskazuje, że lekcja podstawowa powinna spełniać określone warunki:

- „krótka i zwięzła forma (...);
- prostota i absolutna prawdziwość, oparta na wiedzy zweryfikowanej naukowo;
- przedmiotowość, co oznacza skupienie uwagi dziecka na przedmiocie, a nie na osobie nauczyciela” (Bednarczuk, 2007, s.56).

Kolejną formą zajęć w systemie Montessori jest *trzystopniowa lekcja nazw* (*lekcja trzystopniowa*), czyli lekcja słowna, wprowadzająca nowe słownictwo i pojęcia. Składa się ona z trzech etapów, zwanych stopniami lub krokami (Guz, 1998; Surma, 2008, 2011b; Skjöld Wennerström i Bröderman Smeds 2004).

Pierwszy stopień - asocjacja między spostrzeganiem zmysłowym a nazwą - to podanie nazwy, czyli wskazanie relacji między przedmiotem lub cechą a nazwą, skojarzenie konkretnego z nazwą.

Drugi stopień (rozumienie pasywne) polega na wykonywaniu przez dziecko poleceń, które utrwalają relację między nazwą a przedmiotem. M. Miksza (za: Surma, 2008) określa ten etap fazą przyporządkowywania.

Natomiast trzeci stopień (rozumienie aktywne) to sprawdzenie, czy dziecko potrafi prawidłowo nazwać przedmiot.

Podobnie trzystopniową lekcję nazw analizują K. Skjöld Wennerström i M. Bröderman Smeds mówiąc o zasadzie tzw. trzech kroków lekcyjnych:

- „krok 1: nauczyciel prezentuje coś nowego,
- krok 2: dziecko trenuje nowy materiał,

- krok 3: dziecko używa wyuczonej wiedzy” (Skjöld Wennerström i Bröderman Smeds, 2007, s.88).

Autorki podkreślają, że trzeci krok może nastąpić dopiero wtedy, gdy nauczyciel ma pewność, że dziecko przyswoiło sobie nowe wiadomości tak, aby w dalszej pracy mogło skutecznie i samodzielnie wykonywać ćwiczenia.

B. Surma zauważa, że przebieg trzystopniowej lekcji nazw jest zgodny z psychologiczną koncepcją kodowania informacji. „Pierwszy etap lekcji trzystopniowej to zetknięcie się dziecka z informacją, która może zostać wywołana dowolną sytuacją lub bodźcem odebrany przez zmysły. Okres przechowywania tej informacji jest krótkotrwały (dla wzroku wynosi około sekundy), dlatego w celu jego utrwalenia następuje drugi etap, związany z pamięcią krótkotrwałą, nazywaną też operacyjną. (...). Następnie informacja ta zostaje zmagazynowana w pamięci długoterminowej lub długotrwałej, skąd może być przywoływana w dowolnym momencie – ostatni etap lekcji trójstopniowej” (Surma, 2008, s.63, także 2011a, Guz, 2008).

Charakterystyczną formą pracy w placówkach montessoriańskich są *lekcje ciszy*. Ich celem jest doświadczanie ciszy. Podczas takich zajęć dzieci zamykają oczy, rozluźniają mięśnie, wyciszają się, relaksują i odpuszczają się słuchając spokojnej muzyki lub opowiadania nauczyciela (Guz, 1998). B. Bednarczuk przestrzega jednak, że „cisza nie może być narzuconym z zewnątrz przymusem, zaprzestaniem hałasu (...). Cisza wymaga opanowania ruchów i emocji” (Bednarczuk, 2007, s.57-58; także Surma, 2011b).

Jedną z odmian lekcji ciszy jest *lekcja na linii*, czyli „lekcja ruchu, nauka i doskonalenie równowagi w trakcie ćwiczeń różnego sposobu chodzenia, połączonego z przenoszeniem przedmiotów, np. miseczki z wodą, zapalanej świecy, globusa, dzbanka z kwiatami itp., z reagowaniem na rytm słuchanej muzyki” (Surma, 2008, s.63). Takie ćwiczenia przeprowadza się na namalowanej na podłodze linii w kształcie elipsy.

Do zróżnicowanych form zajęć występujących w systemie Montessori, zwłaszcza w szkołach należą *lekcje rozwojowe*, zwane też „wiązanymi lekcjami” (Stein, 2003). Mają one postać pracy nauczyciela z całą grupą dzieci i dotyczą jednego przedmiotu np. języka polskiego, matematyki czy środowiska. Dobór tematów

zazwyczaj wynika z realizowanego programu nauczania, choć może być też wynikiem pomysłów i rozważań pojawiających się podczas swobodnej pracy dzieci.

B. Bednarczuk (2007) podaje, że lekcje rozwojowe składają się z następujących etapów:

- przygotowania np. przeprowadzenie ćwiczeń, obserwacji czy eksperymentów, które mają rozwinąć motywację dzieci do pracy;
- właściwej prezentacji zagadnienia;
- czasu na przemyślenia i refleksję.

Innym rodzajem zajęć grupowych typowych dla pedagogiki montessoriańskiej są gry z wykorzystaniem *materiału rozwojowego*. Mają one często formę zabawy, której celem jest powtórzenie, utrwalenie określonych ćwiczeń lub „zaprezentowanie materiału, który cieszy się szczególnym zainteresowaniem dziecka, a jednocześnie daje możliwość zaangażowania w ćwiczenie całej klasy lub grupy dzieci” (Guz, 1998, s.33). Nauczyciel ustala i objaśnia reguły obowiązujące w grze, wyznacza dzieciom role, zadania i materiał. Ciekawe gry dydaktyczne można wykorzystać w edukacji matematycznej np. podczas zapoznawania dzieci z liczbą zero czy budową pozycyjnego układu dziesiętkowego.

W literaturze przedmiotu rzadko można spotkać informacje dotyczące metod wychowania i kształcenia w odniesieniu do pedagogiki montessoriańskiej. Wynika to z faktu, że M. Montessori „negowała istotę metody w rozumieniu formowania osobowości dziecka (...). W konsekwencji tego twórczyni omawianego systemu pomijała w swych tekstach fakt stosowania metod wychowania, a metody kształcenia ujmowała jako formy pracy, takie jak lekcja trójstopniowa, lekcja ciszy, lekcja podstawowa i rozwojowa” (Surma, 2008, s.163). Jednakże B. Surma (2008), na podstawie własnych doświadczeń i obserwacji pracy montessoriańskich nauczycieli w Polsce i we Włoszech podjęła się próby wyodrębnienia i scharakteryzowania metod kształcenia w systemie Montessori.

Przeważają wśród nich – zdaniem autorki metody określane przez W. Okonia (2003) jako metody samodzielnego dochodzenia do wiedzy w toku własnej, wszechstronnej aktywności dziecka.

B. Surma (2008) proponuje zaliczyć do nich:

- metody asymilacji wiedzy:
 - rozmowa;
 - pokaz (lekcja podstawowa);

- opis i opowiadanie wraz z eksperymentem i pokazem (opowiadania kosmiczne);
- metoda słowna, czyli trzystopniowa lekcja nazw;
- dyskusja;
- metody samodzielnego dochodzenia do wiedzy:
 - praca z materiałem tekstowym;
 - gry dydaktyczne (np. matematyczne), które mają na celu wzbogacenie aktywności poznawczej, emocjonalnej oraz praktycznej dziecka;
 - indywidualna praca z materiałami rozwojowymi;
 - metoda własnego działania i powtarzania;
 - metoda laboratoryjna;
 - metoda definiowania połączona z obserwacją i działaniem, polegająca na „połączeniu bezpośredniego doświadczenia dziecka z wprowadzanym pojęciem, czyli jego definiowaniem” (Surma, 2008, s.168); w ten sposób wprowadza się np. pojęcie wyspy i jeziora, budowę drzewa, liścia czy kwiatu;
 - metoda znaku i przypowieści stosowana w wychowaniu religijnym;
- metody waloryzujące:
 - inscenizacje;
 - eksponowanie np. taśmy czasu stosowanej w edukacji kosmicznej w celu przedstawienia różnych aspektów rozwoju cywilizacyjnego;
- metody praktyczne:
 - lekcje ciszy;
 - ćwiczenia koncentracji uwagi, czyli zmodyfikowana w polskich placówkach lekcja ciszy;
 - ćwiczenia z materiałem rozwojowym;
 - ćwiczenia ruchowe na linii;
 - gry i zabawy ruchowe.

Wymienione metody są stosowane na wszystkich poziomach edukacji w systemie Montessori. Najczęściej nauczyciele wykorzystują pracę i ćwiczenia z materiałami rozwojowymi w połączeniu z metodą własnego działania i powtarzania oraz z pokazem, czyli lekcję podstawową i trzystopniową lekcję nazw (Surma, 2008).

Również B. Bednarczuk (2007) podjęła problem metod stosowanych w systemie Montessori. Autorka uważa, że w pedagogice Montessori uzasadnione staje się mówienie o metodach uczenia się dziecka i dlatego wyróżnia dwie grupy metod: metody swobodnej pracy dziecka oraz metody wspierania aktywności dziecka.

Do pierwszej grupy metod zdaniem B. Bednarczuk (2007) należą:

- ćwiczenia – wielostronna, celowa i indywidualna praca dziecka, dzięki czemu nabywa ono doświadczenia, umiejętności oraz buduje wiedzę na drodze działania;
- obserwacja – dotyczy zjawisk lub przedmiotów, sytuacji i zdarzeń z codziennego życia, a także działań, które wykonuje nauczyciel podczas wprowadzania materiału;
- praca z materiałem źródłowym np. książkami, czasopismami, nagraniami, programami edukacyjnymi czy pomocami przygotowywanymi przez nauczyciela;
- metoda samodzielnego pokonywania trudności, czyli samodzielne rozpoznawanie i rozwiązywanie problemów w wyniku myślenia i działania;
- metody ekspresyjne, takie jak: metody żywego słowa, improwizacja, socjodramy, metody zadań inspirujących, ekspresji twórczej;
- gry i zabawy dydaktyczne z wykorzystaniem materiału rozwojowego.

Natomiast do metod wspierania aktywności ucznia B. Bednarczuk zalicza metody pośredniego i bezpośredniego wsparcia. „Metody pośredniego wspierania dziecka są istotą postępowania dydaktycznego nauczyciela. Nauczyciel wspiera pracę dziecka, organizując odpowiednie warunki uczenia się w środowisku pracy oraz służąc własnym przykładem (Bednarczuk, 2007, s.53).

W Polsce metoda Montessori wywarła duży wpływ na kształtowanie się systemu przedszkolnego w okresie międzywojennym (Baran i współ., 2002). Mimo szerokiego rozpowszechnienia, żadna placówka nie pracowała jednak wówczas opierając się na założeniach montessoriańskich. Powodem był przede wszystkim brak funduszy na właściwe urządzenie pomieszczeń i ich wyposażenie w materiały Montessori. Niemniej ówczesne placówki wykorzystywały wiele wskazówek włoskiej lekarki w zakresie organizacji i metod pracy z dzieckiem.

Wejście w życie ustawy jędrzejewiczowskiej w 1932 roku zmieniło cele i zadania wychowania przedszkolnego i w konsekwencji doprowadziło do odrzucenia systemów F. Fröbela i M. Montessori (Baran i współ., 2002).

Obecnie po latach zapomnienia metoda Montessori przeżywa swoisty renesans (Baran i współ.; 2002, Surma, 2008). W Polsce powstaje coraz więcej przedszkoli montessoriańskich. Takie placówki funkcjonują w Warszawie, Izabelinie-Hornówku, Płocku, Łodzi, Krakowie, Jarosławiu, Przemyślu, Bydgoszczy, Poznaniu, Sopocie, Gdyni, Świdniku, Bełchatowie, Nowym Sączu, Pruszkowie, Ozorkowie, Morawie k/Strzegomia, Oleśnicy i wielu innych.

Pedagogiką Montessori obejmowane są również dzieci, które nie kwalifikują się jeszcze do przedszkola i dla nich powstają placówki znane jako „Montessori dla Maluchów”.

Aktywnie działa Polskie Stowarzyszenie Montessori z siedzibą w Łodzi i regionalnymi oddziałami w Gorzowie Wlkp. i Lublinie, którego celem jest kultywowanie i rozwój pracy pedagogicznej zgodnie z teorią montessoriańską. Najszerzej prowadzoną działalnością PSM są szkolenia, seminaria i kursy doskonalące w zakresie pedagogiki Montessori. Stowarzyszenie obejmuje patronatem wiele przedszkoli, żłobków i szkół.

Propagowaniem pedagogiki montessoriańskiej zajmuje się również Stowarzyszenie Przyjaciół Montessori w Warszawie.

W 2008 roku w odpowiedzi na rosnące zapotrzebowanie na kursy nauczycieli montessoriańskich powstał Polski Instytut Montessori (PIM). Zadaniem Instytutu jest kształcenie i wspieranie wszystkich, których interesuje pedagogika Montessori.

Na ile skuteczna jest praca z dziećmi metodą Marii Montessori?

Stosowne badania w tym zakresie na gruncie amerykańskim prowadził P. Epstein (2012), od kilku lat związany z Polskim Instytutem Montessori (PIM) jako konsultant i prowadzący zajęcia. Badacz twierdzi, że obecnie dzieci uczące się w szkołach Montessori deklasują swoich rówieśników z innych szkół w znormalizowanych testach stanowych. Dzieci z prywatnych szkół Montessori uzyskują również wysokie wyniki w ogólnokrajowych testach znormalizowanych typu California, Iowa czy Stanford. Autor dodaje, że przejawiają one niesamowite zdolności do wysiłku umysłowego. Gdy tylko są na to gotowe, czytają, piszą i myślą matematycznie. Nie ma dla nich znaczenia zewnętrzny system nagród i motywacji; największą radość i przyjemność znajdują w samym procesie pracy, która prowadzi je ku rozwojowi i samodoskonaleniu. Wraz z upływem czasu dziecko rozwija w sobie dyscyplinę wewnętrzną i pogodny spokój.

W 2006 roku czasopismo „Science” opublikowało wyniki badań porównawczych, które przeprowadzili A. Lillard i N. Else-Quest w Millwaukee w USA. Na kilku płaszczyznach dzieci ze szkoły Montessori przewyższały zdolnościami dzieci uczęszczające do innych szkół. Na podstawie zebranych danych wyraźnie stwierdzono, że dzieci uczone metodą Montessori osiągały lepsze wyniki w nauce nie tylko tradycyjnych przedmiotów, takich jak język ojczysty czy matematyka, ale również wykazywały się lepszą znajomością norm, cechowało je większe poczucie sprawiedliwości i uczciwości (Lillard, 2006).

Również w Polsce metoda Montessori jest przedmiotem wielu badań naukowych. Najintensywniej działa w tym zakresie lubelski oddział Polskiego Stowarzyszenia Montessori oraz Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej. Szczególną uwagę należy zwrócić na prace badawcze S. Guz (1998, 2006), która analizowała osiągnięcia rozwojowe dzieci w okresie przedszkolnym i wczesnoszkolnym w kontekście oddziaływań i doświadczeń edukacyjnych, aby sprawdzić, jakie znaczenie dla rozwoju dzieci ma edukacja w systemie Montessori. Podstawą orzekania o skuteczności tych działań były osiągnięcia rozwojowe dzieci z przedszkoli montessoriańskich w porównaniu z osiągnięciami dzieci kształconych tradycyjnie. Badania przeprowadzono w lubelskich przedszkolach publicznych i w szkole podstawowej. Uzyskane wyniki pozwalają na sformułowanie następujących wniosków ogólnych:

- system Montessori zapewnia korzystniejsze warunki dla rozwoju zdolności sensoryczno-motorycznych i ich integracji dzieci w wieku przedszkolnym;
- dzieci z oddziałów Montessori uzyskują lepsze wyniki w zakresie rozwoju umysłowego i sprawności językowych, szczególnie na poziomie przedszkolnym;
- edukacja w systemie Montessori sprzyja kształtowaniu się stylu poznawczego dzieci w wieku wczesnoszkolnym, a także poczucia kontroli wewnętrznej dzieci przedszkolnych;
- istotnie lepsze rezultaty uzyskiwały dzieci montessoriańskie w większości wskaźników dotyczących kompetencji szkolnych, takich jak orientacja w świecie przyrody czy umiejętność czytania ze zrozumieniem; osiągały również lepsze wyniki w ogólnopolskich sprawdzianach umiejętności szkolnych dla szóstoklasistów;

- system Montessori stwarza korzystniejsze niż system tradycyjny warunki do kształtowania adekwatnej samooceny oraz wzrostu wraz z wiekiem poziomu aspiracji dzieci w młodszy wieku szkolnym (Guz, 2006, 2008).

Jeśli chodzi o rozwój społeczny i kształtowanie się osobowości, to S. Guz uważa, że „dzieci z lubelskich oddziałów Montessori, podobnie jak dzieci amerykańskie, są bardziej niezależne, samodzielne i autonomiczne w działaniu, czują się bardziej podmiotowo traktowane przez nauczyciela niż dzieci w oddziałach prowadzonych według modelu powszechnie stosowanego” (Guz, 2006, s.256).

Stymulujące oddziaływanie systemu Montessori na rozwój emocjonalno-społeczny dzieci przedszkolnych dowodzą również badania V. Tuszyńskiej-Boguckiej (1999). Autorka wskazuje, że w przedszkolu montessoriańskim dzieci są bardziej swobodne i spontaniczne. „Nieprawdą więc okazały się zarzuty, formułowane pod adresem systemu Montessori, jakoby hamował on rozwój spontaniczności dzieci, objętych jego wpływem” (Tuszyńska-Bogucka, 1999, s.105). Ponadto dzieci z grup montessoriańskich postrzegają swego nauczyciela bardziej realistycznie, naturalistycznie, podczas, gdy ich rówieśnicy z przedszkoli masowych działają bardziej intencjonalnie, zadaniowo. Dzieciom montessoriańskim towarzyszy mniejsze napięcie emocjonalne, nie czują nacisku czy przymusu ze strony nauczyciela. „System Montessori zdaje się sprzyjać powstawaniu dość charakterystycznego wizerunku nauczyciela – jako świadka, obserwatora dziecięcych zmagania, prac i zabaw. Stoi on nieco z boku, nie wywiera presji na decyzje i wybory dzieci, rzadko wchodzi w osobiste kontakty z dziećmi. Jest on jednak gotowy, by udzielać rad i pomagać im, gdy tego potrzebują” (Tuszyńska-Bogucka, 1999, s.107).

Efekty wychowania i kształcenia w systemie Montessori były również przedmiotem badań B. Surmy przeprowadzonych w latach 2000-2004 w wybranych celowo przedszkolach i szkołach w Warszawie, Lublinie, Łodzi i Krakowie. Uzyskane wyniki potwierdziły realizację podstawowych założeń systemu takich, jak: rozwijanie poczucia własnej wartości, samodyscypliny, odpowiedzialności, koncentracji uwagi, niezależności w działaniu oraz wrażliwości na ciszę, dobro i piękno. Badani nauczyciele wskazywali również pozytywny wpływ metody Montessori na nabywanie przez dzieci nowych wiadomości i umiejętności oraz na ich rozwój społeczny, przejawiający się w postawach współdziałania w grupie, w udzielaniu pomocy innym czy w postawie opiekuńczości wobec młodszych dzieci (Surma, 2008).

Z kolei B. Bednarczuk (2007) przeprowadziła badania dotyczące funkcjonowania dziecka w klasie Montessori: jego samopoczucia, uzyskiwanych wyników w nauce oraz poziomu myślenia dywergencyjnego. Autorka stwierdza, że „dzieci uczące się w systemie Montessori w pełni realizują wymagania standardów egzaminacyjnych, a poziom ich umiejętności i wiadomości nie odbiega od poziomu, jaki reprezentują rówieśnicy kształceni w systemie szkoły powszechnej. Dzieci nie tylko dobrze się czują w swojej szkole, ale i dobrze się uczą” (Bednarczuk, 2007, s.93). Analizując cechy myślenia dywergencyjnego autorka dowodzi, że dzieci montessoriańskie uzyskiwały wyższe wyniki niż ich rówieśnicy ze szkół masowych w zakresie płynności słownej, skojarzeniowej i ekspresyjnej oraz giętkości i oryginalności myślenia.

Na pozytywny wpływ metody Montessori w zakresie rozwijania umiejętności rozwiązywania problemów praktycznych zwraca uwagę również J. Andrzejewska (2011). Autorka badając kompetencje poznawcze dzieci pięcioletnich analizowała postępowanie dzieci podczas czynności badawczej. Zaobserwowany fakt, że największą aktywnością podczas badania cech obiektów wykazały dzieci z Lubelszczyzny J. Andrzejewska tłumaczy w następujący sposób: „może to być spowodowane wykorzystywaniem w znacznym zakresie w pracy przedszkoli metody M. Montessori, której jednym z założeń jest rzeczywista działalność dziecka w różnych sytuacjach dnia codziennego” (Andrzejewska, 2011, s.336).

4. Nauczanie matematyki w aspekcie metody Montessori

Wśród montessoriańskich materiałów rozwojowych bardzo ważne miejsce zajmują materiały matematyczne. B. Stein (2003) zauważa, że rozwijanie „matematycznego ducha” było dla Montessori szczególnie ważnym celem. Twórczyni metody uważała bowiem, że w każdym człowieku tkwi zmysł matematyczny, dzięki któremu jest on „jedyną istotą, która potrafi myśleć matematycznie, wyciągać wnioski, badać, kształtować własną wyobraźnię i możliwości uogólniania” (Skjöld Wennerström i Bröderman Smeds, 2007, s.145). Matematyka w metodzie Montessori stanowi bardzo ważny obszar edukacyjny, którego celem jest „uczenie dziecka samodzielności, rozwijania, zainteresowania matematyką, wprowadzanie w świat liczb, odkrywania znaczenia kodowania i działań numerycznych, a także podejmowania celowych działań

zmierzających do rozwiązywania zadań matematycznych i odporności emocjonalnej” (Surma, 2013, s.55).

Pragnienie małego nawet dziecka, by porządkować różnorodne zjawiska oraz jego zdolność do odkrywania kryteriów takiego porządkowania wynika - zdaniem M. Montessori z zależności pomiędzy prawami natury a wrodzonymi możliwościami umysłu człowieka. Dzieci w przedszkolu montessoriańskim spotykają się po raz pierwszy z matematyką już w wieku 2,5 lat dzięki materiałom sensorycznym, np. czerwone patyki są przygotowaniem do patyków liczbowych, a ćwiczenia z tabliczkami dotykowymi rozwijają zmysł dotyku potrzebny do pracy z cyframi dotykowymi (Surma 2013). „Maria Montessori, wzorując się na metodach liczenia stosowanych przez naszych przodków, stworzyła materiał matematyczny, w którym dzieci używają rąk do zrozumienia wiedzy matematycznej” (Skjöld Wennerström i Bröderman Smeds, 2007, s.123).

Treści matematyczne są w metodzie Montessori doświadczane zawsze poprzez aktywne działanie dziecka. U. Steenberg wyjaśnia: „dziecko aktywnie poznaje cyfry, system dziesiątkowy (...).A przy tym samo określa swoje tempo” (Steenberg, 2004, s.53). Na podstawie tych konkretnych czynności opartych na materiale dziecko stopniowo osiąga poziom myślenia abstrakcyjnego i np. liczy w pamięci. K. Skjöld Wennerström i M. Bröderman Smeds (2007) opierając się na własnych obserwacjach dowodzą, że poznawanie pojęć matematycznych poprzez praktyczne ćwiczenia pobudza ciekawość dziecka i jego chęć do dalszej nauki. Praktyczne doświadczanie i porównywanie wielkości, objętości, wymiarów przedmiotów, ułatwia lepsze poznanie podstawowych reguł matematycznych, choć dziecko często nie ma świadomości tego zjawiska.

Materiały matematyczne zapewniają realizację celów, które można podzielić na cztery grupy tematyczne:

1. umiejętności liczenia, przeliczania w zakresie 1-10, czyli:
 - „doświadczenie liczby, nazwy i jej stałości;
 - poznanie sekwencji liczb;
 - poznanie graficznego symbolu ilości, czyli cyfry;
 - przygotowanie do pisania cyfr;
 - poznanie związku pomiędzy ilością i symbolem;
 - wprowadzenie do dodawania i odejmowania w zakresie od 1 do 10;

- kształtowanie umiejętności porównywania ilości – poznanie znaków „<”, „>”, „=”;
- zapoznanie z zerem i kształtowanie pojęcia zera jako zbioru pustego;
- kształtowanie pojęcia liczby w aspekcie mnogościowym;
- poznanie pojęcia parzystości i nieparzystości liczb;
- tworzenie zbiorów od 1 do 10” (Surma, 2008, s.117);

Do tej grupy materiałów montessoriańskich należą: patyki liczbowe, cyfry dotykowe, wrzeciona i żetony².

2. wprowadzenie pozycyjnego układu dziesiętkowego, w tym:

- zapoznanie z zasadami budowy pozycyjnego układu dziesiętkowego;
- wykonywanie działań matematycznych w systemie dziesiętkowym;
- poznanie znaków dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia;
- początkowe liczenie w pamięci;
- rozszerzenie zakresu liczbowego do 99.

Realizacji wskazanych zadań służą ćwiczenia ze złotym materiałem, znaczkami, tablicą kropek, małym, dużym i złotym liczydłem, dużą tablicą mnożenia, zestawem do dzielenia liczb wielocyfrowych, a także zabawa w bank (bałagan).

3. wprowadzenie liczb do 1000 z celami szczegółowymi:

- rozwijanie umiejętności przeliczania pełnymi dziesiątkami i setkami;
- przyporządkowywanie symbolu graficznego liczby do podanej ilości;
- kształtowanie pojęcia stałości liczby.

Materiałami z tej grupy są: kolorowe liczby, tablica Sequina nr 1 i 2, krótkie łańcuchy kolorowych liczb, łańcuch setki, tablica setki, łańcuch tysiąca oraz złoty materiał.

4. wykonywanie działań na małych liczbach od 1 do 100, czyli:

- rozwijanie umiejętności dodawania liczb z przekroczeniem progu dziesiętkowego;
- wykonywanie obliczeń poprzez dopełnianie do 10;
- konkretyzowanie przemienności dodawania;
- ćwiczenie umiejętności odejmowania od 0 do 18;
- doskonalenie rachunku pamięciowego;

² W literaturze przedmiotu można spotkać nieco odmienne nazwy poszczególnych materiałów, co wynika z rozbieżności w tłumaczeniach z języka włoskiego, niemieckiego czy holenderskiego

- nauka tabliczki mnożenia w zakresie 100;
- geometryczna interpretacja mnożenia i przemienności mnożenia;
- przygotowanie do potęgowania liczb;
- wyznaczanie dzielników liczb od 1 do 81;
- wskazanie związków między mnożeniem i dzieleniem (za: Surma, 2008, 2013).

Do tej grupy materiałów montessoriańskich należą: wąż dodawania, paskowa tablica dodawania, zestaw tablic dodawania, wąż odejmowania, paskowa tablica odejmowania, zestaw tablic odejmowania, paciorkowa tablica mnożenia, zestaw tablic mnożenia, paciorkowa tablica dzielenia oraz zestaw tablic dzielenia.

Materiały matematyczne są wprowadzane w określonej kolejności, którą warunkuje specyfika przedmiotu i konieczność stopniowania trudności. Każdy następny materiał różni się od poprzednich stopniowo zwiększającym się poziomem trudności i wymaganym myśleniem abstrakcyjnym. S. Guz wskazuje wyraźnie, że konieczne jest, aby: „dzieci stopniowo przechodziły od działań na materiale konkretnym do działań na materiale coraz bardziej abstrakcyjnym; od czynności na samych konkretach poprzez poznawanie symboli matematycznych i kojarzenie ich z konkretnymi, do działań na materiale całkowicie abstrakcyjnym, symbolicznym” (Guz, 1998 s.98).

Szczegółowej analizy materiału matematycznego dokonują P. Oswald i G. Schlutz-Benesch (1990), A. Albinoska i współ. (2008), U. Steenberg (2004), B. Stein (2003), S. Guz (1998), K. Skjöld Wennerström i M. Bröderman Smeds (2007) oraz B. Surma (2013).

W celu ukazania specyfiki pracy z materiałami rozwojowymi przedstawiony zostanie opis metodyczny wybranych materiałów wykorzystywanych w pracy z dzieckiem w wieku przedszkolnym.

Patyki liczbowe (inna nazwa: numeryczne drążki, klocki liczbowe, sztangi liczbowe, belecзки liczenia)

Opis materiału:

- dziesięć drewnianych patyków postopniowanych pod względem długości; najkrótszy patyk (czerwony) ma 10 cm długości. Każdy następny jest o 10 cm dłuższy. Najdłuższy patyk ma zatem 100 cm, czyli 1m długości. Wszystkie patyki - od drugiego do dziesiątego podzielone są na dziesięciocentymetrowe odcinki pomalowane na przemian na niebiesko i na czerwono.

- drewniany pojemnik z dziesięcioma tabliczkami, na których są symbole liczb od 1 do 10 (w kolorze czerwonym).

Wiek: od 2,5 do 4 lat.

Cele bezpośrednie:

1. wprowadzenie pojęcia liczby w zakresie 20 w aspekcie:
 - mnogościowym (kardynalnym) – wartość liczby;
 - porządkowym (pojęcie liniowej wartości liczby, relacje między liczbami w uporządkowanym ciągu liczbowym, rozumienie kolejności);
 - miarowym;
 - algebraicznym (poznanie podzbiorów danej liczby, rozkład liczby);
 - symbolicznym (kojarzenie liczby z jej symbolem graficznym);
2. przygotowanie do liczenia powyżej 10.

Cele pośrednie:

1. kształtowanie poczucia dokładności; rozwijanie koncentracji uwagi na zadaniu jako umiejętności uczenia się;
2. wykonywanie prostych działań matematycznych: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie liczb;
3. poznanie symboli działań matematycznych i relacji między liczbami;
4. poznanie niektórych praw matematycznych np. przemienność dodawania i mnożenia.

Kontrola błęd:

- najmniejszy element
- kontrola wzrokowa,
- kontrola dotykowa,
- abstrakcyjne rozumowanie.

Język nazw: liczebniki od 1 do 10

Praca z patykami liczbowymi jest szczególnie ważna w przypadku dzieci, które krótko koncentrują się na zadaniu i szybko rozpraszają uwagę nawet pod wpływem słabego czynnika zakłócającego. Ćwiczenia z tym materiałem odbywają się na dywaniku, a więc w pewnej izolacji od rówieśników. Ponadto materiał ten jest szczególnie przydatny w pracy z dziećmi z zaburzeniami małej motoryki, z ograniczeniami sprawności manualnej i problemami z koordynacją wzrokowo-ruchową.

Wprowadzenie materiału (lekcja podstawowa):

Nauczyciel przygotowuje (na stoliku lub na dywaniku) trzy najkrótsze patyki. Demonstruje sposób przenoszenia patyków - pojedynczo, oburącz, trzymając oba końce patyków. Pozwala to dziecku odczuć zwiększającą się długość patyka.

Nauczyciel udziela *trzystopniowej lekcji nazw*.

1.asocjacja między spostrzeganiem zmysłowym a nazwą

Nauczyciel wskazuje i dotyka najkrótszy czerwony patyk podając nazwę: „*To jest jeden*”.

Zachęca dziecko do powtórzenia czynności i wypowiedzenia nazwy liczebnika. Potem najkrótszym patykiem przelicza kolejny, kładąc nacisk na ostatni liczebnik: „Jeden, dwa”. Następnie przesuwając dłoń po całym patyku mówiąc: „dwa”. Nauczyciel chwytając oburącz patyk, zwraca się w stronę dziecka ukierunkowując jego uwagę i podaje nazwę: „*To jest dwa*”. Dziecko powtarza czynności nauczyciela. Tak samo wprowadzany jest kolejny patyk – trzy.

2.poznanie przedmiotów wg nazwy (rozumienie pasywne)

Nauczyciel prosi: „*Podaj mi jeden*”, „*Daj mi trzy*”, „*Położ dwa na stole*” itp. Takie ćwiczenia należy wielokrotnie powtórzyć. W poleceniach nie zachowuje się kolejności liczb. Powinny one być jednoznaczne, proste i dotyczyć jednego patyka. Ten etap lekcji pozwala także na sprawdzenie, czy dziecko rozumie pojęcia określające stosunki przestrzenne oraz zaspokaja jego potrzebę ruchu.

3. wywoływanie nazwy wg przedmiotów (rozumienie aktywne)

Nauczyciel pyta: „*Ile to jest?*” wskazując na poszczególne patyki, nie zachowując kolejności liczb. Dziecko odpowiada na pytania nauczyciela.

Propozycje ćwiczeń wariacyjnych:

1. Przeliczanie dłuższych patyków za pomocą najkrótszego od lewej do prawej zaczynając od:
 - a. patyka najkrótszego,
 - b. patyka najdłuższego.
2. Przeliczanie patyków od góry do dołu (pionowo).
3. Przeliczanie patyków od dołu do góry.
4. Wskazywanie i nazywanie patyków podanych przez nauczyciela
5. Wskazywanie i nazywanie patyków dłuższych (krótszych) od podanego przez nauczyciela.

6. Wskazywanie i nazywanie patyków dłuższych lub krótszych o 2, 3, 5 od podanego przez nauczyciela.
7. Wyszukiwanie przedmiotów o długości podanego patyka liczbowego.
8. Składanie patyków np. dwóch najkrótszych, dwóch najdłuższych, lub wszystkich patyków.
9. Odrysowywanie i kolorowanie patyków liczbowych.
10. Ułożenie patyków z góry na dół pionowo od lewej 10, 9, 8 i ukazanie podziału liczb na parzyste i nieparzyste.
11. Układanie kompozycji z patyków np. labirynt, ślimak, słoneczko i przeliczanie każdego patyka.
12. Dodawanie i odejmowanie w zakresie 10.
13. Wprowadzenie do mnożenia liczb.
14. Tworzenie liczb drugiej dziesiątki od 11 do 19.
15. Dodawanie i odejmowanie w zakresie 19.

Cyfry dotykowe (inna nazwa: cyfry z papieru piaskowego, cyfry z papieru ściernego, szorstkie cyfry) umożliwiają poznanie kształtu cyfr na drodze doznania sensorycznego – za pomocą opuszków palców.

W ten sposób dziecko poznaje świat pisanych cyfr, a także zostaje przygotowane do pisania pod względem sensomotorycznym – doskonali koordynację mięśniową, rozwija precyzję i dokładność działania.

Ćwiczenia z wrzecionami (inna nazwa: skrzynki z patyczkami, wrzecionami matematycznymi) pozwalają na utrwalenie pojęcia liczby w aspekcie symbolicznym, mnogościowym i porządkowym oraz na poznanie i zapamiętanie sekwencji liczb. Podczas ćwiczeń dziecko ma możliwość:

- widzieć różną liczbę związanych przeliczonych wrzecion,
- słyszeć w czasie przeliczania nazwy liczebników,
- czuć w dłoni wzrastającą liczbę wrzecion,
- przeliczać liczbę wrzecion,

a więc doświadczać liczby wielozmysłowo. Szczególnie ważnym zadaniem tego materiału jest kształtowanie pojęcia liczby zero jako zbioru pustego.

Żetony (inna nazwa: czerwone kółeczka) pozwalają wizualizować liczbę przyporządkowywaną do cyfr oraz wprowadzić pojęcie liczb parzystych i nieparzystych.

Innym zagadnieniem realizowanym bardzo efektywnie poprzez pracę na materiałach montessoriańskich jest wprowadzenie do budowy pozycyjnego układu dziesiętkowego. Służy do tego zestaw, zwany **złotym materiałem** (inna nazwa: złote perły). Tworzą go pojedyncze złote perełki oznaczające jedność, druciki zawierające po dziesięć złotych perełek oznaczające dziesiątki, kwadraty ze stoma perełkami oznaczające setki oraz sześciany zbudowane z tysiąca perełek oznaczające tysiące. Do zestawu należą również karty liczbowe z symbolami liczb od 1 do 9000 we właściwym kolorze i w odpowiedniej długości. Poszczególne elementy wprowadzane są kolejno aż dziecko zapozna się z nazwami, ilościami i kategoriami. Rygorystycznie przestrzegana jest zasada wprowadzania nowych zagadnień w oparciu o treści już znane oraz przechodzenie od materiału konkretnego do symboli.

Pierwszym ćwiczeniem jest praca z **tacką demonstracyjną**.

Opis materiału:

- jedna złota perełka - oznacza jedność;
- drucik zawierający dziesięć złotych perełek - oznacza dziesiątkę;
- kwadrat zawierający sto złotych perełek połączonych drucikami – oznacza setkę;
- sześcian zawierający tysiąc złotych perełek – oznacza jedność tysięcy;
- drewniana tacka
-

Wiek: od 5 roku życia

Cel: poznanie budowy pozycyjnego układu dziesiętkowego.

Kontrola błęd: nauczyciel lub inne dziecko.

Język nazw: pojęcia jedność, dziesiątka, setka, jedności tysięcy jako rzędów w pozycyjnym układzie dziesiętkowym.

Wprowadzenie materiału:

Nauczyciel udziela *trzystopniowej lekcji nazw*.

1. asocjacja między spostrzeganiem zmysłowym a nazwą – podanie nazwy liczebnika.

Nauczyciel bierze złotą perełkę i podaje nazwę: „*To jest jeden. To jest jedna jedność*”. Nauczyciel stosuje oba te sformułowania. Dziecko powtarza czynność nauczyciela. Nauczyciel bierze złotą dziesiątkę, przelicza ją jednością od lewej do prawej: „jedna jedność, dwie jedności, trzy jedności ” aż do dziesięciu jedności i zwracając się do dziecka podaje nazwę: „*To jest dziesięć. To jest jedna dziesiątka*”. Dziecko

powtarza czynności nauczyciela. Nauczyciel bierze złotą setkę i przelicza ją dziesiątką od dołu do góry: „jedna dziesiątka, dwie dziesiątki, trzy dziesiątki ” aż do dziesięciu dziesiątek. Zwraca się do dziecka podając nazwę: „ *To jest sto, jedna setka*”. Dziecko powtarza czynności nauczyciela.

Nauczyciel bierze złoty tysiąc i przelicza go setkami od dołu do góry (lub od lewej do prawej) „jedna setka, dwie setki, trzy setki ” aż do dziesięciu setek. Zwraca się do dziecka i podaje nazwę: „*To jest tysiąc, jeden tysiąc*”. Dziecko powtarza czynności nauczyciela.

2.poznanie przedmiotów wg nazwy (rozumienie pasywne) - sprawdzenie czy dziecko kojarzy nazwę liczebnika z podaną ilością.

Nauczyciel prosi: „*Pokaż sto*”, „*Daj jedną dziesiątkę*”, „*Położ tysiąc* ”, „*Położ jedność na stole*”. Takie ćwiczenia należy wielokrotnie powtórzyć, używając zamiennie pojęć: jeden - jedna jedność, dziesięć - jedna dziesiątka, sto - jedna setka oraz tysiąc – jeden tysiąc.

3.wywoływanie nazwy wg przedmiotów (rozumienie aktywne).

Nauczyciel wskazuje złoty materiał pyta: „*Ile to jest?*” Dziecko udziela odpowiedzi. Dziecko może odpowiadać z zamkniętymi oczami na pytanie nauczyciela: „*Ile trzymasz w ręce?*”, „*Ile Ci dałam?*”

Po wprowadzeniu tacki demonstracyjnej kolejnymi ćwiczeniami, które utrwalają budowę pozycyjnego układu dziesiętkowego jest „gra w dziewięć”, drzewko dziesiątek oraz zabawa „Bałagan”.

Odrębną grupę materiałów matematycznych stanowią materiały do kształtowania pojęć geometrycznych. Należy jednak zaznaczyć, że zgodnie z zasadą kontynuacji wiele wcześniej poznawanych przez dziecko pomocy z grupy sensorycznej wstępnie przygotowuje je do nauki geometrii. Takimi materiałami są trójkąty konstrukcyjne, dwu- i trójpoziomowy sześciąt, różowa wieża, metalowe matryce, koszyk z bryłami czy komoda (szafka) geometryczna, które pośrednio budzą zainteresowania geometrią, rozwijają zmysł stereognostyczny oraz pozwalają na poznanie podstawowych figur geometrycznych i ich właściwości.

Typowym materiałem matematycznym umożliwiającym dziecku doświadczenia w geometrii płaskiej są **niebieskie trójkąty konstrukcyjne**. Pozwalają one na budowanie figur geometrycznych z trójkątów, na przekształcanie form geometrycznych poprzez przesuwanie i obrót oraz na werbalizację stosunków

przestrzennych.

Natomiast dzięki ćwiczeniom z **patykami geometrycznymi** dzieci poznają i przyswajają sobie takie pojęcia, jak: podstawa, wysokość, kąt trójkąta, odcinek, przekątna wielokąta, łamana zamknięta i otwarta; sprawdzają warunki budowania trójkąta, wyznaczają jego wysokość, obliczają obwód.

Z kolei **zestaw metalowych kwadratów** daje możliwość budowania figur z trójkątów i prostokątów, badania pola różnych figur, a także wprowadzenie pojęć figur podobnych i przystających.

W salach Montessori znajdują się również materiały zwane uzupełniającymi, dodatkowymi lub praktycznymi, do których należą przyrządy, urządzenia i przybory, dzięki którym dzieci nabywają umiejętności praktyczne dotyczące ważenia, mierzenia długości i czasu oraz liczenia pieniędzy. Są to takie przedmioty, jak klepsydry, kalendarze, w tym kalendarze pogody, różne rodzaje zegarków, linijki, taśmy, wagi szalkowe, monety, banknoty, naczynia czy menzurki. S. Guz (1998) zalicza do nich również linię czasu, zegary z ruchomymi wskazówkami oraz zestaw tarcz zegarowych z podpisami.

Obserwacje prowadzone przez M. Montessori dowodzą jednoznacznie, że dzieci już w wieku przedszkolnym wykazują zainteresowanie liczbami, figurami geometrycznymi, chcą nauczyć się liczenia. Zatem opracowane materiały rozwojowe nie są, jak podkreśla U. Steenberg „właściwie niczym więcej, jak tylko odpowiedzią na rzeczywiste potrzeby dziecka” (Steenberg, 2004, s.53). Dzięki nim matematyka poznawana jest skuteczniej i ciekawiej poprzez aktywne działanie dziecka.

V. Podstawy metodologiczne badań własnych

Metodologia badań pedagogicznych to nauka o metodach i działalności naukowej w pedagogice, która obejmuje sposoby przygotowania i prowadzenia badań naukowych na gruncie pedagogiki oraz opracowania ich wyników.

Jak wskazuje Cz. Kupisiewicz „wszelka świadoma działalność zawsze zmierza do realizacji określonych celów. Treść i zakres tych celów są każdorazowe, determinowane przez warunki, w których się je urzeczywistnia, a także przez środki, jakimi się dysponuje” (Kupisiewicz, 1988, s.56).

Proces badania naukowego to następujące kolejno po sobie w sposób systematyczny i planowy działania, poczynając od sformułowania problemu po przeprowadzenie badań i analizę wyników. Na każdym z tych etapów wykonuje się konkretne czynności pozwalające na jego ukończenie i przejście do kolejnego.

W literaturze przedmiotu przedstawiane są różne koncepcje struktury procesu badawczego w pedagogice empirycznej. Szczegółowego przeglądu dokonał J. Gnitecki (1983) omawiając etapy pracy badawczej wg J. C.Townsenda, J. Brzezińskiego, S. Nowaka, M. Łobockiego i innych.

H. Muszyński (1971) wyróżnia następujące etapy postępowania badawczego:

1. faza koncepcji:

- postawienie i sformułowanie problemu (problemów) badań;
- sprecyzowanie hipotezy roboczej (lub hipotez);
- wyłonienie i zdefiniowanie zmiennych;
- dobór wskaźników do poszczególnych zmiennych;
- dobór odpowiednich metod badawczych i opracowanie technik badań;
- opracowanie procedury badań.

2. faza badań:

- przeprowadzenie badań;
- uporządkowanie materiałów i ich analiza;
- analiza teoretyczna uzyskanego materiału i wyprowadzenie wniosków.

Z kolei W. Zaczyński (1976) uważa, że badanie naukowe składa się siedmiu etapów:

1. etap sytuacji problemowej;
2. etap formułowania problemu;
3. etap formułowania hipotezy roboczej;
4. etap weryfikacji wewnętrznej;

5. etap weryfikacji zewnętrznej;
6. etap wnioskowania końcowego;
7. etap opisu wyniku badań.

W. Zaczyński (1976) podaje także podstawowe zasady badań pedagogicznych podkreślając znaczenie tych, które podmiotowo traktują dziecko, a więc zgodnych z pedagogiką humanistyczną. Autor mówi o zasadach dotyczących subiektywności uczestników badaniach naukowego oraz o zasadach-instrukcjach odnoszących się do czynności zewnętrznych badania. Wśród tych pierwszych wymienia:

- zasadę świadomego udziału – badacz jest nastawiony na świadome, z góry przemyślane poznanie określonego wycinka rzeczywistości w określonym miejscu i czasie; wnikliwie planuje swoje działania;
- zasadę metodologicznej racjonalności – badanie naukowe jest racjonalne, nie ma w nim miejsca na dobrowolność i przypadkowość;
- zasadę ograniczonego zaufania, która ma eliminować błędy subiektywizmu badacza;
- zasadę etyczną w badaniach pedagogicznych, która dotyczy respektowania dobra fizycznego i psychicznego dziecka i każdej badanej jednostki; ta zasada dotyczy także osoby samego badacza, który musi uznać obiektywną wartość prawdy.

Natomiast zasady-instrukcje to według W. Zaczyńskiego (1995):

- zasada źródłowości, którą warunkuje „teoria wskaźników”;
- zasada intersubiektywizmu, czyli przedstawianie innym wyników w sposób czytelny, zrozumiały oraz możliwy do sprawdzenia;
- zasada weryfikalności, która zapewnia możliwość sprawdzenia przez osoby trzecie wartości uzyskanych przez badacza wyników;
- zasada korespondencji pozwalająca nowe teorie czy koncepcje czynić przedmiotem dalszych weryfikacyjnych analiz tylko wtedy, kiedy tłumaczą fakty lepiej niż ich poprzedniczki;
- zasada komplementarności, która kompensuje braki każdej pojedynczo zastosowanej metody zbierania danych i pozwala na w miarę pełne i adekwatne poznanie rzeczywistości;
- zasada kompletności wskazująca, że badanie naukowe ma być wyczerpujące.

1. Przedmiot i cele badań

Pierwszy –zdaniam H. Komorowskiej najważniejszy etap postępowania badawczego to określenie przedmiotu, celu zakresu badań. Według autorki przedmiotem badań jest „pewne zjawisko mieszczące się w problematyce teorii i praktyki danej subdyscypliny pedagogicznej i wyodrębnionej w celach badawczych” (Komorowska, 1982, s.77).

Według W. Okonia „przedmiotem badań pedagogicznych jest przede wszystkim świadoma działalność pedagogiczna, a więc procesy wychowania i nauczania, samowychowania i uczenia, ich cele, treści, przebieg, metody, środki i organizacja” (Okoń, 1964, s.11).

Przedmiotem prowadzonych badań są kompetencje matematyczne dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori.

Kolejnym etapem pracy badawczej nad zagadnieniem poziomu kompetencji matematycznych dzieci w wieku przedszkolnym było wyznaczenie celów, które w sposób najbardziej ogólny określiły granice danego tematu i stały się podstawą do sformułowania problemów badawczych.

T. Pilch podaje, że cel badań pedagogicznych to „złożony czynnik dążeń, do którego osiągnięcia zmierza się w toku postępowania badawczego” (Pilch, 1971, s.49).

W. Zaczyński (1995) dodaje, że cel musi być jasny, konkretny oraz realny.

H. Komorowska (za: Gnitecki, 1993) wyróżnia trzy podstawowe kryteria określania celu badań:

1. kryterium aktywności badającej (jego bierny lub aktywny udział);
2. kryterium aspektu badanej rzeczywistości (aspekt statyczny lub dynamiczny);
3. kryterium intencji wprowadzania zmian w badanej rzeczywistości (intencja wiedzotwórcza lub optymalizacyjna).

Według J. Gniteckiego (1993)w pracach badawczych wyróżnia się trzy kategorie celów:

- cel poznawczy, który jest głównie związany z opisem, wyjaśnieniem i przewidywaniem zjawisk pedagogicznych;

- cel teoretyczny – związany między innymi z podejmowaniem zadań teoretycznych; mogą one zmierzać do teoretycznego opracowania empirycznego modelu zajęć dydaktyczno- wychowawczych, które będą uzasadniane i weryfikowane w pracy badawczej;

- cel praktyczny – dotyczący realizacji zadań praktycznych np. dyrektyw pedagogicznych dla nauczycieli, rodziców czy uczniów.

J. Brzeziński natomiast wymienia dwa rodzaje celów, a mianowicie:

„-zewnętrzne - inaczej praktyczne, wynikające z funkcji, jakie nauka pełni w społeczeństwie, w życiu ludzi, a więc na zewnątrz, gdy jest stosowana do realizacji pewnych zadań teoretycznych lub praktycznych;

- wewnętrzne – inaczej poznawcze, realizowane dzięki celom zewnętrznym, te cele uczony stawia zwykle bezpośrednio w swojej pracy badawczej, można je określić jako czysto poznawcze” (Brzeziński, 1984, s.6).

Zdaniem autora oba rodzaje celów są ze sobą ściśle związane.

W niniejszej pracy badawczej wyznaczono następujące cele:

- 1. Ustalić, jaki jest poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori (w odniesieniu do założeń Podstawy Programowej Wychowania Przedszkolnego).**
- 2. Ustalić, czy, a jeśli tak, to w jakim stopniu wybrane czynniki dotyczące cech demograficznych badanych dzieci różnicują poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori.**
- 3. Ustalić czy, a jeśli tak, to w jakim stopniu wybrane czynniki dotyczące cech funkcjonowania zawodowego nauczycieli różnicują poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i Montessori.**
- 4. Ustalić, jaki jest poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w ocenie nauczycieli.**
- 5. Ustalić, czy, a jeśli tak, to w jakim stopniu w ocenie nauczycieli wybrane czynniki dotyczące cech demograficznych badanych dzieci różnicują poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori.**
- 6. Ustalić, czy, a jeśli tak, to w jakim stopniu wybrane czynniki dotyczące cech funkcjonowania zawodowego nauczycieli różnicują dokonywanie przez nauczycieli oceny poziomu kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori.**

7. Ustalić, jak przebiega proces rozwijania kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori.

8. Ustalić, czy, a jeśli tak, to w jakim stopniu wybrane czynniki funkcjonowania zawodowego nauczycieli różnicują przebieg procesu rozwijania kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori.

2. Problemy i hipotezy badawcze

Jak zauważa J. Pieter praca naukowa bez problemów to „(...) chodzenie po omacku i w kierunku niewiadomym” (Pieter, 1975, s.30). Podstawową zatem czynnością w badaniach naukowych jest postawienie problemów, które pełnią przewodnią rolę.

J. Gnitecki przedstawia to w następujący sposób: „(...) nasza dotychczasowa wiedza teoretyczna lub praktyczna natrafia na taki wynik obserwacji, który nie da się wyjaśnić na jej gruncie. Pojawia się przeto sytuacja problemowa, która prowadzi do sformułowania problemu” (Gnitecki, 1993, s.129).

Wielu badaczy zajmujących się metodologią pracy naukowej wyjaśnia pojęcie problemu badawczego np. S. Nowak (1970), M. Łobocki (1984), J. Pieter (1975), W. Okoń (1995), J. Sztumski (2005) czy W. Zaczyński (1976).

Zdaniem J. Pietera „(...) każdy problem naukowy jest swoistą poznawczą przeszkodą lub trudnością do pokonania” (Pieter, 1975, s.30).

H. Muszyński definiuje problem badawczy jako „(...) logiczne ujęcie przeżywanej niewiedzy lub potrzeby wiedzy, zaś pytanie to gramatyczna konstrukcja wyrażająca sytuację problemową i będąca zarazem językowym odpowiednikiem” (Muszyński, 1971, s.177).

Według S. Nowaka „problem badawczy to tyle, co pewne pytanie lub zespół pytań, na które odpowiedź ma dostarczyć badanie” (Nowak, 1970, s.214). Ogólną, ale bardzo trafną definicję problemu podaje Cz. Kupisiewicz uważając, że problem badawczy to „(...) trudność o charakterze teoretycznym i praktycznym, której przezwyciężenie wymaga aktywnej postawy badawczej” (Kupisiewicz, 1988, s.203).

Problem według T. Pilcha to „prosty zabieg werbalny, polegający na precyzyjnym rozbiciu tematu na pytania, problemy” (Pilch, 1998, s.24). M. Łobocki dodaje, że jest to

„pytanie, na które szukamy odpowiedzi na drodze badań naukowych” (Łobocki, 1984, s.56). J. Sztumski z kolei pisze „problemem badawczym nazywamy to, co jest przedmiotem wysiłków badawczych, czyli po prostu to, co orientuje nasze przedsięwzięcia poznawcze” (Sztumski, 2005, s.42).

Prawidłowe sformułowanie problemów wymaga spełnienia określonych warunków. Podstawowymi kryteriami poprawności metodologicznej problemów badawczych są według M. Łobockiego (1984):

- precyzyjność ich ujęcia;
- usytuowanie na tle dotychczasowych osiągnięć naukowych;
- ich empiryczna sprawdzalność.

Podobne warunki konieczne do sformułowania problemu badawczego podaje J. Sztumski (2005) wskazując, że postawione problemy:

- muszą wyczerpać zakres niewiedzy, który zawarty jest w temacie badań, określać zakres wątpliwości badawczych;
- muszą zawierać wszystkie zależności między zmiennymi;
- muszą być rozstrzygalne empirycznie i mieć wartość praktyczną.

W zależności od typu badań, jakie przewiduje realizacja tematu, wyróżnia się także typy problemów badawczych (np. Gnitecki, 1993). J. Sztumski dokonał podziału problemów ze względu na przedmiot, zakres i rolę, jakie pełnią. Wyróżnia zatem problemy:

- „teoretyczne i praktyczne,
- ogólne i szczegółowe,
- podstawowe i cząstkowe” (Sztumski, 2005, s.52).

W literaturze przedmiotu spotyka się najczęściej trzy typy problemów badawczych. Są to: problemy o charakterze diagnostycznym, o charakterze zależnościowym i innowacyjnym.

W niniejszej pracy sformułowano następujące problemy badawcze:

1. Jaki jest poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori?(w odniesieniu do założeń Podstawy Programowej Wychowania Przedszkolnego)?

1.1. Jaki jest poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego?

1.2. Jaki jest poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w zakresie dodawania i odejmowania liczb wspomaganego liczeniem na palcach lub innych zbiorach zastępczych?

1.3. Jaki jest poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi?

1.4. Jaki jest poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w zakresie rozróżniania prawej i lewej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów?

1.5. Jaki jest poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w zakresie dokonywania pomiaru długości i znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą?

1.6. Jaki jest poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w zakresie orientacji w czasie - znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku?

2. Czy, a jeśli tak, to w jakim stopniu wybrane czynniki dotyczące cech demograficznych badanych dzieci takie, jak:

- płeć,
- wiek,
- czas trwania edukacji przedszkolnej

różnicują poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori?

3. Czy, a jeśli tak, to w jakim stopniu wybrane czynniki dotyczące cech funkcjonowania zawodowego nauczycieli takie, jak:

- staż pracy oraz przygotowanie do nauczania matematyki (oprócz studiów - dodatkowe kursy, szkolenia, studia podyplomowe) nauczycieli w przedszkolach tradycyjnych, różnicują poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym?

- staż pracy oraz przygotowanie do pracy metodą Montessori (oprócz studiów - kursy, szkolenia, studia podyplomowe) nauczycieli w przedszkolach montessoriańskich, różnicują poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori?

4. Jaki jest poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w ocenie nauczycieli?

4.1. Jaki jest - w ocenie nauczycieli - poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego?

4.2. Jaki jest - w ocenie nauczycieli - poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie dodawania i odejmowania liczb wspomaganego liczeniem na palcach lub innych zbiorach zastępczych?

4.3. Jaki jest - w ocenie nauczycieli - poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów oraz posługiwania się liczebnikami porządkowymi?

4.4. Jaki jest - w ocenie nauczycieli - poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie rozróżniania prawej i lewej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów?

4.5. Jaki jest - w ocenie nauczycieli - poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie dokonywania pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą?

4.6. Jaki jest - w ocenie nauczycieli - poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie orientacji w czasie - znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku?

5. Czy, a jeśli tak, to w jakim stopniu w ocenie nauczycieli wybrane czynniki dotyczące cech demograficznych badanych dzieci takie, jak:

- płeć,
- wiek,
- czas trwania edukacji przedszkolnej,

różnicują poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori?

6. Czy, a jeśli tak, to w jakim stopniu wybrane czynniki dotyczące cech funkcjonowania zawodowego nauczycieli takie, jak:

- staż pracy oraz przygotowanie do nauczania matematyki (oprócz studiów - dodatkowe kursy, szkolenia, studia podyplomowe) nauczycieli w przedszkolach tradycyjnych, różnicują dokonywanie przez nauczycieli oceny poziomu kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym?

- staż pracy oraz przygotowanie do pracy metodą Montessori (oprócz studiów - kursy, szkolenia, studia podyplomowe) nauczycieli w przedszkolach montessoriańskich, różnicują dokonywanie przez nauczycieli oceny poziomu kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori?

7. Jak przebiega proces rozwijania kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori?

7.1. Jaka częstotliwość realizacji treści matematycznych stosują nauczyciele?

7.2. Jakie metody i formy realizacji treści matematycznych występują w pracy edukacyjnej nauczycieli?

7.3. Czy w prowadzonych przez nauczycieli grupach funkcjonują dzieci uzdolnione matematycznie? Jeśli tak, to jakie działania stymulujące uzdolnienia wobec tych dzieci podejmują nauczyciele i w jakim zakresie?

7.4. Czy w prowadzonych przez nauczycieli grupach występują u dzieci trudności w uczeniu się matematyki? Jeśli tak, to jakie i w jakim stopniu nasilenia?

7.5. Jakie działania edukacyjne podejmują nauczyciele w celu pokonywania przez dzieci trudności w uczeniu się matematyki oraz w celu ich zapobiegania?

7.6. Jakie działania edukacyjne należy podjąć – zdaniem nauczycieli- w celu podnoszenia poziomu kompetencji matematycznych dzieci?

7.7. Czy nauczyciele postrzegają potrzebę podnoszenia swoich kompetencji dotyczących prowadzenia zajęć matematycznych z dziećmi? Jeśli tak, to w jakim zakresie i formie?

8. Czy, a jeśli tak, to w jakim stopniu wybrane czynniki dotyczące cech funkcjonowania zawodowego nauczycieli takie jak:

- staż pracy oraz przygotowanie do nauczania matematyki (oprócz studiów - dodatkowe kursy, szkolenia, studia podyplomowe) nauczycieli w przedszkolach tradycyjnych, różnicują przebieg procesu rozwijania kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym?
- staż pracy oraz przygotowanie do pracy metodą Montessori (oprócz studiów -kursy, szkolenia, studia podyplomowe) nauczycieli w przedszkolach montessoriańskich, różnicują przebieg procesu rozwijania kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori?

Problem badawczy stanowi główną podstawę tworzenia hipotez, które są następnym etapem procedury badawczej. Formułowanie hipotez zasadniczo polega na zmianie gramatycznej formy problemu, przekształcając zdanie pytające na twierdzące lub przeczące.

W literaturze przedmiotu spotkać można wiele definicji hipotezy (Łobocki, 1984; Muszyński, 1971; Gnitecki, 1993; Zaczyński, 1976; Brzeziński, 1984; Sztumski, 2005). Zdaniem M. Łobockiego hipotezy robocze są „oczekiwanymi przez badacza wynikami planowanych badań” (Łobocki, 1984, s.74). H. Muszyński definiuje hipotezę jako „przypuszczenie dotyczące zachodzenia pewnych zjawisk lub zależności między nimi, które pozwala wyjaśnić jakiś nie wytłumaczony dotąd zespół faktów, będący pewnym problemem” (Muszyński, 1971, s.188). T. Kotarbiński wyjaśnia hipotezę jako „wszelkie twierdzenia, częściowo tylko uzasadnione, przeto także wszelki domysł, za pomocą którego tłumaczymy dane faktyczne, a więc też i domysł w postaci uogólnienia osiągniętego (...) na podstawie danych wyjściowych” (za: Pilch, 1998, s.26-27). Z kolei J. Gnitecki uważa, że „hipotezy stanowią przypuszczalne odpowiedzi na problemy badawcze i dotyczą spodziewanego kierunku zależności lub przewidywanego kierunku wydarzeń” (Gnitecki, 1993, s.136).

J. Brzeziński definiuje zwięźle, że „hipotezy są odpowiedzią na pytania uosabiające problem badawczy” (Brzeziński, 1984, s.57).

Ze względu na stopień ogólności można wyróżnić dwa rodzaje hipotez:

- „hipotezy proste – wyprowadzone z uogólnienia prostych obserwacji,

- hipotezy złożone – zakładające istnienie powiązań między wydarzeniami lub nawet skomplikowanych łańcuchów przyczyn i skutków” (Pilch, 1998, s.38).

Dobrze sformułowana hipoteza musi - zdaniem H. Muszyńskiego (1971) spełniać kilka warunków, a mianowicie:

- jest sprawdzalna;
- określa zależności między zmiennymi;
- ma ściśle ograniczony zasięg;
- jest zbudowana na podstawie już uznawanej wiedzy naukowej;
- ukierunkowuje wysiłek badacza;
- jest zdaniem wysoce prawdopodobnym;
- dotyczy istotnych dla danej nauki zdarzeń i ma moc teorii twórczą;
- nie jest sprzeczna z udowodnionymi już twierdzeniami danej dyscypliny naukowej;
- jest jednoznaczna i dostatecznie szczegółowo sformułowana;
- tłumaczy w sposób dostateczny znane już fakty.

Podjęmowana praca ma charakter diagnostyczny i nie wymaga stawiania hipotez, które są konieczne w przypadku badań eksperymentalnych.

3. Zmienne i wskaźniki

Kolejnym etapem pracy badawczej jest wyłonienie zmiennych oraz przyporządkowanie im wskaźników.

Zmienne wynikają z postawionych problemów badawczych. „Zmienne są to czynniki, które przyjmują różne wartości” (Gnitecki, 1993, s.141). Przy czym wartość pojmowana jest w sensie ilościowym lub jakościowym. Zgodnie z definicją Z. Zaborowskiego zmienna to „czynnik, właściwość, zjawisko podlegające zmianom i będące przedmiotem badań” (Zaborowski, 1973, s.359).

W pedagogice empirycznej spotyka się różne podziały zmiennych (Brzeziński, 1984; Gnitecki, 1993). Istnieje jednak zgodność, co do potrzeby wyróżnienia zmiennych niezależnych i zmiennych zależnych.

M. Łobocki przez zmienną niezależną rozumie „(...) pewne czynniki powodujące określone zmiany w innych czynnikach (zmiennych)”, a przez zmienne zależne „(...)

czynniki podlegające wyraźnym wpływom ze strony zmiennych niezależnych” (Łobocki, 1984, s.74).

Nie istnieje żadna absolutna klasyfikacja na zmienne zależne i niezależne. Raz dany czynnik jest po stronie zmiennej niezależnej, innym razem po stronie zmiennej zależnej. W obszarze badawczym między przyczyną a skutkiem wyróżnia się także specjalną kategorię zmiennych, określanych jako zmienne zakłócające, pośredniczące, interweniujące lub kontekstowe (Gnitecki, 1993; Bereźnicki, 1975; Zaborowski, 1973).

W niniejszej pracy wyłoniono następujące zmienne:

1. Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori

1.1. poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego;

1.2. poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie dodawania i odejmowania liczb wspomaganego liczeniem na palcach lub innych zbiorach zastępczych;

1.3. poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi;

1.4. poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie rozróżniania prawej i lewej strony oraz określania kierunków i ustalania położenia obiektów;

1.5. poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie dokonywania pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą;

1.6. poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie orientacji w czasie - znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku.

2. Stopień różnicowania poziomu kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori przez wybrane czynniki dotyczące cech demograficznych badanych dzieci takie, jak:

- wiek,
- płeć,
- czas trwania edukacji przedszkolnej.

3. Stopień różnicowania poziomu kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori przez wybrane czynniki dotyczące cech funkcjonowania zawodowego nauczycieli w przedszkolach tradycyjnych i przedszkolach montessoriańskich takie, jak:

- staż pracy,
- kwalifikacje dodatkowe: przygotowanie do prowadzenia zajęć matematycznych nauczycieli w przedszkolach tradycyjnych i montessoriańskich (kursy, szkolenia, studia podyplomowe).

4. Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w ocenie nauczycieli

4.1. poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego w ocenie nauczycieli;

4.2. poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie w zakresie dodawania i odejmowania liczb wspomaganego liczeniem na palcach lub innych zbiorach zastępczych w ocenie nauczycieli w ocenie nauczycieli;

4.3. poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi w ocenie nauczycieli;

4.4. poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie rozróżniania prawej i lewej strony oraz określania kierunków i ustalania położenia przedmiotów w ocenie nauczycieli;

4.5. poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie dokonywania pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą w ocenie nauczycieli;

4.6. poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie orientacji w czasie - znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w ocenie nauczycieli.

5. Stopień różnicowania w ocenie nauczycieli poziomu kompetencji matematycznych dzieci przez wybrane czynniki dotyczące cech demograficznych badanych dzieci takie, jak:

- wiek,
- płeć,

- czas trwania edukacji przedszkolnej

6. Stopień różnicowania dokonywanej przez nauczycieli oceny poziomu kompetencji matematycznych dzieci przez wybrane czynniki dotyczące cech funkcjonowania zawodowego nauczycieli takie, jak:

- staż pracy,

- kwalifikacje dodatkowe: przygotowanie do prowadzenia zajęć matematycznych nauczycieli w przedszkolach tradycyjnych i montessoriańskich (kursy, szkolenia, studia podyplomowe).

7. Przebieg procesu rozwijania kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori

7.1. częstotliwość realizacji treści matematycznych stosowana przez nauczycieli

Przyjęto następującą częstotliwość realizowania treści matematycznych:

1. codziennie,
2. 3- 4 razy w tygodniu,
3. 1-2 razy w tygodniu,
4. rzadziej niż jeden raz w tygodniu

7.2. częstotliwość realizacji przez nauczycieli treści matematycznych dotyczących rozwijania umiejętności liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego

Przyjęto następującą częstotliwość realizowania wyznaczonych treści matematycznych:

- a. codziennie,
- b. 3- 4 razy w tygodniu,
- c. 1-2 razy w tygodniu,
- d. rzadziej niż jeden raz w tygodniu

7.3. częstotliwość realizacji przez nauczycieli treści matematycznych dotyczących rozwijania umiejętności wyznaczania przez dzieci wyniku dodawania i odejmowania przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych

Przyjęto następującą częstotliwość realizowania wyznaczonych treści matematycznych:

- a. codziennie,
- b. 3- 4 razy w tygodniu,
- c. 1-2 razy w tygodniu,

- d. rzadziej niż jeden raz w tygodniu

7.4. częstotliwość realizacji przez nauczycieli treści matematycznych dotyczących rozwijania umiejętności ustalania przez dzieci równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi

Przyjęto następującą częstotliwość realizowania wyznaczonych treści matematycznych:

- a. codziennie,
- b. 3- 4 razy w tygodniu,
- c. 1-2 razy w tygodniu,
- d. rzadziej niż jeden raz w tygodniu

7.5. częstotliwość realizacji przez nauczycieli treści matematycznych dotyczących rozwijania umiejętności rozróżniania przez dzieci lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów

Przyjęto następującą częstotliwość realizowania wyznaczonych treści matematycznych:

- a. codziennie,
- b. 3- 4 razy w tygodniu,
- c. 1-2 razy w tygodniu,
- d. rzadziej niż jeden raz w tygodniu

7.6. częstotliwość realizacji przez nauczycieli treści matematycznych dotyczących rozwijania orientacji dziecka w zakresie pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia

Przyjęto następującą częstotliwość realizowania wyznaczonych treści matematycznych:

- a. codziennie,
- b. 3- 4 razy w tygodniu,
- c. 1-2 razy w tygodniu,
- d. rzadziej niż jeden raz w tygodniu

7.7. częstotliwość realizacji przez nauczycieli treści matematycznych dotyczących rozwijania znajomości przez dzieci stałego następstwa dni i nocy, por roku, dni tygodnia, miesięcy w roku

Przyjęto następującą częstotliwość realizowania wyznaczonych treści matematycznych:

- a. codziennie,
- b. 3- 4 razy w tygodniu,
- c. 1-2 razy w tygodniu,

d. rzadziej niż jeden raz w tygodniu

7.8. rodzaje metod i form wykorzystywanych podczas realizacji treści matematycznych w pracy edukacyjnej nauczyciela

Przyjęto następujące metody stosowane w pracy edukacyjnej nauczycieli:

w przedszkolach tradycyjnych:

- metody słowne (rozmowa, instrukcja, objaśnienia);
- metody percepcyjne (obserwacja, pokaz, przykład, demonstracja);
- metody czynne (zadań stawianych dziecku do wykonania, ćwiczeń, samodzielnych doświadczeń, kierowania własną działalnością dziecka, metoda Wspomagania rozwoju umysłowego dzieci wg E. Gruszczyk-Kolczyńskiej i Ewy Zielińskiej)

- metody aktywizujące

w przedszkolach montessoriańskich

- metody asymilacji wiedzy: rozmowa, pokaz (lekcja podstawowa) i metoda słowna (trójstopniowa lekcja nazw);
- metody samodzielnego dochodzenia do wiedzy: gry dydaktyczne, indywidualna praca z materiałami rozwojowymi, własnego działania i powtarzania;
- metody praktyczne: ćwiczenia z materiałem rozwojowym, ćwiczenia z innymi pomocami dydaktycznymi.

Przyjęto następujące formy realizacji treści matematycznych

w przedszkolach tradycyjnych:

- praca indywidualna (dziecko pracuje samodzielnie);
- praca zbiorowa (wszystkie dzieci pracują wspólnie);
- praca zespołowa (dzieci pracują w stałych zespołach);
- praca grupowa (dzieci pracują w jednorazowych grupach).

w przedszkolach montessoriańskich:

- praca indywidualna (lekcja podstawowa i trzystopniowa lekcja nazw);
- praca grupowa (lekcje ciszy, lekcje rozwojowe - „wiązane lekcje”, gry z wykorzystaniem materiału rozwojowego oraz trzystopniowe lekcje ogólne);
- praca zespołowa (praca w laboratorium, praca własna z wybranym tematem).

7.9. podejmowanie (tak/nie) przez nauczycieli określonych działań w stosunku do dzieci uzdolnionych matematycznie; rodzaj i zakres podejmowanych działań

Przyjęto następujące działania podejmowane przez nauczycieli w pracy z dzieckiem uzdolnionym matematycznie:

- stosowanie dodatkowych zadań o podwyższonym stopniu trudności;
- wspólne rozwiązywanie rebusów, łamigłówek matematycznych wraz ze stymulowaniem dziecka do wyjaśniania, uzasadniania swoich rozwiązań;
- wprowadzanie i wyjaśniania podstawowych pojęć matematycznych w zabawach;
- stosowanie wyliczanek;
- tworzenie gier z ustalaniem reguł;
- stosowanie zabaw logicznych;
- opracowywanie specjalnych planów pracy z dzieckiem zdolnym;
- organizowanie sytuacji problemowych wymagających rozwiązania różnorodnych problemów matematycznych.

7.10. występowanie (tak/nie) rodzajów trudności w uczeniu się matematyki; stopień nasilenia dostrzeganych przez nauczycieli trudności w nauce matematyki

Przyjęto następujące rodzaje trudności w uczeniu się matematyki w odniesieniu do poszczególnych zagadnień:

- a. w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego:
 - podwójne liczenie tego samego przedmiotu;
 - przeskakiwanie, pomijanie przedmiotów w trakcie liczenia;
 - błędy w rozpoznawaniu brakującej liczby w ciągu liczbowym jako miary umiejętności przeliczania i sekwencyjnego liczenia;
 - mylenie liczebników;
 - błędne rozpoznawanie cyfr i liczb oraz ich nazywanie;
 - trudności w liczeniu wspak jako miary pamięci operacyjnej;
- b. w zakresie w zakresie dodawania i odejmowania liczb wspomaganego liczeniem na palcach lub innych zbiorach zastępczych:
 - mylenie dodawania i odejmowania;
 - brak rozumienia dodawania jako powiększania i odejmowania jako pomniejszania;

- brak umiejętności wykonywania działań w pamięci;
- c. w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi:
 - mylenie liczebników porządkowych;
 - błędy w ustalaniu zbiorów równolicznych;
 - błędy podczas tworzenia zbiorów równolicznych;
 - trudności w porównywaniu liczebności zbiorów;
 - trudności w posługiwaniu się symbolami „>”, „<”, „=”
- d. w zakresie rozróżniania prawej i lewej strony oraz określania kierunków i ustalania położenia przedmiotów:
 - błędy w rozróżnianiu prawej i lewej strony;
 - trudności w ustalaniu położenia przedmiotów w sytuacjach rzeczywistych;
 - trudności w ustalaniu położenia przedmiotów na kartce papieru
- e. w zakresie dokonywania pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia:
 - trudności w porządkowaniu elementów zgodnie z gradacją danej cechy wielkościowej;
 - trudności w mierzeniu prostymi sposobami (krokami, dłonią, stopą);
 - trudności w posługiwaniu się linijką;
- f. w zakresie orientacji w czasie:
 - trudności w porządkowaniu chronologicznym pór dnia, dni tygodnia, miesięcy oraz pór roku;
 - błędne rozumienie terminów opisujących podstawowe pory dnia;
 - trudności w rozpoznawaniu pór roku;
 - trudności w ustalaniu kolejności wydarzeń (np. w historyjce obrazkowej).

Przyjęto następującą częstotliwość nasilenia dostrzeganych przez nauczycieli trudności w uczeniu się matematyki:

- brak trudności,
- sporadycznie,
- dość często,
- bardzo często.

7.11. rodzaje działań edukacyjnych podejmowanych przez nauczycieli w celu pokonywania przez dzieci trudności w uczeniu się matematyki oraz zapobiegania ich występowaniu

Przyjęto stosowanie przez nauczycieli następujących sposobów pomocy dzieciom z trudnościami w uczeniu się matematyki:

- zróżnicowanie poziomu trudności zadań;
- dodatkowe objaśnienia do pracy;
- dodatkowe zorganizowane zajęcia wyrównawcze;
- wskazówki do pracy w domu dla rodziców;
- zapewnienie dzieciom dłuższego czasu pracy;
- dodatkowe ćwiczenia wyrównujące;
- rozwijanie myślenia operacyjnego dzieci;
- stosowanie ćwiczeń doskonalących spostrzeganie wzrokowe;
- stosowanie ćwiczeń ukierunkowanych na doskonalenie koordynacji wzrokowo-ruchowej;
- stosowanie ćwiczeń rozwijających sprawność manualną;
- intensyfikacja sytuacji praktycznych związanych z liczeniem, rozwijających intuicje matematyczne;
- stosowanie konkretów w liczeniu zgodnie z potrzebami dziecka;
- uatrakcyjnianie zajęć ciekawymi pomocami

7.12. rodzaje działań edukacyjnych podnoszących poziom kompetencji matematycznych dzieci wskazywane przez nauczycieli

Przyjęto następujące działania edukacyjne stosowane przez nauczycieli:

- nieograniczanie etapu liczenia na palcach;
- wykorzystywanie umiejętności matematycznych w sytuacjach dnia codziennego (praktyce życiowej);
- stosowanie gier dydaktycznych;
- stosowanie indywidualnych zadań dodatkowych (zarówno dla dzieci z trudnościami w nauce matematyki, jak i uzdolnionych matematycznie);
- prowadzenie zajęć korekcyjno- wyrównawczych;
- stosowanie metod nauczania zgodnie z preferencjami sensorycznymi dzieci (wzrokowcy, słuchowcy, kinestetycy);
- łączenie aktywności ruchowej z doświadczeniami matematycznymi;

- łączenie aktywności plastycznej z doświadczeniami matematycznymi;
- łączenie aktywności muzycznej z doświadczeniami matematycznymi;
- stosowanie pozytywnej motywacji, zachęty;
- wczesne i wnikliwe diagnozowanie trudności w uczeniu się matematyki

7.13. dostrzeganie (tak/nie) przez nauczycieli potrzeby podnoszenia własnych kompetencji dotyczących realizowania z dziećmi treści matematycznych; zakres i forma tych działań

Przyjęto następujące formy podejmowanego przez nauczycieli doskonalenia zawodowego:

- a. formy zorganizowane (instytucjonalne):
 - studia podyplomowe kwalifikacyjne;
 - studia podyplomowe doskonalące;
 - kursy kwalifikacyjne,
 - kursy doskonalące;
 - szkolenia;
 - warsztaty;
 - konferencje metodyczne.
- b. wewnątrzszkolne doskonalenie nauczycieli (WDN):
 - konferencje samokształceniowe rady pedagogicznej;
 - referaty;
 - odczyty;
 - lekcje otwarte;
 - inicjatywy organizatorskie
- c. działania samokształceniowe:
 - czytanie literatury;
 - korzystanie z witryn internetowych;
 - edukacja na odległość;
 - autorskie programy dydaktyczne.

8. Stopień różnicowania przebiegu procesu rozwijania kompetencji matematycznych dzieci przez wybrane czynniki dotyczące cech funkcjonowania zawodowego nauczycieli takie, jak:

- staż pracy,

- kwalifikacje dodatkowe: przygotowanie do prowadzenia zajęć matematycznych nauczycieli w przedszkolach tradycyjnych i montessoriańskich (kursy, szkolenia, studia podyplomowe).

Wyłonienie i zdefiniowanie zmiennych prowadzi do następnej czynności badawczej, jaką jest ustalenie danych, na podstawie których można wnioskować o wystąpieniu oraz nasileniu poszczególnych zmiennych. W oparciu o taką operację dochodzi do doboru wskaźników do zmiennych.

S. Nowak wyjaśnia, że „wskaźnikiem jakiegoś zjawiska Z nazywać będziemy takie zjawisko W, którego zaobserwowanie pozwoli nam (w sposób bezwyjątkowy lub z określonym czy choćby wyraźnym od przeciętnego prawdopodobieństwem) określić, iż zaszło zjawisko Z” (za: Gnitecki, 1993, s.146). By można było wnosić o zajściu jakiegoś zjawiska stosuje się różne wskaźniki. Wyprowadza się je z bezpośredniej obserwacji zjawiska wskaźnikowego, definicji terminu związanego z badanym zjawiskiem albo z obserwacji zjawiska towarzyszącego zjawisku nieobserwowalnemu.

Stąd S. Nowak (za: Łobocki, 1984) wyróżnia trzy typy wskaźników:

1. wskaźniki empiryczne;
2. wskaźniki definicyjne;
3. wskaźniki inferencyjne.

J. Gnitecki wyjaśnia, że „wskaźniki empiryczne występują wtedy, gdy wskazane przez nie zjawisko daje się zaobserwować” (Gnitecki, 1993, s.147). Zatem „(...) relacja zachodząca między nim a danym zjawiskiem ma charakter związku przyczynowego. To znaczy, że o powiązaniu danego wskaźnika ze zjawiskiem wskazywanym można się przekonać „naocznie” dzięki bezpośredniej obserwacji. Wskaźniki definicyjne mają miejsce wówczas, gdy wynikają z definicji pewnego zjawiska lub faktu” (Łobocki, 1984, s.102). Natomiast wskaźniki inferencyjne „(...) odnoszą się do zjawisk bezpośrednio nieobserwowalnych i nie wchodzą do definicji badanych zjawisk” (Łobocki, 1984, s.104). Dobieranie wskaźników inferencyjnych następuje poprzez odwołanie się do teorii na temat tych zjawisk.

W pracy wskaźnikami będą werbalne zachowania badanych dzieci w sytuacji pytaniowej i zadaniowej (test osiągnięć szkolnych) oraz odpowiedzi respondentów (nauczycieli) na pytania zawarte w kwestionariuszu ankiety.

4. Metody, techniki i narzędzia badawcze

Po przeprowadzeniu dotychczasowych ustaleń należy wybrać sposób gromadzenia materiału faktograficznego. W tym celu dokonano wyboru odpowiedniej metody pracy i technik badawczych, przy pomocy których zamierza się szukać odpowiedzi na sformułowane problemy.

Wybór metod jest ściśle uwarunkowany charakterem badanego zjawiska.

W literaturze przedmiotu można spotkać wiele propozycji definiowania metody badawczej (Zaczyński, 1995; Kamiński, 1974; Pieter, 1975; Okoń, 1995; Łobocki, 1984).

Zdaniem W. Zaczyńskiego metody badania naukowego to: „(...) określone sposoby poznawania wybranego wycinka rzeczywistości, które cechują się tym, że są celowe, planowe, obiektywne, dokładne i wyczerpujące” (Zaczyński, 1995, s.19).

A. Kamiński podaje natomiast, że przez metodę naukową należy rozumieć „zespół teoretycznie uzasadnionych zabiegów koncepcyjnych i instrumentalnych, obejmujących najogólniej całość postępowania badacza, zmierzającego do rozwiązania określonego problemu naukowego” (Kamiński, 1974, s.65).

Z kolei J. Pieter uważa, iż „(...) metody badań naukowych są złożonymi i nadrzędnymi w stosunku do metod myślenia sposobami poznawania prawdy” (Pieter, 1975, s.69). Według W. Okonia metoda to „system celowych czynności i środków umożliwiających wykonanie danego zadania, bądź rozwiązanie określonego problemu, w badaniu chodzi o taki dobór czynności i środków, jaki jest niezbędny, aby zjawisko będące przedmiotem badań się pojawiło, a jednocześnie, aby można było dokonać pomiaru związanych z nim zmiennych, na dany system postępowania składają się czynności myślowe i praktyczne, odpowiednio dobrane i wykonane w określonej kolejności” (Okoń, 1964, s.12).

Zdaniem M. Łobockiego metoda to „ogólny system reguł dotyczących organizowania określonej działalności badawczej, tj. szeregu operacji poznawczych i praktycznych, kolejności ich zastosowania, jak również specjalnych środków i działań skierowanych z góry na założony cel badawczy” (Łobocki, 1984, s.115). Autor wymienia takie metody badawcze, jak:

- obserwacja;
- eksperyment pedagogiczny;
- testy osiągnięć szkolnych;

- analiza dokumentów.

Z kolei K. Konarzewski (2000) wskazuje trzy metody badawcze:

- dobór próby;
- metody zbierania danych;
- metody analizy danych.

Natomiast Kamiński (1974) wśród metod badawczych wyróżnia:

- studium indywidualnych przypadków;
- sondaż diagnostyczny;
- monografię.

T. Pilch (1998) wyodrębnia następujące metody badań pedagogicznych:

- sondaż diagnostyczny;
- eksperyment pedagogiczny;
- monografie pedagogiczną;
- metodę indywidualnych przypadków.

W pracy zastosowana zostanie metoda sondażu diagnostycznego, która przez T. Pilcha definiowana jest w następujący sposób: „metoda sondażu diagnostycznego jest sposobem gromadzenia wiedzy o atrybutach strukturalnych i funkcjonalnych zjawisk wychowawczych, instytucjonalnie nie zlokalizowanych na podstawie badań specjalnie dobranej grupy reprezentującej populację ogólną, w której występują badane zjawiska” (Pilch, 1998, s.51).

W ujęciu S. Nowaka metoda sondażu polega na „bezpośrednim kontakcie z osobami, bądź też grupą osób, których cechy zachowania lub postawy są istotne z punktu widzenia specyficznego problemu badawczego” (Nowak, 1970, s.240).

Zdaniem S. Ziemskiego „poznanie diagnostyczne opiera się na dwóch głównych elementach: na doświadczeniu i rozumowaniu- i jest to opis możliwie wielostronnych cech i objawów badanego zjawiska, uzyskanych w drodze obserwacji i badań specjalnych, a także eksperymentów, które mają na celu zebranie danych dotyczących badanego przedmiotu i jego otoczenia. Stanowią one podstawę dalszych rozumowań prowadzących do diagnozy” (Ziemski, 1973, s.17). Metoda sondażu diagnostycznego pozwala na poznanie określonego zjawiska społecznego, ustalenia jego zasięgu, zakresu, poziomu, a następnie ocenę i zaprojektowanie modyfikacji, czyli zmian ulepszających negatywne sytuacje życia ludzi w badanym środowisku. T. Pilch (1971) dodaje, że metoda sondażu diagnostycznego daje opis i pozwala na wyjaśnienie

pewnych zjawisk masowych i ważniejszych procesów występujących w społeczeństwie
Zastosowanie sondażu diagnostycznego w badaniach pedagogicznych pomaga badaczowi w:

- zdobyciu danych o środowisku lokalnym, rówieśniczym czy rodzinnym;
- znalezieniu odpowiedzi na pytania dotyczące pewnych zjawisk, procesów występujących w zbiorowościach;
- uzyskaniu informacji na temat poglądów, opinii, postaw czy motywów zachowania i postępowania.

Badania opierają się na określonych technikach badawczych. A. Kamiński wyjaśnia, że technika badawcza to „(...) sposób zbierania materiału, oparty na starannie opracowanych dyrektywach (dokładnych, jawnych i ścisłych) weryfikowanych w badaniach różnych nauk społecznych i dzięki temu posiada walor użyteczności międzydyscyplinarnej” (Kamiński, 1974, s.20). Według T. Pilcha – technika badawcza „(...) jest określoną czynnością służącą do uzyskania pożądaných danych. Jest pojedynczą procedurą polegającą na wykonaniu określonej czynności badawczej” (Pilch, 1971, s.79). S. Ziemiński definiuje technikę badań jako „czynność poznawczą, gdzie proces angażuje badacza i innych ludzi” (Ziemiński, 1973, s.126).

W badaniach sondażowych najczęściej stosowanymi technikami są: wywiad, rozmowa, ankieta, analiza dokumentów, techniki statystyczne.

Kamiński (1974) wymienia następujące techniki badawcze:

- obserwacja;
- wywiad;
- ankieta;
- eksperyment;
- badanie dokumentów;
- techniki socjometryczne;
- pomiar;
- techniki statystyczne.

Natomiast Łobocki (1984) odnosi techniki badawcze do poszczególnych metod badawczych i tak:

1. wśród technik obserwacyjnych wyróżnia:
 - technikę obserwacji dorywczej;

- technikę dzienników obserwacyjnych;
 - technikę obserwacji kategoryzowanej;
 - technikę obserwacji biernej;
 - technikę próbek fotograficznych, próbek czasowych i próbek zdarzeń;
2. do technik eksperymentu zalicza:
- technikę prób równoległych;
 - technikę rotacji;
 - technikę jednej grupy.
3. do technik analizy dokumentów należą:
- technika analizy treściowej;
 - technika analizy formalnej;
 - technika analizy grupowej;
 - technika diagnostyczna;
 - technika analizy rozwojowej
 - technika analizy psychologicznej

Ponadto Łobocki wymienia jeszcze techniki socjometryczne.

Pilch (1971) wśród technik badawczych wykorzystywanych w badaniach pedagogicznych wskazuje:

- obserwację;
- wywiad;
- techniki projekcyjne;
- ankietę.

W celu uzyskania materiału badawczego, który pozwoli odpowiedzieć na uprzednio postawione problemy, zastosowana zostanie technika testu osiągnięć szkolnych oraz technika ankiety skierowanej do nauczycieli.

W ujęciu W. Zaczyńskiego „test to specjalna próba, identyczna dla wszystkich badanych, wprowadzana intencjonalnie w ściśle kontrolowanych warunkach i umożliwiająca obiektywny i dokładny pomiar badanej cechy, procesu psychicznego lub jego zewnętrznych rezultatów” (Zaczyński, 1976, s.121). Zdaniem W. Okonia test osiągnięć szkolnych to: „odmiana testu pedagogicznego służąca do pomiaru wyników uzyskiwanych w nauce szkolnej, obejmuje zbiór zróżnicowanych ze względu na przedmiot nauczania, za pomocą tych zadań sprawdza się stopień opanowania

wiadomości i sprawności, umiejętności rozwiązywania zagadnień, dokonywania oceny i stosowania wiedzy w nowych sytuacjach” (Okoń, 1995, s.289).

Celem testu jest sprawdzenie stopnia opanowania przez dzieci kończące edukację przedszkolną wiadomości i umiejętności matematycznych przewidzianych w podstawie programowej. Wyniki uzyskane w teście pomogą zbadać poziom kompetencji matematycznych dzieci z przedszkoli tradycyjnych oraz przedszkoli Montessori.

Ankieta jest w ujęciu W. Zaczyńskiego „metoda pośredniego zdobywania informacji przez pytania stawiane wybranym osobom za pośrednictwem drukowanej listy pytań, zwanej kwestionariuszem” (Zaczyński, 1995, s.146).

M. Łobocki (1984) uważa, że badania ankietowe wymagają starannego przygotowania, na które składają się:

1. postawienie problemu;
2. formułowanie pytań
3. ułożenie instrukcji;
4. badanie próbne;
5. przygotowanie ostatecznej wersji formularzy kwestionariusza (Łobocki, 1984).

Również W. Zaczyński (1995) zwraca uwagę na konieczność precyzyjnego opracowania ankiety oraz podaje wymagania, jakie muszą spełniać prawidłowo zredagowane pytania.

Środkiem pomocniczym każdej techniki są narzędzia badawcze. W ujęciu T. Pilcha narzędzie badawcze „(...) oznacza sposób technicznego gromadzenia badań i opracowania ich wyników” (Pilch, 1998, s.135). Według W. Okonia narzędzia badawcze „są to materiały lub urządzenia techniczne służące do przeprowadzania badań i opracowywania ich wyników” (Okoń, 1995, s.182). J. Gnitecki dodaje, że wszystkie narzędzia badawcze musi charakteryzować:

- „trafność pomiaru, czyli dostarczać informacji o tym czynniku, który jest przedmiotem badania, a nie o kilku jednocześnie bez możliwości ich wyodrębnienia,
- rzetelność, czyli dokładność pomiaru, a więc nie mogą być obarczone takim błędem, który uniemożliwiłby wnioskowanie z danych,
- praktyczność, więc muszą być dogodne w użyciu i stosowaniu na dużą skalę” (Gnitecki, 1993, s.153-154).

T. Pilch (1998) wskazuje reguły i zasady metodologiczne obowiązujące podczas przygotowania dowolnego narzędzia badawczego. Autor mówi o:

- konieczności budowania dla każdego badań odrębnych narzędzi badawczych;
- podporządkowaniu budowy i treści narzędzi celom ogólnym badań;
- konstruowaniu pytań odróżniających opisywanie od opiniowania;
- stosowaniu właściwej kolejności w przygotowaniu badań;
- dyscyplinie w zakresie jednoznaczności i ścisłości używanych pojęć i zdań;
- respektowaniu faktu, że wewnętrzna struktura narzędzi badań, stopień ich standaryzacji, wielkość, pytania kontrolne i filtrujące wpływają na wiarygodność uzyskiwanych informacji;
- tym, że każde narzędzie musi być rzetelne i trafne.

W pracy zostanie zastosowany autorski arkusz testu do badania poziomu kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną oraz kwestionariusz ankiety adresowanej do nauczycieli.

5. Organizacja i przebieg badań. Charakterystyka badanej grupy

Ze względu na podjętą w pracy problematykę badania zostały przeprowadzone w dwóch rodzajach placówek przedszkolnych.

W drodze doboru celowego wyznaczono pięć przedszkoli prowadzonych metodą Montessori zlokalizowanych na terenie Poznania i okolicy. Są to: Żłobek i Przedszkole Montessori w Poznaniu, Prywatne Przedszkole Montessori Bambini, Niepubliczne Polsko- Angielskie Przedszkole Montessori „Przystań Odkrywców”, oraz Niepubliczne Przedszkola Skrzaty w Borówcu, Kamionkach i Skórzewie.

Grupa dzieci z placówek montessoriańskich liczyła 70 osób: 35 dziewczynek i 35 chłopców. Wiek badanych wynosił 6 (81,3% badanych) i 7 lat (18,6%). Czas trwania edukacji przedszkolnej badanych dzieci kształtował się od jednego roku (1,4%), poprzez dwa (11,4%), trzy (47,21%) do lat czterech (40,0%). Z grupami diagnozowanych dzieci najczęściej pracowali młodzi nauczyciele ze stażem do lat 5 (77,1%) lub do 10 lat (22,9%).Większość z nich (57,1%) posiadała dodatkowe kwalifikacje zawodowe (załącznik nr 1). Badani nauczyciele uzupełniające kompetencje zawodowe uzyskali poprzez udział m.in. w: studiach podyplomowych: pedagogika Montessori na UMCS w Lublinie oraz Edukacja Elementarna, w kursach: pedagogika Montessori dla dzieci w wieku 2,5-6 lat, Wczesnoszkolna Edukacja Montessori, Matematyka według pedagogiki Montessori, wewnątrzprzedszkolnych kursach

nauczyciela Montessori, w szkoleniu Kształtowanie pojęć matematycznych dzieci w wieku przedszkolnym, a także w cyklu warsztatów dotyczących matematyki dziecięcej wg koncepcji E. Gruszczyk-Kolczyńskiej.

Grupa dzieci z przedszkoli tradycyjnych liczyła również 70 osób: 34 dziewczynki (48,6%) i 36 chłopców (51,4%). Wiek dzieci wynosił 6 (44,3% badanych) i 7 lat (55,3%). Czas trwania edukacji przedszkolnej kształtował się od lat dwóch (7,1%), poprzez trzy lata (45,7%) do lat czterech (47,1%). Z grupami badanych dzieci najczęściej pracowali młodzi nauczyciele ze stażem do lat 5 (48,6%), ale także ze zdecydowanie dłuższym stażem pracy zawodowej – do lat 20 (21,4%) oraz powyżej 20 lat (11,4%). Zdecydowana większość nauczycieli (87,1%) nie posiadała dodatkowych kwalifikacji zawodowych (załącznik nr 2). Jako źródło uzupełniających kompetencji zawodowych badani nauczyciele wskazali m.in. takie kursy, jak: metoda E. Gruszczyk-Kolczyńskiej, Dobry Start, Edukacja matematyczna w przedszkolu, Edukacja matematyczna dziecka w wieku od 3 do 6 lat, Wspomaganie dzieci w rozwoju umysłowym na przykładzie edukacji matematycznej, Matematyka już w przedszkolu, Świat liczb Willego oraz Edukacja matematyczna sześciolatka.

W wymienionych placówkach – po uzyskaniu zgody Dyrektora oraz rodziców - badaniami zostały objęte wszystkie dzieci w ostatnim roku edukacji przedszkolnej niezależnie od wieku, płci ani czasu trwania edukacji przedszkolnej. W badaniach zastosowano autorski zestaw 33 zadań, utworzonych na podstawie wymagań programowych dotyczących edukacji matematycznej w przedszkolu (załącznik nr 3). Zadania sprawdzały poziom umiejętności w zakresie:

- liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego;
- wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych;
- ustalania równoliczności dwóch zbiorów oraz posługiwania się liczebnikami porządkowymi;
- rozróżniania lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów;
- orientacji dzieci w zakresie pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą;
- znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku.

Test miał formę kart pracy zebranych w kopercie i dziecko samo decydowało, w jakiej kolejności wykona poszczególne ćwiczenia. Został przeprowadzony pod koniec roku szkolnego, w czerwcu 2014 roku. Wszystkie dzieci badano indywidualnie. Dzieci wykonywały zadania przy etapowym, pośrednim instruktażu nauczyciela wyjaśniającym poszczególne polecenia. Podczas badań zapewniona była cisza i spokój. W przedszkolach montessoriańskich dzieci mogły korzystać z materiałów rozwojowych. Materiał testowy prezentowano dziecku w postaci książeczki z ćwiczeniami jednocześnie kolejno odczytując polecenia lub pytania.

Badaniem zostali także objęci nauczyciele pracujący z najstarszą grupą dzieci w wybranych losowo przedszkolach Montessori i tradycyjnych. Dla potrzeb niniejszej pracy został skonstruowany w dwóch wersjach kwestionariusz ankiety dla nauczycieli dotyczącej oceny poziomu kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną. Pierwsza wersja ankiety przeznaczona jest dla nauczycieli pracujących z badanymi dziećmi i odnosi się indywidualnie do każdego dziecka (załącznik nr 4). Druga wersja ankiety ma charakter globalny i jest skierowana wyłącznie do kolejnych 50 nauczycieli przedszkoli tradycyjnych z terenu Poznania i okolic oraz do 50 nauczycieli montessoriańskich z całej Polski nauczycieli (załącznik nr 5). Do tych drugich ankiet dotarła pocztą elektroniczną przy współpracy z Polskim Stowarzyszeniem Montessori w Łodzi.

Ponadto opracowano kwestionariusz ankiety dla nauczycieli na temat przebiegu procesu rozwijania kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym (załącznik nr 6) i w systemie Montessori (załącznik nr 7). Badaniami tym narzędziem zostali objęci wskazani wyżej nauczyciele.

VI. Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w świetle badań własnych

Edukacja matematyczna dzieci rozpoczyna się na długo przed rozpoczęciem nauki matematyki w szkole. E.Gruszczczyk-Kolczyńska wskazuje wprost, że to ostatnie lata przedszkola są niezwykle istotne dla kształtowania się pewnego typu „rozumowania, który pozwala na odnoszenie sukcesów w edukacji matematycznej”. Zdaniem Z. Semadeniego coraz częściej „pojawiają się głosy, że o sukcesach lub porażkach ucznia w toku całej szkolnej nauki matematyki decyduje jakość edukacji w przedszkolu” (Semadeni, Gruszczczyk-Kolczyńska, Treliński, Bugajska-Jaszcot i Czajkowska, 2015).

W tym kontekście tak ważną rolę odgrywa edukacja matematyczna już najmłodszych dzieci.

W celu zbadania poziomu kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori zastosowano autorski zestaw 33 zadań dla dzieci, utworzony na podstawie wymagań programowych dotyczących edukacji matematycznej w przedszkolu. Ćwiczenia zostały podzielone na 6 grup działalności matematycznej dzieci, zgodnie z obowiązującą Podstawą Programową Wychowania Przedszkolnego w obszarze edukacji matematycznej. Każde zadanie zależnie od stopnia trudności i liczby przykładów było punktowane w skali od 0 do 8, co dało maksymalny wynik 108 punktów za cały test. Dla oceny umiejętności matematycznych uzyskano jeden wskaźnik ogólny i sześć szczegółowych. Wskaźnik ogólny otrzymano poprzez zsumowanie punktów, jakie zdobyło dziecko za wykonanie wszystkich zadań testu. Natomiast wskaźnikami szczegółowymi były miary umiejętności dzieci w zakresie: liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego, wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania liczb, ustalania równoliczności zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi; orientacji przestrzennej, umiejętności mierzenia długości oraz orientacji w czasie i znajomości określeń służących do jego pomiaru.

W obliczeniach statystycznych zastosowano testy korelacji Chi Kwadrat Pearsona.

1. Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego

Pierwszą badaną kompetencję matematyczną tworzą dwa elementy składowe: umiejętność liczenia obiektów oraz umiejętność rozróżniania liczenia błędnego od poprawnego.

Do zbadania poziomu kompetencji dzieci w zakresie liczenia obiektów zastosowano cztery zadania.

W pierwszym należało przeliczyć narysowane patyczki (było ich 12), a następnie utworzyć z nich zbiór dziesięcioelementowy. Zadanie drugie polegało na wyodrębnieniu spośród podanych zbiory cztero- i pięcioelementowe niezależnie od położenia elementów, a więc z uwzględnieniem pojęcia stałości ilości nieciągłych. Trzecie ćwiczenie dotyczyło przeliczania liczby elementów w zbiorze, a następnie połączenia go z zapisaną cyfrą, czyli powiązania kardynalnego i symbolicznego aspektu liczby. Zgodnie z zasadą stopniowania trudności zastosowano różne położenia elementów: szereg, po dwa i rozproszone, a także uwzględniono zbiór pusty i liczbę zero. W ostatnim zadaniu dziecko - poprzez zamalowanie tworzyło zbiory o podanej liczbie elementów w zakresie 10.

W celu zbadania poziomu drugiej składowej analizowanej kompetencji, mianowicie rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego przygotowano dwa zadania. W pierwszym ćwiczeniu należało wskazać, które z dzieci prawidłowo przeliczyło piłki. Zadanie drugie dotyczyło oceny poprawności wykonanego przeliczenia elementów poprzez udzielenie odpowiedzi TAK lub NIE na pytanie: „Czy Ania dobrze policzyła?”³

³ Przyjęto następującą punktację zadań:

zadanie 1 – 2 punkty

zadanie 2 – 2 punkty

zadanie 3 - 4 punkty

zadanie 4 – 3 punkty

zadanie 5 – 1 punkt

zadanie 6 – 3 punkty

Poziom analizowanej kompetencji określano według skali:

100% 15 pkt.

POZIOM BARDZO WYSOKI

Grupa dzieci z przedszkoli Montessori

W tabeli nr 2 przedstawiono wyniki z kolejnych zadań uzyskane przez badaną grupę dzieci.

99 – 75%	14 – 11 pkt.	POZIOM WYSOKI
74 – 50%	10 - 7 pkt.	POZIOM ŚREDNI
49 – 25%	6 – 4 pkt.	POZIOM NISKI
24 - 0%	poniżej 4 pkt.	POZIOM BARDZO NISKI

Tabela nr 2 Liczenie obiektów i rozróżnianie błędnego liczenia od poprawnego - średnia liczba uzyskanych punktów/ poziom wykonania zadań - przedszkole Montessori

Nr zadania	Średnia liczba punktów/ poziom wykonania zadania ⁴	Dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej				staż pracy nauczyciela		kwalifikacje dodatkowe nauczyciela	
		6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	1 rok	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	tak	Nie
A1	1,67 pkt. 83,50% poziom wysoki	1,62 pkt. 81,0% poziom wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	1,84 pkt. 92,0% poziom wysoki	1,50 pkt. 75,0% poziom wysoki	2,00 pkt. 100% bardzo wysoki	1,88 pkt. 94,0% wysoki	1,73 pkt. 86,5% poziom wysoki	1,75 pkt. 87,5% wysoki	1,78 pkt. 89,0% wysoki	1,69 pkt. 84,5% wysoki	1,80 pkt. 84,5% wysoki	1,70 pkt. 84,5% wysoki
A2	1,86 pkt. 93,0% poziom wysoki	1,81 pkt. 90,5% poziom wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	1,97 pkt. 98,5% poziom wysoki	2,00 pkt. 100% bardzo wysoki	2,00 pkt. 100% bardzo wysoki	1,88 pkt. 94,0% wysoki	1,88 pkt. 94,0% wysoki	1,96 pkt. 98,0% wysoki	1,91 pkt. 95,5% wysoki	1,94 pkt. 97,0% wysoki	1,93 pkt. 96,5% wysoki	1,90 pkt. 95,0% wysoki
A3	3,97 pkt. 99,3% poziom wysoki	3,96 pkt. 99,0% poziom wysoki	3,89 pkt. 97,3% poziom wysoki	4,00 pkt. 100% poziom bardzo	4,00 pkt. 100% poziom bardzo	4,00 pkt. 100% bardzo	3,88 pkt. 97,0% wysoki	4,00 pkt. 100% bardzo	3,96 pkt. 99,0% wysoki	3,96 pkt. 99,0% wysoki	4,00 pkt. 100% bardzo	3,98 pkt. 99,5% wysoki	3,97 pkt. 99,3% wysoki

⁴ Poziom wykonania zadania określono wg skali

100%	POZIOM BARDZO WYSOKI
99 – 75%	POZIOM WYSOKI
74 – 50%	POZIOM ŚREDNI
49 – 25%	POZIOM NISKI
24 - 0%	POZIOM BARDZO NISKI

				wysoki	wysoki	wysoki		wysoki			wysoki		
A4	2,82 pkt. 94,0% poziom wysoki	2,77 pkt. 92,3% poziom wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,81 pkt. 93,7% poziom wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,50 pkt. 83,3% poziom wysoki	2,79 pkt. 93,0% poziom wysoki	2,96 pkt. 98,7% poziom wysoki	2,80 pkt. 93,3 % poziom wysoki	2,94 pkt. 98,0% poziom wysoki	2,80 pkt. 93,3% poziom wysoki	2,87 pkt. 95,7% poziom wysoki
A5	0,96 pkt. 96,0% poziom wysoki	0,96 pkt. 96,0% poziom wysoki	0,89 pkt. 89,0% poziom wysoki	0,97 pkt. 97,0% poziom wysoki	1,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	1,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	1,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	0,97 pkt. 97,0% poziom wysoki	0,93 pkt. 93,0% poziom wysoki	0,98 pkt. 98,0% poziom wysoki	0,88 pkt. 88,0% poziom wysoki	0,98 pkt. 98,0% poziom wysoki	0,93 pkt. 93,0% poziom wysoki
A6	2,94 pkt. 98,0% poziom wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,89 pkt. 99,3% poziom wysoki	2,90 pkt. 96,7% poziom wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,91 pkt. 97,0% poziom wysoki	2,96 pkt. 98,7% poziom wysoki	2,94 pkt. 98,0% poziom wysoki	2,94 pkt. 98,0% poziom wysoki	2,95 pkt. 98,3% poziom wysoki	2,93 pkt. 97,7% poziom wysoki

Badana grupa dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori uzyskała średnią liczbę punktów 14,36⁵, czyli 95,7% maksymalnej punktacji, co świadczy o wysokim poziomie opanowania umiejętności matematycznych w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego. Nieco wyższą średnią punktów uzyskali chłopcy – 14,4 (w grupie dziewczynek - 14,1). Najślabszy osiągnięty rezultat to 9 punktów, co jednak stanowi 60% możliwych punktów i wskazuje na średni poziom opanowania analizowanych umiejętności matematycznych.

Z tabeli nr 2 wynika, że z zadań dotyczących umiejętności liczenia obiektów najmniej trudności badanym dzieciom sprawiło łączenie zbioru z cyfrą oznaczającą jego liczebność (zadanie A3). Uzyskana średnia liczba punktów - 3,97 stanowi 99,25% maksymalnej punktacji i wskazuje na wysoki poziom opanowania umiejętności łączenia kardynalnego aspektu liczby z jej aspektem symbolicznym. Zadanie prawidłowo wykonało 68 z badanych dzieci (97,1%), w tym wszyscy badani chłopcy. Nie zdiagnozowano istotnych różnic między poszczególnymi przykładami; problemu nie stanowił również zbiór pusty.

Stosunkowo najtrudniejsze było pierwsze zadanie (A1). Analiza przeprowadzonych badań wskazuje, że dzieci nieco lepiej przeliczają elementy powyżej 10 (60 poprawnych odpowiedzi – 85,7%) aniżeli tworzą zbiór dziesięcioelementowy (50 poprawnych odpowiedzi, czyli 71,4%)⁶. Niespodziewanie najslabiej poradzili sobie z tym zadaniem siedmioletni chłopcy.

Zadania z drugiej grupy – dotyczące umiejętności rozróżniania liczenia błędnego od poprawnego nie sprawiły badanym dzieciom trudności. Bardzo łatwym okazało się ćwiczenie dotyczące określania poprawności dokonanego przeliczenia elementów zbioru (zadanie A6). 66 badanych dzieci (94, 3%) potrafiło w każdym podanym przykładzie ocenić, czy podany wynik przeliczenia jest prawidłowy czy błędny. Zdiagnozowano niewielki spadek prawidłowych odpowiedzi wraz ze wzrastającą liczbą elementów (od 100% prawidłowych odpowiedzi przy zbiorze 5-elementowym poprzez 98, 6% przy zbiorze 8-elementowym do 94, 3% przy zbiorze 9-elementowym)⁷.

⁵ Średnia arytmetyczna obliczona wg wzoru
$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

⁶ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

⁷ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Wyniki przedstawione w tabeli nr 2 wskazują, że wyższy poziom wykonania analizowanych zadań wykazali chłopcy, uzyskując lepszą średnią punktów we wszystkich czterech ćwiczeniach dotyczących przeliczania. Dziewczynki natomiast osiągnęły wyższe wyniki przy rozróżnianiu poprawnego i błędnego liczenia⁸.

Najwyższe kompetencje liczenia prezentują chłopcy siedmioletni, którzy pięć z sześciu zadań wykonali na bardzo wysokim poziomie. W grupie dziewczynek wyższy poziom prezentują dziewczynki starsze – siedmioletnie, które potrafią bezbłędnie przeliczać powyżej 10, tworzyć zbiór dziesięcioelementowy, wyróżniać oraz tworzyć zbiory o podanej liczebności.

Tabela nr 3 Poziom kompetencji w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego – przedszkole Montessori (zestawienie procentowe)⁹

Poziom kompetencji	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej				staż pracy nauczyciela		kwalifikacje dodatkowe	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	1rok	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	tak	Nie
bardzo wysoki	46,2	55,6	51,6	50	100	50	45,5	53,6	53,7	37,5	52,5	46,7
wysoki	46,2	44,4	45,2	50	-	50	48,5	42,9	40,7	62,5	45	46,7
średni	7,7	-	3,2	-	-	-	6,1	3,6	5,6	-	2,5	6,6
niski	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
bardzo niski	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Wyniki przedstawione w tabeli nr 3 wskazują, że większość badanych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori prezentuje bardzo wysoki i wysoki poziom kompetencji matematycznych w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego. Należy zaznaczyć, że 35 dzieci (50%) wykonało wszystkie zadania na poziomie bardzo wysokim uzyskując maksymalną liczbę punktów.

Wyższe kompetencje matematyczne prezentują - niezależnie od płci - dzieci siedmioletnie. Na najniższym zdiagnozowanym poziomie, czyli na poziomie średnim analizowane umiejętności opanowało zaledwie troje dzieci (2,1%). Są to wyłącznie sześciolatki. Niepokoić może jedynie fakt, że są to dzieci, które uczęszczały do przedszkola przez 3, a nawet przez 4 lata. Jednakże ze względu na bardzo małą liczebność grupy (dwie dziewczynki i jeden chłopiec) można uznać ten wynik jako mało znaczący diagnostycznie.

⁸ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

⁹ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Zaskakujący natomiast jest fakt, że wszystkie dzieci uczęszczające do przedszkola tylko przez rok potrafią liczyć i rozróżniać liczenie błędne od poprawnego na bardzo wysokim poziomie.

W oparciu o wyliczony wskaźnik istotności statystycznej stwierdzono, że wiek dzieci, płeć oraz czas trwania edukacji przedszkolnej nie są czynnikami różnicującymi poziom kompetencji matematycznych w zakresie liczenia oraz odróżniania liczenia poprawnego od błędnego¹⁰.

Analiza statystyczna nie wskazuje także różnicowania poziomu omawianych kompetencji dzieci przez staż pracy nauczyciela oraz posiadane przez niego kwalifikacje dodatkowe¹¹.

Grupa dzieci z przedszkoli tradycyjnych

W tabeli nr 4 przedstawiono wyniki z poszczególnych zadań uzyskane przez badaną grupę dzieci.

¹⁰ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; płeć $p = 0,682$; wiek $p = 0,866$; czas trwania edukacji $p = 0,455$

¹¹ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,543$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,373$

Tabela nr 4 Liczenie obiektów i rozróżnianie błędnego liczenia od poprawnego średnia liczba uzyskanych punktów/ poziom wykonania zadań przedszkole tradycyjne

Nr zadania	Średnia liczba punktów/ poziom wykonania zadania ¹²	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej			staż pracy nauczyciela				kwalifikacje dodatkowe	
		6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	11-20	powyżej 20	tak	nie
A1	1,81 pkt. 90,5% poziom wysoki	1,81 pkt. 90,5% poziom wysoki	1,72 pkt. 86,0% poziom wysoki	1,81 pkt. 90,5% poziom wysoki	1,95 pkt. 97,5% poziom wysoki	1,80 pkt. 90,0% poziom wysoki	1,78 pkt. 89,0% poziom wysoki	1,85 pkt. 92,5% poziom wysoki	1,88 pkt. 94,0% poziom wysoki	1,77 pkt. 88,5% poziom wysoki	1,87 pkt. 93,5% poziom wysoki	1,50 pkt. 75,0% poziom wysoki	1,78 pkt. 89,0% poziom wysoki	1,82 pkt. 91,% poziom wysoki
A2	1,72 pkt. 86,0% poziom wysoki	1,81 pkt. 90,5% poziom wysoki	1,78 pkt. 89,0% poziom wysoki	1,67 pkt. 83,5% poziom wysoki	1,95 pkt. 97,5% poziom wysoki	1,40 pkt. 70,0% poziom średni	1,81 pkt. 90,5% poziom wysoki	1,85 pkt. 92,5% poziom wysoki	1,88 pkt. 94,0% poziom wysoki	1,85 pkt. 92,5% poziom wysoki	1,73 pkt. 86,5% poziom wysoki	1,50 pkt. 75,0% poziom wysoki	1,78 pkt. 89,0% poziom wysoki	1,80 pkt. 90,0% poziom wysoki
A3	3,9 pkt. 97,5% poziom wysoki	3,75 pkt. 93,8% poziom wysoki	3,89 pkt. 97,3% poziom wysoki	4,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	3,97 pkt. 99,3% poziom wysoki	3,20 pkt. 80,0% poziom wysoki	3,97 pkt. 90,5% poziom wysoki	3,94 pkt. 98,5% poziom wysoki	4,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	3,77 pkt. 94,3% poziom wysoki	4,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	3,50 pkt. 87,5% poziom wysoki	3,56 pkt. 89,0% poziom wysoki	3,95 pkt. 98,8% poziom wysoki

¹² Poziom wykonania zadania określono wg skali

100% POZIOM BARDZO WYSOKI

99 – 75% POZIOM WYSOKI

74 – 50% POZIOM ŚREDNI

49 – 25% POZIOM NISKI

24 - 0% POZIOM BARDZO NISKI

A4	2,9 pkt. 96,7 % poziom wysoki	2,94 pkt. 98,0% poziom wysoki	2,94 pkt. 98,0% poziom wysoki	2,93 pkt. 97,8% poziom wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,80 pkt. 93,3% poziom wysoki	2,97 pkt. 99,0% poziom wysoki	2,97 pkt. 99,0% poziom wysoki	2,97 pkt. 99,0 % poziom wysoki	2,92 pkt. 97,3 % poziom wysoki	2,93 pkt. 97,7 % poziom wysoki	3,00 pkt. 100 % poziom bardzo wysoki	3,00 pkt. 100 % poziom bardzo wysoki	2,95pkt. 98,3 % poziom wysoki
A5	0,9 pkt. 90,0% poziom wysoki	1,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	0,94 pkt. 94,0% poziom wysoki	1,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	0,98 pkt. 98,0% poziom wysoki	1,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	0,97 pkt. 97,0% poziom wysoki	0,97 pkt. 97,0% poziom wysoki	0,97 pkt. 97,0% poziom wysoki	0,92 pkt. 92,0% poziom wysoki	1,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	1,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	1,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	0,97 pkt. 97,0% poziom wysoki
A6	2,8 pkt. 93,3% poziom wysoki	2,63 pkt. 87,7% poziom wysoki	2,94 pkt. 98,0% poziom wysoki	2,67 pkt. 89,0% poziom wysoki	2,95 pkt. 98,3% poziom wysoki	2,20 pkt. 73,3% poziom średni	2,75 pkt. 91,7% poziom wysoki	2,94 pkt. 98,0% poziom wysoki	2,76 pkt. 92,0% poziom wysoki	2,92 pkt. 97,3% poziom wysoki	2,87 pkt. 95,7% poziom wysoki	2,63 pkt. 87,7% poziom wysoki	2,67 pkt. 89,03% poziom wysoki	2,82 pkt. 94,0% poziom wysoki

Badana grupa dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym uzyskała średnią liczbę punktów 14,05¹³, czyli 93,7% maksymalnej punktacji, co świadczy o wysokim poziomie opanowania kompetencji w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego. Nieco wyższą średnią punktów uzyskali chłopcy – 14,3 punktów, podczas gdy średni wynik w grupie dziewczynek wynosi 13,9 punktów. Najslabszy osiągnięty rezultat to 8 punktów, co jednak stanowi 53,3% możliwych punktów i świadczy o średnim poziomie opanowania analizowanych umiejętności matematycznych.

Z pierwszej grupy zadań - dotyczących umiejętności liczenia obiektów, najmniej trudności badanym dzieciom sprawiło powiązanie zbioru z cyfrą oznaczającą jego liczebność (zadanie A3). Uzyskano 97,5% maksymalnej liczby punktów, co wskazuje na wysoki poziom opanowania umiejętności łączenia kardynalnego i symbolicznego aspektu liczby. Siedmioletni chłopcy wykonali to zadanie bezbłędnie.

Łatwym okazało się także zadanie dotyczące tworzenia zbiorów o podanej liczbie elementów (A4). Zdecydowana większość badanych dzieci (94,3 %) prawidłowo utworzyła zbiory o wskazanej liczebności. Nie stwierdzono statystycznych różnic odnośnie wyznaczania poszczególnych zbiorów zależnie od liczebności, jednakże zbiór najmniejszy – dwuelementowy prawidłowo utworzyły wszystkie badane dzieci. Także to ćwiczenie optymalnie wykonali siedmioletni chłopcy.

Stosunkowo najtrudniejszym było drugie zadanie (A2). Analiza przeprowadzonych badań wskazuje, że trudność dla dzieci stanowiło różne położenie tych samych elementów. Ponadto wielu badanych miało problem z dłuższą koncentracją uwagi na zadaniu oraz spostrzeganiem wzrokowym. Najslabiej poradziły sobie z tym zadaniem dzieci uczęszczające do przedszkola tylko przez dwa lata.

Zadania z drugiej grupy – dotyczące umiejętności rozróżniania liczenia błędnego od poprawnego nie sprawiły badanym przedszkolakom większych trudności. W obu z nich uzyskano średnią liczbę punktów świadczącą o wysokim poziomie opanowania analizowanej umiejętności (zadanie A5 – 90,0%, zadanie A6 – 93,3%).

¹³ Średnia arytmetyczna obliczona wg wzoru:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Tabela nr 5 Poziom kompetencji w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego – przedszkole tradycyjne (zestawienie procentowe)

Poziom kompetencji	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej			staż pracy nauczyciela				kwalifikacje dodatkowe	
	6 lat	7 lat	6 lat	7lat	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	11-20	powyżej 20	tak	nie
bardzo wysoki	31,3	44,4	33,3	57,1	40,0	37,5	48,5	41,2	38,5	60,0	25,0	44,4	42,6
wysoki	62,5	55,6	66,7	42,9	40,0	62,5	51,5	58,8	61,5	40,0	62,5	44,4	57,4
średni	6,3	-	-	-	20,0	-	-	-	-	-	12,5	11,1	-
niski	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
bardzo niski	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Jak wynika z wyników przedstawionych w tabeli nr 5 większość badanych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym prezentuje wysoki poziom umiejętności matematycznych w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego. W obu grupach wiekowych dziewczynek i wśród sześciolletnich chłopców osiągnęła go ponad połowa badanych. Należy zaznaczyć, że 30 dzieci (49,2%) wykonało wszystkie zadania na poziomie bardzo wysokim uzyskując maksymalną liczbę punktów. Są to głównie dzieci, z którymi pracują pedagodzy z dłuższym, bo 11-20 letnim stażem pracy. Natomiast relatywnie najniższe są umiejętności badanych dzieci z grup nauczycieli pracujących zawodowo ponad 20 lat (12,5% na poziomie średnim).

Najniższy ze zdiagnozowanych poziomów - poziom średni dotyczy niewielkiej grupy młodszych dziewczynek (6,3%). Są to dzieci, których edukacja przedszkolna trwała krótko - tylko jeden rok.

W oparciu o wyliczony wskaźnik istotności statystycznej stwierdzono, że czynnikiem różnicującym poziom kompetencji matematycznych w zakresie liczenia oraz odróżniania liczenia poprawnego od błędnego jest czas trwania edukacji przedszkolnej¹⁴. Jest to zależność wprost proporcjonalna o umiarkowanej sile¹⁵. W badanej grupie dzieci umiejętności w zakresie liczenia wzrastają wraz z czasem trwania edukacji przedszkolnej. Średni poziom wykonania wybranych zadań wykazały tylko dzieci uczęszczające

¹⁴ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,009$

¹⁵ Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,310

do przedszkola najkrócej - dwa lata. W większości zadań najwyższy odsetek maksymalnej liczby punktów uzyskały dzieci, których edukacja przedszkolna trwała 4 lata.

Nie zdiagnozowano natomiast istotnego różnicowania poziomu umiejętności liczenia przez płeć i wiek dzieci ¹⁶.

Analiza statystyczna nie wskazuje także, aby czynnikiem różnicującym poziom omawianych kompetencji dzieci był staż pracy nauczyciela oraz posiadane przez niego kwalifikacje dodatkowe ¹⁷.

Podsumowanie i dyskusja

Z przeprowadzonych badań wynika, że w zakresie umiejętności poprawnego liczenia obiektów i rozróżniania liczenia poprawnego od błędnego nieco wyższe wyniki uzyskały dzieci z przedszkoli Montessori (średnia liczba zdobytych punktów 14,36, czyli 95,7% maksymalnej punktacji) niż z przedszkoli tradycyjnych (średnia liczba punktów wynosi 14,05, czyli 93,7% maksymalnej punktacji). W obu badanych grupach dzieci najwyższy uzyskany wynik wynosi 15 punktów (w przedszkolach Montessori – częstość 50,0%; w przedszkolach tradycyjnych częstość – 42,9%,). W placówkach Montessori najniższa liczba zdobytych punktów to 9 (częstość 1,4%), w placówkach tradycyjnych - 8 punktów (częstość 1,4%) ¹⁸.

Stwierdzono różnice w poziomie umiejętności wyodrębniania zbiorów o podanej liczbie elementów. Wśród dzieci z przedszkoli Montessori 82,9% badanych wykonało to zadanie bezbłędnie, a z przedszkoli tradycyjnych tylko 65,7% badanych ¹⁹. Ponadto dzieci placówek montessoriańskich wykazały się wyższą umiejętnością przeliczania elementów w zbiorze i łączenia ich z właściwą cyfrą, czyli łączeniem kardynalnego i symbolicznego aspektu liczby.

Natomiast dzieci z przedszkoli tradycyjnych lepiej przeliczają elementy powyżej dziesięciu i tworzą zbiór dziesięcioelementowy.

U dzieci z obu badanych grup zdiagnozowano trudności w przeliczaniu większej liczby elementów. Dotyczyły one pomijania obiektów i podwójnego liczenia.

¹⁶ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; płeć $p = 0,307$; wiek $p = 0,593$

¹⁷ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,062$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,767$

¹⁸ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

¹⁹ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Podczas wyodrębniania zbiorów cztero- i pięcioelementowych dzieci wykazywały się samokontrolą błędów i gdy wykonywały drugą część zadania (zaznaczanie zbiorów 5-elementowych) uzupełniały zauważone braki z pierwszej części (zaznaczanie zbiorów 4-elementowych).

Analizując drugi element analizowanej kompetencji matematycznej, czyli umiejętność rozróżniania liczenia błędnego od poprawnego, ustalono, że wyższy jej poziom zaprezentowała badana grupa dzieci z placówek Montessori. 94,3% z nich we wszystkich trzech przykładach prawidłowo odpowiedziało, czy Ania dobrze lub źle przeliczyła elementy w pętłach (zadanie A6).

Uzyskane wyniki (średnia liczba punktów 14,21, czyli 94,7% maksymalnej punktacji) pozwalają wnioskować o górnej granicy wysokiego poziomu opanowania przez dzieci kończących edukację przedszkolną umiejętności liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego.

136 badanych dzieci (97,1%) uzyskało co najmniej 11 punktów, które stanowiły 75% punktów możliwych i zgodnie z przyjętą skalą oznaczało wysoki poziom opanowania kompetencji. 65 badanych przedszkolaków (46,4%) bezbłędnie wykonało wszystkie ćwiczenia, prezentując bardzo wysoki poziom analizowanej kompetencji matematycznej²⁰.

Można zatem stwierdzić, że dzieci dysponują w pełni ukształtowanym schematem liczenia. Dostrzegają błędy w liczeniu, znają ciąg liczebników i nadają im właściwy sens: znają ich stałe następstwo i wiedzą, że każdy z nich określa zarówno ostatni liczony element, jak i to, ile jest ich razem.

Podobne wnioski wynikają z badań U. Oszwy (2006), która stwierdza, że „większość dzieci potrafi liczyć sekwencyjnie, zna kolejne liczebniki. Różnice dotyczą poprawnej kolejności oraz zakresu używanych liczebników, który waha się od 5 nawet do 1000” (Oszwa, 2006,s.25).

Również J. Kłysewicz (2008) na podstawie badań sześciolatków wskazuje, iż „większość przebadanych dzieci liczy prawidłowo i spontanicznie, a także potrafi określić liczebność zbioru, posługując się ostatnim wymienionym liczebnikiem” (Kłysewicz, 2008, s.24). Potwierdzają to także badania A. Jacewicz (2007), które obejmowały 200-osobową grupę dzieci 6-7-letnich z białostockich przedszkoli. W oparciu o zebrane wyniki autorka stwierdza, że „wśród badanych nie było dzieci liczących chaotycznie, nie przestrzegających

²⁰ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

„aksjomatów” liczenia” (Jacewicz, 2007, s.185). Zbieżne wnioski formułuje D. Waloszek, której badania wskazują „na powszechną, wysoką znajomość liczebników i umiejętność posługiwania się nimi. Są dzieci (89,0%) liczące sprawnie powyżej 10, a nawet do 1000” (Waloszek, 1993, s.119).

E. Gruszczyk-Kolczyńska dowodzi, że poprzez właściwe oddziaływania dydaktyczne „większość sześciolatków może reprezentować wysoki poziom opanowania umiejętności liczenia tuż przed rozpoczęciem nauki w klasie I” (Gruszczyk-Kolczyńska, 2009b, s.120). Dziecko kończące edukację przedszkolną, w ocenie autorki prezentuje w pełni ukształtowany schemat liczenia, a także „dostrzega błędy w liczeniu i umie wyjaśnić, na czym one polegają” (Gruszczyk-Kolczyńska 2009b, s.120).

Wspomniana E. Gruszczyk-Kolczyńska (2009) zaznacza jednocześnie, że wobec dzieci, które nie osiągnęły takiego poziomu należy odroczyć obowiązek szkolny i objąć je intensywnymi działaniami dydaktyczno-wyrównawczymi. Dla skutecznej ich realizacji autorka przedstawia wiele propozycji zabaw, gier i zadań specjalnie organizowanych dla kształtowania dziecięcego liczenia (Gruszczyk-Kolczyńska, 1992). Umiejętność liczenia jest bowiem - zdaniem badaczki bardzo ważnym wskaźnikiem rozwoju umysłowego dziecka.

2. Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w zakresie wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych.

Do zbadania poziomu kompetencji matematycznych dzieci w zakresie wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych posłużono się siedmioma zadaniami.

Zadanie pierwsze polegało na dodawaniu liczb w oparciu o narysowane elementy i obejmowało trzy przykłady: dodawanie dwóch składników, dodawanie trzech składników oraz dodawanie z wartością sumy powyżej 10. Zadanie drugie dotyczyło odejmowania liczb. W pierwszym przykładzie dziecko - w oparciu o narysowane konkrety, wyznaczało wartość różnicy, w drugim dodatkowo samodzielnie przeliczało również odjemnik (wyznaczony poprzez skreślenie), a w trzecim – dziecko samodzielnie ustalało wartość odjemnika przy podanej odjemnej i różnicy. Zadanie trzecie obejmowało przykłady, w których dodawanie i odejmowanie liczb zapisane było symbolicznie w postaci działania arytmetycznego.

Dziecko łączyło podane działania (dwa na dodawanie i dwa na odejmowanie) z właściwym wynikiem. Badany mógł korzystać z wybranych przez siebie strategii liczenia na palcach lub wspierać się innym materiałem konkretnym. Zadanie czwarte sprawdzało rozumienie dodawania jako powiększania i odejmowania jako pomniejszania. Trzy kolejne zadania cechował wyższy poziom trudności. Zastosowano w nich przykłady z tzw. luką oraz dodawanie i odejmowanie w poszerzonym zakresie liczbowym do 20. Wszystkie przykłady wymagały wykonywania rachunku liczbowego w pamięci²¹.

Grupa dzieci z przedszkoli Montessori

W tabeli nr 6 przedstawiono wyniki z poszczególnych zadań uzyskane przez badaną grupę dzieci.

²¹ Przyjęto następującą punktację zadań:

Zadanie 1 – 5 punktów (1+2+2)

Zadanie 2 – 6 punktów

Zadanie 3 – 4 punkty

Zadanie 4 – 4 punkty

Zadanie 5 – 4 punkty

Zadanie 6 – 2 punkty

Zadanie 7 – 2 punktów

Razem 27 punktów

Tabela nr 6 Wyznaczanie wyniku dodawania i odejmowania przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych średnia liczba uzyskanych punktów/ poziom wykonania zadań - przedszkole Montessori

Nr zadania	Średnia liczba punktów/ poziom wykonania zadania ²²	dziewczynki		Chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej				staż pracy nauczyciela		kwalifikacje dodatkowe nauczyciela	
		6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	1 rok	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	tak	nie
B1	3,74 pkt.	3,58 pkt.	4,33 pkt.	3,74 pkt.	3,50 pkt.	4,00 pkt.	2,50 pkt.	3,67 pkt.	4, 18pkt.	3,94 pkt.	3,06 pkt.	3,80 pkt.	3,67 pkt.
	74,8%	71,6%	74,8%	74,8%	70,0%	80,0%	50,0%	73,4%	83,6%	78,8%	61,2%	76,0%	73,4%
	poziom średni	poziom średni	poziom średni	poziom średni	poziom średni	poziom wysoki	poziom średni	poziom średni	poziom wysoki	poziom wysoki	poziom średni	poziom wysoki	poziom średni
B2	4,89 pkt.	4,58 pkt.	5,67 pkt.	4,97 pkt.	6,00 pkt.	6,00 pkt.	3,00 pkt.	4,85 pkt.	5,64 pkt.	5,15 pkt.	4,38 pkt.	4,90 pkt.	5,07 pkt.
	81,5%	76,3%	94,5%	82,8%	100%	100%	50,0%	80,8%	94,0%	85,8%	73,0%	81,7%	84,1,0%
	poziom wysoki	poziom wysoki	poziom wysoki	poziom wysoki	poziom bardzo wysoki	poziom bardzo wysoki	poziom średni	poziom wysoki	poziom wysoki	poziom wysoki	poziom średni	poziom wysoki	poziom wysoki
B3	3,17 pkt.	2,89 pkt.	3,56 pkt.	3,32 pkt.	3,00 pkt.	4,00 pkt.	1,89 pkt.	3,06 pkt.	3,64 pkt.	3,29 pkt.	2,81 pkt.	3,05 pkt.	3,33 pkt.
	79,25%	72,3%	89,0%	83,0%	75,0%	100%	47,3%	76,5%	91,0%	82,3%	70,3%	76,3%	83,3%
	poziom wysoki	poziom średni	poziom wysoki	poziom wysoki	poziom wysoki	poziom bardzo wysoki	poziom wysoki	poziom wysoki	poziom wysoki	poziom wysoki	poziom średni	poziom wysoki	poziom wysoki

²² Poziom wykonania zadania określono wg skali

100% POZIOM BARDZO WYSOKI

99 – 75% POZIOM WYSOKI

74 – 50% POZIOM ŚREDNI

49 – 25% POZIOM NISKI

24 - 0% POZIOM BARDZO NISKI

B4	2,8 pkt. 70% poziom średni	2,69 pkt. 67,3% poziom średni	2,22 pkt. 55,5% poziom średni	3,16 pkt. 79,1% poziom wysoki	2,00 pkt. 50,0% poziom średni	4,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,38 pkt. 59,5% poziom średni	2,88 pkt. 72,0% poziom średni	2,79 pkt. 69,8% poziom średni	2,96 pkt. 74,0% poziom średni	2,25 pkt. 56,3% poziom średni	2,80 pkt. 70,0% poziom średni	2,80 pkt. 70,0% poziom średni
B5	2,47 pkt. 61,8% poziom średni	2,19 pkt. 54,8% poziom średni	1,89 pkt. 47,3% poziom niski	2,87 pkt. 71,8% poziom niski	2,50 pkt. 62,5% poziom średni	4,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	0,88 pkt. 22,0% poziom bardzo niski	2,76 pkt. 69,0% poziom średni	2,54 pkt. 63,5% poziom średni	2,63 pkt. 65,8% poziom średni	1,94 pkt. 48,5% poziom niski	2,43 pkt. 60,8% poziom średni	2,53 pkt. 63,3% poziom średni
B6	1,37 pkt. 68,5% poziom średni	1,08 pkt. 54,0% poziom średni	1,22 pkt. 61,0% poziom średni	1,65 pkt. 82,5% poziom wysoki	1,50 pkt. 75,0% poziom wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	0,50 pkt. 25,0% poziom niski	1,42 pkt. 71,0% poziom średni	1,54 pkt. 77,0% poziom wysoki	1,46 pkt. 73,0% poziom średni	1,94 pkt. 97,0% poziom wysoki	1,38 pkt. 69,0% poziom średni	1,37 pkt. 68,5% poziom średni
B7	0,98 pkt. 49,0 % poziom niski	0,77 pkt. 38,5 % poziom bardzo niski	0,89 pkt. 44,5 % poziom niski	1,19 pkt. 59,5 % poziom średni	1,00 pkt. 50,0 % poziom średni	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	0,13 pkt. 6,5 % poziom bardzo niski	1,03 pkt. 51,5 % poziom średni	1,14 pkt. 57,0 % poziom średni	1,11 pkt. 55,5 % poziom średni	0,56 pkt. 28,0 % poziom niski	0,83 pkt. 41,5 % poziom niski	1,20 pkt. 60,0 % poziom średni

Badana grupa dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori uzyskała średnią liczbę punktów 19,61²³, czyli 72,6% maksymalnej punktacji, co świadczy o średnim poziomie opanowania kompetencji w zakresie wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania liczb przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych. Zdecydowanie wyższą średnią liczbę punktów zdobyli chłopcy – 20,8 punktów. Średnia liczba punktów uzyskana przez dziewczynki wynosi 18,3 punktów.

Z tabeli nr 6 wynika, że najmniej trudności sprawiły dzieciom ćwiczenia z odejmowaniem liczb na konkretnych obiektach: obliczenie różnicy liczb, przeliczanie odjemnika wraz z obliczeniem różnicy oraz ustalanie wartości odjemnika przy podanej odjemnej i różnicy (zadanie B2). Uzyskana średnia liczba punktów – 4,89 stanowi 81,5% maksymalnej punktacji i wskazuje na wysoki poziom opanowania umiejętności odejmowania liczb w oparciu o konkrety. 40 badanych dzieci (57,1%) poprawnie wykonało wszystkie ćwiczenia uzyskując maksymalne 6 punktów. Ponadto większość badanych (80%) poradziła sobie także z obliczeniem różnicy oraz z przeliczeniem skreślonego odjemnika i ustaleniem wyniku. Nieco więcej problemów sprawiło dzieciom wyznaczenie wartości odjemnika przy podanej odjemnej i różnicy, czyli tzw. zadanie z luką – 68,6% prawidłowych odpowiedzi. Najwyższy poziom omawianej sprawności wykazali siedmioletni chłopcy wykonując bezbłędnie wszystkie podane przykłady.

Wyraźnie najtrudniejsze okazały się ćwiczenia dotyczące dodawania oraz odejmowania w poszerzonym zakresie liczbowym (zadania B6 i B7). Umiejętnością dodawania powyżej 10 wykazało się 44 badanych dzieci (62,9%). Jednakże 18 z nich (25,7%) w ogóle nie podjęło prób obliczenia wartości sumy w podanych przykładach. Jeszcze mniej badanych dzieci – 31 (44,3%) potrafi odejmować w zakresie powyżej 10. To zadanie zostało wykonane zdecydowanie na najniższym poziomie - 49,5 % maksymalnej punktacji. Dla bardzo wielu przedszkolaków (45,7%) odejmowanie liczb okazało się zbyt trudne. Dzieci podawały przypadkowe wyniki albo pomijały to zadanie. Najwięcej kłopotów doświadczyły sześciolateczki uzyskując za to ćwiczenie tylko 38,5% maksymalnej punktacji.

Dużo trudności sprawiły również badanym dzieciom tzw. ćwiczenia z luką przedstawione w zadaniu B5. Średnia liczba uzyskanych punktów wynosi 2,47 i stanowi 61,8% maksymalnej punktacji. Zaledwie 25 dzieci (35,7%) obliczyło poprawnie

²³ Średnia arytmetyczna obliczona wg wzoru
$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

wszystkie przykłady. Lepiej wykonane zostały ćwiczenia z dodawaniem, a najłatwiejszy był przykład z dopełnieniem do pełnej dziesiątki.

Tabela nr 7 Poziom kompetencji dzieci w zakresie wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych – przedszkole Montessori (zestawienie procentowe)

Poziom kompetencji	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej				staż pracy nauczyciela		kwalifikacje dodatkowe	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	1rok	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	tak	nie
bardzo wysoki	3,8	-	12,9	-	-	-	12,1	3,6	9,3	-	7,5	6,7
wysoki	46,2	66,7	64,5	75,0	100	12,5	57,5	71,4	64,8	37,5	52,5	66,7
Średni	23,1	22,2	6,5	-	-	12,5	9,1	21,4	9,3	31,3	17,5	10,0
niski	23,1	11,1	12,9	-	-	62,5	18,2	3,6	13,0	31,3	22,5	10,0
bardzo niski	3,8		3,2	25,0	-	12,5	3,0	-	3,7	-	-	6,7

Jak wynika z wyników przedstawionych w tabeli nr 7 badane dzieci kończące edukację przedszkolną w systemie Montessori prezentują zróżnicowany poziom w zakresie wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych. Jednakże w każdej grupie wiekowej dziewczynek i chłopców dominującym jest poziom wysoki.

Poziom bardzo wysoki osiągnęło natomiast niewiele badanych dzieci, a szczególnie zaskakującym jest fakt, że są to wyłącznie dzieci sześciolatnie (3,8% dziewczynek i 12,9% chłopców), które uczęszczały do przedszkola przez 3-4 lata. Dość niepokojący jest natomiast bardzo niski poziom analizowanej kompetencji dużej grupy siedmioletnich chłopców (25%), którzy przez 2-3 lata chodzili do przedszkola²⁴.

Analiza statystyczna wskazuje, że umiejętności wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania różnicuje wiek dzieci oraz czas trwania edukacji przedszkolnej²⁵. Są to zależności o umiarkowanej sile²⁶. Dzieci starsze, które przez 3-4 lata uczęszczały do przedszkola lepiej dodają i odejmują na konkretnych licząc na palcach lub innych zbiorach zastępczych oraz wykonują działania matematyczne w zapisie symbolicznym. Nie zdiagnozowano natomiast różnic między wynikami chłopców i dziewczynek²⁷.

Jak wynika z przeprowadzonych analiz umiejętności dzieci w zakresie dodawania

²⁴ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

²⁵ Wskaźniki istotności statystycznej wiek $p = 0,001$; czas trwania edukacji przedszkolnej $p = 0,008$

²⁶ Wskaźniki korelacji r Pearsona odpowiednio $r = 0,381$; $r = 0,399$

²⁷ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,134$

i odejmowania liczb różnicuje staż pracy nauczyciela²⁸. Jednakże jest to zależność przeciwnoproporcjonalna o słabej sile²⁹. Wraz z ze wzrostem stażu nauczyciela malały wyniki uzyskane przez dzieci w obszarze dodawania i odejmowania liczb. Wyższy poziom analizowanych umiejętności matematycznych prezentują dzieci z grup, z którymi pracują nauczyciele z najkrótszym stażem zawodowym (0-5 lat). Szczególnie dotyczyło to umiejętności powiększania i pomniejszania, czyli operacyjnego zastosowania dodawania i odejmowania liczb³⁰ oraz odejmowania liczb w zakresie powyżej dziesięciu³¹.

Natomiast kwalifikacje dodatkowe nauczyciela nie różnicują poziomu kompetencji matematycznych dzieci odnośnie wykonywania działań arytmetycznych³².

Grupa dzieci z przedszkoli tradycyjnych

W tabeli nr 8 przedstawiono wyniki z poszczególnych zadań uzyskane przez badaną grupę dzieci.

²⁸ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,016$

²⁹ Wskaźnik korelacji r Pearsona $-0,287$

³⁰ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,041$, wskaźnik korelacji r Pearsona $-0,234$

³¹ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,043$; wskaźnik korelacji r Pearsona $-0,243$

³² Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,583$

Tabela nr 8 Wyznaczanie wyniku dodawania i odejmowania przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych średnia liczba uzyskanych punktów/ poziom wykonania zadań - przedszkole tradycyjne

Nr zadania	Średnia liczba punktów/ poziom wykonania zadania ³³	dziewczynki		Chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej			staż pracy nauczyciela				kwalifikacje dodatkowe	
		6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	11-20	powyżej 20	tak	Nie
B1	4,31 pkt. 86,2% poziom wysoki	4,00 pkt. 80,0% poziom wysoki	4,78 pkt. 95,6% poziom wysoki	3,80 pkt. 76,0% poziom wysoki	4,75pkt. 95,0% poziom wysoki	3,40 pkt. 68,0% poziom średni	4,00 pkt. 80,0% poziom wysoki	4,76 pkt. 95,2% poziom wysoki	4,47 pkt. 89,4% poziom wysoki	3,62 pkt. 72,4% poziom średni	4,80 pkt. 96,0% poziom wysoki	3,88 pkt. 77,2% poziom średni	4,00 pkt. 80,0% poziom wysoki	4,36 pkt. 87,2% poziom wysoki
B2	5,35 pkt. 89,2% poziom wysoki	5,67 pkt. 94,6% poziom wysoki	5,64 pkt. 94,0% poziom wysoki	5,13 pkt. 85,5% poziom wysoki	5,47pkt. 91,2% poziom wysoki	4,30 pkt. 71,7% poziom średni	5,31 pkt. 88,5% poziom wysoki	5,54 pkt. 92,3% poziom wysoki	5,71 pkt. 95,2% poziom wysoki	5,08 pkt. 84,7% poziom wysoki	4,83 pkt. 80,5% poziom wysoki	5,25 pkt. 87,5% poziom wysoki	6,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	5,25 pkt. 87,5% poziom wysoki
B3	3,00 pkt. 75,0% poziom	2,56 pkt. 64,0% poziom	3,22 pkt. 85,0% poziom	2,73 pkt. 68,3% poziom	3,66 pkt. 91,5% Poziom	2,90 pkt. 72,5% poziom	2,78 pkt. 69,5% poziom	3,24 pkt. 81,0% poziom	3,09 pkt. 77,3% poziom	2,69 pkt. 67,3% poziom	3,3pkt. 82,5% poziom	2,62 pkt. 65,5% poziom	3,11 pkt. 77,8% poziom	2,99 pkt. 74,8% poziom

³³ Poziom wykonania zadania określono wg skali

100%	POZIOM BARDZO WYSOKI
99 – 75%	POZIOM WYSOKI
74 – 50%	POZIOM ŚREDNI
49 – 25%	POZIOM NISKI
24 - 0%	POZIOM BARDZO NISKI

	wysoki	średni	wysoki	średni	Wysoki	średni	średni	wysoki	wysoki	średni	wysoki	średni	wysoki	średni
B4	2,74 pkt. 68,5% poziom średni	2,19 pkt. 54,8% poziom średni	2,72 pkt. 68,0% poziom średni	2,73 pkt. 68,3% poziom średni	3,58 pkt. 89,5% poziom wysoki	3,00 pkt. 75,5% poziom wysoki	2,53 pkt. 63,3% poziom średni	2,91 pkt. 72,8% poziom średni	2,53 pkt. 63,3% poziom średni	2,62 pkt. 65,5% poziom średni	3,27 pkt. 81,8% poziom wysoki	2,88 pkt. 72,0% poziom średni	2,44 pkt. 61,0% poziom średni	2,79 pkt. 69,8% poziom średni
B5	2,57 pkt. 64,3% poziom średni	2,25 pkt. 56,3% poziom średni	2,39 pkt. 59,8% poziom średni	2,60 pkt. 65,0% poziom średni	3,45 pkt. 86,25% poziom wysoki	2,60 pkt. 65,0% poziom średni	2,31 pkt. 57,8% poziom średni	2,82 pkt. 70,5% poziom średni	2,50 pkt. 62,5% poziom średni	2,31 pkt. 57,8% poziom średni	2,67 pkt. 66,75% poziom średni	3,13 pkt. 78,3% poziom średni	2,22 pkt. 55,5% poziom średni	2,62 pkt. 65,5% poziom średni
B6	1,44 pkt. 72,0% poziom średni	1,31 pkt. 65,5% poziom średni	1,50 pkt. 75,0% poziom wysoki	1,33 pkt. 66,5% poziom średni	1,77 pkt. 88,5% poziom wysoki	1,00 pkt. 50,0% poziom średni	1,31 pkt. 65,5% poziom średni	1,64 pkt. 82,0% poziom wysoki	1,29 pkt. 64,5% poziom średni	1,38 pkt. 69,0% poziom wysoki	1,67 pkt. 83,5% poziom wysoki	1,75 pkt. 87,5% poziom wysoki	1,11 pkt. 55,5% poziom średni	1,49 pkt. 74,5% poziom wysoki
B7	1,01 pkt. 50,5 % poziom średni	0,69 pkt. 34,5 % poziom niski	0,89 pkt. 44,5 % poziom niski	0,80 pkt. 40,0 % poziom niski	1,75 pkt. 87,5 % poziom wysoki	1,20 pkt. 60,0 % poziom średni	0,84 pkt. 42,0 % poziom niski	1,15 pkt. 57,5 % poziom średni	0,82 pkt. 41,0 % poziom niski	0,69% 34,5 % poziom niski	1,60 pkt. 80,0 % poziom wysoki	1,25 pkt. 62,5 % poziom średni	0,67 pkt. 33,5 % poziom niski	1,07 pkt. 53,5 % poziom średni

Badana grupa dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym uzyskała średnią liczbę punktów 20,47³⁴, czyli 75,8% maksymalnej punktacji, co świadczy o wysokim poziomie opanowania kompetencji w zakresie wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania liczb przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych. Nieco wyższą średnią liczbę punktów zdobyli chłopcy – 20,8 punktów. Średnia liczba punktów uzyskana przez dziewczynki wynosi 20,0 punktów.

Najmniej trudności sprawiły dzieciom ćwiczenia z odejmowaniem liczb na konkretach: obliczanie tylko różnicy liczb, przeliczanie odjemnika i wraz z obliczeniem różnicy oraz ustalanie odjemnika przy podanej odjemnej i różnicy (zadanie B2). Uzyskana średnia liczba punktów – 5,35 stanowi 89,1% maksymalnej punktacji i wskazuje na wysoki poziom opanowania umiejętności odejmowania liczb w oparciu o konkrety. 51 badanych dzieci (72,9%) prawidłowo wykonało wszystkie ćwiczenia z odejmowaniem liczb na konkretach uzyskując maksymalne 6 punktów. Większość dzieci (87,1%) poradziła sobie z obliczeniem różnicy oraz z przeliczeniem skreślonego odjemnika i ustaleniem wyniku. Stosunkowo więcej problemów sprawiło dzieciom wyznaczenie wartości odjemnika przy podanej odjemnej i różnicy, czyli tzw. zadanie z luką, ale i tak uzyskano 80,0% prawidłowych odpowiedzi.

Wyraźnie najtrudniejsze okazało się ćwiczenie dotyczące odejmowania w poszerzonym zakresie liczbowym (zadanie B7). Tylko 33 badanych dzieci (47,1%) potrafi odejmować w zakresie powyżej 10. Natomiast dla bardzo wielu przedszkolaków (45,7%) to zadanie okazało się zbyt trudne. Dzieci podawały przypadkowe wyniki albo pomijały je postrzegając jako zbyt trudne. Takie zachowania występowało głównie w grupie sześciolatków. Jednocześnie należy zauważyć, że siedmioletni chłopcy wykonali to zadanie na wysokim poziomie uzyskując 87,5% maksymalnej liczby punktów.

Dużo trudności sprawiły również badanym dzieciom obliczenia z tzw. luką przedstawione w piątym ćwiczeniu (B5). Średnia liczba uzyskanych punktów wynosi 2,57 i stanowi 64,3% maksymalnej punktacji. Zaledwie 28 dzieci (40,0%) obliczyło poprawnie wszystkie przykłady. Nieco wyższe wyniki uzyskali chłopcy – średnia liczba punktów - 2,8 (w grupie dziewczynek średnia wyniosła 2,3). Zdecydowanie lepiej wykonane zostały ćwiczenia z dodawaniem; najłatwiejszy był przykład z dopełnieniem do pełnej dziesiątki.

³⁴ Średnia arytmetyczna obliczona wg wzoru
$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Tabela nr 9 Poziom kompetencji dzieci w zakresie wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych – przedszkole tradycyjne (zestawienie procentowe)

Poziom kompetencji	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej			staż pracy nauczyciela				kwalifikacje dodatkowe	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	11-20	powyżej 20	Tak	nie
bardzo wysoki	-	11,1	-	28,6	-	3,1	21,2	5,9	15,4	13,3	25,0	11,1	11,5
wysoki	6,3	55,6	40,0	47,6	60,0	50,0	48,5	52,9	30,8	66,7	37,5	44,4	50,8
średni	50,0	27,8	60,0	14,3	20,0	37,5	24,2	32,4	38,5	20,0	25,0	33,3	29,5
niski	37,5	5,6	-	4,8	20,0	3,1	6,1	8,8	-	-	12,5	11,1	4,9
bardzo niski	6,3	-	-	4,8	-	6,3	-	-	15,4	-	-	-	3,3

Jak wynika z tabeli nr 9 badane dzieci kończące edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym prezentują zróżnicowany poziom umiejętności matematycznych w zakresie wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych.

Poziom bardzo wysoki osiągnęły dzieci najstarsze - siedmioletnie dziewczynki i chłopcy, z którymi najczęściej pracowali nauczyciele z długim stażem pracy - powyżej 20 lat. Natomiast najsłabiej działania matematyczne wykonały sześciolatnie dziewczynki – 37,5% na poziomie niskimi i 6,3% na poziomie bardzo niskim.

Wymagającym interwencji jest fakt, że poziom bardzo niski osiągnęło 4,8% chłopców siedmioletnich. Negatywnie należy również ocenić sytuację, w której bardzo niski poziom opanowania analizowanej kompetencji prezentują dzieci chodzące przez trzy lata do przedszkola.

Analiza statystyczna wskazuje, że umiejętności wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania przy pomocy liczenia na palcach lub innych zbiorach zastępczych różnicuje czas trwania edukacji przedszkolnej³⁵. Siła tego związku jest słaba³⁶. Na niskim poziomie głównie są kompetencje dzieci, które tylko dwa lata uczęszczały do przedszkola (20% badanych). Dla porównania w grupie dzieci chodzących do przedszkola cztery lata odsetek ten wynosi tylko 6,1%. Czas trwania edukacji przedszkolnej najwyraźniej zróżnicował takie

³⁵ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,030$

³⁶ Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,259

umiejętności szczegółowe jak dodawanie liczb na konkretach³⁷ oraz dodawanie liczb powyżej dziesięciu³⁸. Są to zależności dodatnie i umiarkowane³⁹.

Czynnikiem różnicującym omawianą kategorię umiejętności matematycznych jest również wiek dzieci⁴⁰. Jest to zależność proporcjonalna o umiarkowanej sile⁴¹. Dzieci starsze - siedmioletnie przede wszystkim lepiej dodają na konkretach.

Na podstawie przeprowadzonej analizy statystycznej nie stwierdzono natomiast różnicowania poziomu analizowanej kompetencji matematycznej przez staż pracy nauczyciela oraz posiadane przez niego kwalifikacje dodatkowe⁴².

Podsumowanie i dyskusja

Z przeprowadzonych badań wynika, że w zakresie umiejętności wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania przy pomocy liczenia na palcach lub innych zbiorach zastępczych nieco wyższe wyniki uzyskały dzieci z przedszkoli tradycyjnych (średnia liczba uzyskanych punktów 20,47, czyli 75,8% maksymalnej punktacji) niż z przedszkoli Montessori (średnia liczba uzyskanych punktów 19,61, czyli 72,6% maksymalnej punktacji). W obu badanych grupach najwyższy uzyskany wynik wynosi 27 punktów (placówki Montessori częstość – 7,1%; placówki tradycyjne częstość – 11,4%). W przedszkolach Montessori najniższy rezultat to 1 punkt (częstość 1,4%), a w przedszkolach tradycyjnych – 5 punktów (częstość – 2,9%)⁴³.

Największa różnica w poziomie umiejętności dotyczy odejmowania na podanych konkretach. W przedszkolach tradycyjnych 72,9% badanych wykonało to zadanie bezbłędnie, a w grupie dzieci montessoriańskich tylko 57,1%. Ponadto pierwsza grupa dzieci lepiej dodaje na narysowanych konkretach (68,6% prawidłowych odpowiedzi). Natomiast w przedszkolach Montessori lepsze wyniki otrzymano w zadaniach dotyczących wykonywania działań w zapisie symbolicznym (55,7% poprawnych odpowiedzi), co świadczy o wzrastającej umiejętności liczenia z wykorzystaniem palców lub w pamięci,

³⁷ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,001$

³⁸ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,036$

³⁹ Wskaźniki korelacji r Pearsona odpowiednio 0,324 i 0,344

⁴⁰ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,009$

⁴¹ Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,455

⁴² Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,461$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,563$

⁴³ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

czyli w oderwaniu od materiałów rozwojowych oraz o umiejętności stosowania formuł arytmetycznych dodawania i odejmowania.

Uzyskane wyniki (średnia liczba punktów 20,04, czyli 74,2% maksymalnej punktacji) pozwalają wnioskować o średnim poziomie opanowania przez dzieci kończące edukację przedszkolną umiejętności wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych.

63% badanych dzieci uzyskało co najmniej 20 punktów, które stanowiły 75% punktów możliwych i zgodnie z przyjętą skalą oznaczało wysoki poziom opanowania kompetencji. 13 badanych przedszkolaków (9,3%) bezbłędnie wykonało wszystkie ćwiczenia, prezentując bardzo wysoki poziom analizowanej kompetencji matematycznej⁴⁴.

Podobne wyniki uzyskała w swych badaniach U. Oszwa (2006), J. Kłysewicz (2008), K. Szewczuk (2014) oraz E. Gruszczyk-Kolczyńska (2009b), która stwierdza, że „w grupie siedmiolatków tylko około 53% dzieci potrafi dodawać i odejmować w pamięci w zakresie 10, pomagając sobie liczeniem na palcach. Pozostałe dzieci wyznaczają wynik dodawania i odejmowania w sytuacji, gdy mogą policzyć obiekty, które były dodawane lub odejmowane, tylko nieliczne próbują liczyć na palcach” (Gruszczyk-Kolczyńska, 2009b s.145). J. Filip i T. Rams wyjaśniają, że „trzeba bowiem wielu doświadczeń, aby dziecko potrafiło oderwać sens dodawania i odejmowania od konkretnej sytuacji i ustalić wynik na poziomie symbolicznym. Nim tak się stanie, dziecko przechodzi zwykle przez okres liczenia na palcach - okres symulowania dodawania i odejmowania różnych przedmiotów na zbiorze zastępczym” (Filip i Rams, 2000, s.113).

Liczenie na palcach jest dużym osiągnięciem w rozwoju umysłowym dziecka, świadczącym o przejściu z poziomu konkretnego do umownego. Dziecko musi zrozumieć, że różne przedmioty można zastępować palcami na zasadzie: jeden palec - jeden przedmiot.

Jednakże przeprowadzone badania wskazują, że dość często dzieci próbują ukrywać fakt korzystania przy obliczeniach z pomocy palców chowając je pod stolikiem. Można zatem sądzić, że nauczyciele na to im nie pozwalają. Na ten problem zwraca uwagę również E. Gruszczyk-Kolczyńska twierdząc, że wielu rodziców, a także nauczycieli nie tylko nie zachęca dzieci, ale wręcz zabrania im liczenia na palcach, chcąc w ten sposób wymusić szybsze przejście na poziom liczenia pamięciowego. Autorka dowodzi, że „na to, aby przejść z poziomu rachowania konkretnych obiektów, przez rachowanie na zbiorach

⁴⁴Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

zastępczych, na poziom rachowania w pamięci dzieci potrzebują około 2 lat intensywnych ćwiczeń. Ponadto - im wcześniej i sprawniej dziecko zacznie posługiwać się zbiorami zastępczymi, tym szybciej będzie ustalać wynik dodawania i odejmowania w pamięci” (Gruszczyk-Kolczyńska, 2009b, s. 145, także Filip i Rams, 2000). Również Z. Semadeni stanowczo stwierdza, że zakazywanie dzieciom rachowania na palcach jest działaniem szkodliwym, „bowiem uniemożliwia wolniej rozwijającemu się dziecku samodzielne zdobywanie wiedzy”. Autor jednocześnie wyjaśnia, iż „nie ma zagrożenia, że dziecko się uzależni. Rachowanie na palcach jest zbyt pracochłonne, dziecko nie będzie tak liczyło, gdy zna wynik i jest go pewne; czyni to tak długo, jak długo to jest mu potrzebne (Semadeni, Gruszczyk-Kolczyńska, Treliński, Bugajska-Jaszczot i Czajkowska, 2015, s.65).

Dość często zdiagnozowano brak rozróżniania dodawania i odejmowania w zapisie symbolicznym. Niezależnie od wskazanego działania dzieci dodawały liczby, gdyż jest to operacja łatwiejsza. Podobne wnioski z badań formułuje również U. Oszwa (2006), pisząc, że „słabo wypadło też rozpoznawanie znaków arytmetycznych, które są intensywnie używane - w klasie pierwszej nauczania zintegrowanego, a ich znajomość pozwala bardziej płynnie wejść w świat operowania liczbami oderwanymi od kontekstu sytuacyjnego” (Oszwa, 2006, s.30). Jednakże, jak zauważa D. Waloszek (1993) budzi się wątpliwość, czy dzieciom przedszkolnym niezbędna jest znajomość znaków działań arytmetycznych. Autorka wyjaśnia bowiem, że „zbyt szybka „symbolizacja” treści działania przy ciągłym zdeterminowaniu myślenia przez operacje konkretne nie przyspiesza rozwoju umiejętności rozwiązywania zadań, powoduje powstawanie trudności” (Waloszek, 1993, s.120). Uwzględnienie takich zadań w przeprowadzonych podczas badań teście dla dzieci miało pozwolić na wyselekcjonowanie dzieci z uzdolnieniami matematycznymi.

Należy pamiętać, że wykonywanie działań arytmetycznych na liczbach jest dla dzieci przedszkolnych umiejętnością, którą dopiero nabywają, a ich właściwe doskonalenie nastąpi w klasie pierwszej szkoły podstawowej. Dlatego K. Szewczuk zaleca, aby przedszkolaki ćwiczyły umiejętność liczenia „przy każdej nadarzającej się okazji nie tylko w przedszkolu, ale również w domu wspólnie z rodzicami. Im więcej ćwiczeń w tym zakresie dziecko odbędzie, tym bogatsze będą jego doświadczenia i szybkiej osiągnie biegłość w prawidłowym liczeniu i wyznaczaniu wyników dodawania i odejmowania, a ta sprawność jest potrzebna i wymagana w klasie pierwszej” (Szewczuk, 2013, s.44).

3. Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów oraz posługiwania się liczebnikami porządkowymi.

Badaną kompetencję matematyczną tworzą dwa elementy składowe: umiejętność ustalania równoliczności zbiorów oraz umiejętność posługiwania się liczebnikami porządkowymi.

Do zbadania poziomu sprawności dzieci w zakresie ustalania równoliczności opracowano trzy zadania.

W pierwszym należało połączyć zbiory równoliczne niezależnie od kształtu i jakości tworzących je elementów. Zadanie drugie polegało na ustaleniu równoliczności i nierównoliczności dwóch zbiorów za pomocą określeń „więcej”, „mniej”, „tyle samo”. Trzecie ćwiczenie dotyczyło utworzenia zbioru równolicznego z podanym.

W celu zbadania poziomu drugiej składowej analizowanej kompetencji, czyli umiejętności posługiwania się liczebnikami porządkowymi przygotowano cztery zadania. Pierwsze ćwiczenie dotyczyło pasywnego rozumienia liczebników porządkowych. Dziecko kolorowało wskazany kolejny z rzędu element: trzecie jabłko, szósty kwiatek i ósmy listek. W zadaniu drugim zastosowano polecenie wiązane – należało właściwym kolorem zaznaczać kolejne koraliki w łańcuchu. Następne zadanie dotyczyło rozumienia pojęć „pierwszy”, i „ostatni” element w szeregu. Natomiast w ostatnim zadaniu sprawdzono umiejętność aktywnego posługiwania się liczebnikami porządkowymi – dziecko odpowiadało na pytanie „Który z kolei jest wskazany element?”⁴⁵.

⁴⁵ Przyjęto następującą punktację zadań:

Zadanie 1 - 3 punkty

Zadanie 2 – 3 punkty

Zadanie 3 – 1 punkt

Zadanie 4 – 3 punkty

Zadanie 5 – 7 punktów

Zadanie 6 – 4 punkty (2 +2)

Zadanie 7 – 2 punkty

Grupa dzieci z przedszkoli Montessori

W tabeli nr 10 przedstawiono wyniki z poszczególnych zadań uzyskane przez badaną grupę dzieci.

Poziom analizowanej kompetencji określano według skali:

100%	POZIOM BARDZO WYSOKI
99 – 75%	POZIOM WYSOKI
74 – 50%	POZIOM ŚREDNI
49 – 25%	POZIOM NISKI
24 - 0%	POZIOM BARDZO NISKI

Tabela nr 10 Ustalanie równoliczności dwóch zbiorów oraz posługiwanie się liczebnikami porządkowymi -średnia liczba uzyskanych punktów/ poziom wykonania zadań - przedszkole Montessori

Nr zadania	Średnia liczba punktów/ poziom wykonania zadania ⁴⁶	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej				staż pracy nauczyciela		kwalifikacje dodatkowe nauczyciela	
		6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	1 rok	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	tak	nie
C1	2,77pkt. 92,3% poziom wysoki	2,73pkt. 91,0% poziom wysoki	2,67pkt. 89,0% poziom wysoki	2,81pkt. 93,7% poziom wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,75 pkt. 91,7% poziom wysoki	2,79 pkt. 93,0% poziom wysoki	2,75 pkt. 91,7% poziom wysoki	2,83 pkt. 94,3% poziom wysoki	2,56 pkt. 85,3% poziom wysoki	2,75 pkt. 91,7% poziom wysoki	2,80 pkt. 93,3% poziom wysoki
C2	2,84 pkt. 94,6% poziom wysoki	2,88 pkt. 96,0% poziom wysoki	2,67 pkt. 89,0% poziom wysoki	2,87 pkt. 95,7% poziom wysoki	2,75 pkt. 91,7% poziom wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,88 pkt. 96,0% poziom wysoki	2,85 pkt. 95,0% poziom wysoki	2,82 pkt. 94,0% poziom wysoki	2,85 pkt. 95,0% poziom wysoki	2,81 pkt. 93,7% poziom wysoki	2,85 pkt. 95,0% poziom wysoki	2,83 pkt. 94,3% poziom wysoki

⁴⁶ Poziom wykonania zadania określono wg skali

100% POZIOM BARDZO WYSOKI

99 – 75% POZIOM WYSOKI

74 – 50% POZIOM ŚREDNI

49 – 25% POZIOM NISKI

24 - 0% POZIOM BARDZO NISKI

C3	0,94pkt. 94,0% poziom wysoki	0,96 pkt. 96,0% poziom wysoki	0,89 pkt. 89,0% poziom wysoki	0,94pkt. 94,0% poziom wysoki	1,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	1,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	1,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	0,94 pkt. 94,0% poziom wysoki	0,93 pkt. 93,0% poziom bardzo wysoki	0,94 pkt. 94,0% poziom wysoki	0,94 pkt. 94,0% poziom wysoki	0,93 pkt. 93,0% poziom wysoki	0,97 pkt. 97,0% poziom wysoki
C4	2,82pkt. 94,0% poziom wysoki	2,96 pkt. 98,7% poziom wysoki	2,56 pkt. 85,3% poziom wysoki	2,81 pkt. 93,7% poziom wysoki	2,75 pkt. 91,7% poziom wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,75 pkt. 91,7% poziom wysoki	2,88 pkt. 96,0% poziom wysoki	2,79 pkt. 93,0% poziom wysoki	2,80 pkt. 93,3% poziom wysoki	2, 94 pkt. 98,0% poziom wysoki	2,78 pkt. 92,7% poziom wysoki	2, 90 pkt. 96,7% poziom wysoki
C5	6,12 pkt. 87,4% poziom wysoki	6,08 pkt. 86,8% poziom wysoki	4,78 pkt. 68,3% poziom średni	6,48 pkt. 92,6% poziom wysoki	6,75 pkt. 96,4% poziom wysoki	7,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	6,00 pkt. 85,7% poziom średni	6,15 pkt. 87,9% poziom wysoki	6,11 pkt. 87,3% poziom wysoki	6,02 pkt. 86,0% poziom wysoki	6,50 pkt. 92,9% poziom wysoki	6,13 pkt. 87,6% poziom wysoki	6,13 pkt. 87,6% poziom wysoki
C6	3,27 pkt. 81,8% poziom wysoki	3,27 pkt. 81,8% poziom wysoki	2,89 pkt. 72,3% poziom średni	3,39 pkt. 84,8% poziom wysoki	3,25 pkt. 81,3% poziom wysoki	3,00 pkt. 75,0% poziom wysoki	3,38 pkt. 84,5% poziom średni	3,33 pkt. 84,8% poziom wysoki	3,18 pkt. 79,5% poziom wysoki	3,30 pkt. 82,5% poziom wysoki	3,19 pkt. 79,8% poziom wysoki	3,20 pkt. 80,0% poziom wysoki	3,37 pkt. 84,3% poziom wysoki
C7	1,41 pkt. 70,5% poziom średni	1,27 pkt. 63,5% poziom średni	1,56 pkt. 78,0% poziom wysoki	1,48 pkt. 74,0% poziom średni	1,50 pkt. 75,0% poziom wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	1,13 pkt. 56,5% poziom średni	1,48 pkt. 74,0% poziom średni	1,39 pkt. 69,5% poziom średni	1,39 pkt. 69,5% poziom średni	1,50 pkt. 75,0% poziom wysoki	1,38 pkt. 69,0% poziom średni	1,47 pkt. 73,5% poziom średni

Badana grupa dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori uzyskała średnią liczbę punktów 20,17⁴⁷, czyli 87,7% maksymalnej punktacji, co świadczy o wysokim poziomie opanowania kompetencji w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów oraz posługiwania się liczebnikami porządkowymi. Lepiej zadania wykonali chłopcy uzyskując średnią liczbę punktów 20,9; (w grupie dziewczynek średnia wyniosła 19,5).

Z danych przedstawionych w tabeli nr 10 wynika, że dla badanej grupy dzieci przedszkolnej łatwiejsze okazały się zadania dotyczące równoliczności zbiorów. Wszystkie zaproponowane ćwiczenia zostały wykonane na wysokim poziomie. Zdecydowanie najmniej trudności sprawiło przedszkolakom ustalenie, w których zbiorze jest więcej, mniej czy tyle samo elementów (zadanie C2) oraz utworzenie zbiorów równolicznych (zadanie C3). W obu tych zadaniach uzyskano 94,0% maksymalnej punktacji, co świadczy o wysokim poziomie ich wykonania. Podczas porównywania liczebności zbiorów nie zdiagnozowano istotnego wpływu liczby czy jakości porównywanych elementów na poprawność wykonania zadania. Ponadto badania wykazały, że dzieci na porównywalnym poziomie posługują się określeniami „mniej” i „więcej” oraz „tyle samo” (ten ostatni termin często określają jako „remis”). Zaledwie czworo z badanych dzieci (5,7%) nie potrafiło utworzyć zbiorów równolicznych. Zdiagnozowano różne sposoby tworzenia zbiorów np. oparte na odwzorowywaniu – rysowanie kółek pod chmurkami.

Nieco więcej trudności doświadczyły badane dzieci podczas rozwiązywania zadań dotyczących liczebników porządkowych. Przedstawione wyniki wskazują, że dzieci potrafią wskazać lub zaznaczyć nazwany element, czyli rozumieją pasywnie liczebniki porządkowe (wysoki poziom wykonania zadań C4, C5 i C6). Natomiast aktywne posługiwanie się liczebnikami porządkowymi okazało się zdecydowanie trudniejsze dla badanych przedszkolaków. Dzieci popełniały błędy przy określaniu, który z kolei jest w szeregu wskazany trójkątów. Przeprowadzone badania wskazują, że na poziom wykonania ćwiczenia miało wpływ miejsce wskazanego elementu w ciągu. Dzieci częściej (75,7%) prawidłowo nazywały trzeci element, rzadziej – siódmy (65,7%).

Najwyższy poziom analizowanych umiejętności prezentują siedmioletni chłopcy, którzy w dwóch zadaniach zdobyli maksymalną liczbę punktów.

⁴⁷ Średnia arytmetyczna obliczona wg wzoru:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Wśród dziewczynek zaskakujące są niższe wyniki uzyskane przez siedmiolatki. Te niekorzystne różnice dotyczą szczególnie drugiego elementu składowego analizowanej kompetencji, czyli umiejętności posługiwania się liczebnikami porządkowymi. Sześcioletnie dziewczynki dużo lepiej od swoich starszych koleżanek poradziły sobie z wieloetapową instrukcją i prawidłowo zamalowały kolejno wskazywane koraliki. Z przeprowadzonych badań wynika, że najtrudniejsze było zaznaczenie dziewiątego elementu – 52 poprawnych odpowiedzi (74,3%). Można to tłumaczyć błędnym przeliczeniem kolejnych elementów w ciągu. Z tych samych przyczyn najmniej pomyłek dotyczyło zamalowania trzeciego (65 poprawnych odpowiedzi – 92,9%) i drugiego koralika (64 poprawne odpowiedzi - 91,4%). Ponadto 7-letnie dziewczynki słabiej od młodszych koleżanek poradziły sobie z zadaniem C6. Nie stwierdzono istotnych różnic między poziomem posługiwania się pojęciami „pierwszy” i „ostatni”. Natomiast decydujące znaczenie miało rozmieszczenie elementów w jednym lub dwóch rzędach. Badane dziewczynki w swoich wskazaniach pomijały drugi rząd elementów i niepoprawnie zaznaczały ostatni element.

Tabela nr 11 Poziom kompetencji zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów oraz posługiwania się liczebnikami porządkowymi – przedszkole Montessori (zestawienie procentowe)

Poziom kompetencji	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej				staż pracy nauczyciela		kwalifikacje dodatkowe	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	1 rok	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	tak	nie
bardzo wysoki	3,8	11,1	19,4	25,0	-	-	15,2	14,3	13,0	12,5	12,5	13,3
wysoki	88,5	66,7	74,2	75,0	100	87,5	78,8	75,0	77,7	81,2	77,5	80,0
średni	7,7	11,1	6,5	-	-	12,5	6,1	7,1	7,4	6,3	7,5	6,7
niski	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
bardzo niski	-	11,1	-	-	-	-	-	3,6	1,9	-	2,5	-

Jak wynika z tabeli nr 11 większość badanych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori prezentuje wysoki poziom umiejętności matematycznych w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów oraz posługiwania się liczebnikami porządkowymi.

Bardzo wysoki poziom analizowanej kompetencji osiągnęły głównie dzieci siedmioletnie: 11,1% dziewczynek i 25,0% chłopców. Są to wyłącznie dzieci z dłuższym okresem edukacji przedszkolnej (3 i 4 lata). Niepokojącym natomiast jest bardzo niski

poziom siedmioletnich dziewczynek, które uczęszczały do przedszkola 4 lata (3,6% badanych).

Wyższymi umiejętnościami niezależnie od wieku wykazali się chłopcy. Wśród siedmiolatków odnotowano tylko poziom wysoki i bardzo wysoki, a na poziomie średnim jest zaledwie 6,5% badanych młodszych chłopców - sześciolatków.

W oparciu o wyliczony wskaźnik istotności statystycznej stwierdzono, że wiek i płeć dzieci nie są czynnikami różnicującymi poziom kompetencji matematycznych w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów oraz posługiwania się liczebnikami porządkowymi⁴⁸. Jednakże analizując kompetencje szczegółowe stwierdzono, że poziom wykonania zadania wieloetapowego polegającego na kolorowaniu kolejno wskazanych koralików różnicowała płeć badanych dzieci⁴⁹. Siła tego związku jest umiarkowana⁵⁰. Dziewczynki wykazały się dłuższą koncentracją uwagi na zadaniu, były spokojniejsze i bardziej wytrwałe w działaniu. Chłopcom podczas wykonywania ćwiczenia towarzyszył pośpiech, niecierpliwość i niekiedy znużenie, co obniżyło poziom wykonania zadania.

Istotnie związany z poziomem analizowanej kompetencji matematycznej był czas trwania edukacji przedszkolnej⁵¹. Jest zależność o słabej sile.⁵² Stopień bardzo wysoki osiągnęły wyłącznie dzieci dłużej chodzące do przedszkola (3-4 lata).

Analiza statystyczna nie wskazuje na różnicowanie poziomu omawianych kompetencji dzieci kończących edukację przedszkolną przez staż pracy nauczyciela oraz posiadane przez niego kwalifikacje dodatkowe⁵³.

Grupa dzieci z przedszkoli tradycyjnych

W tabeli nr 12 przedstawiono wyniki z poszczególnych zadań uzyskane przez badaną grupę dzieci.

⁴⁸ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; płeć dziecka $p = 0,11$, wiek dziecka $p = 0,75$

⁴⁹ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,029$

⁵⁰ Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,346

⁵¹ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,007$

⁵² Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,038

⁵³ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,900$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,705$

Tabela nr 12 Ustalanie równoliczności dwóch zbiorów oraz posługiwanie się liczebnikami porządkowymi -średnia liczba uzyskanych punktów/ poziom wykonania zadań - przedszkole tradycyjne

Nr zadania	Średnia liczba punktów/ poziom wykonania zadania ⁵⁴	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej			staż pracy nauczyciela				kwalifikacje dodatkowe	
		6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	11-20	powyżej 20	tak	nie
C1	2,88 pkt. 96,0% poziom wysoki	2,88 pkt. 96,0% poziom wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,60 pkt. 86, 7% poziom wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,60 pkt. 86,7% poziom wysoki	2,81 pkt. 93,7% poziom wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,88 pkt. 96,0% poziom wysoki	2,69 pkt. 89,7% poziom wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,87 pkt. 95,7% poziom wysoki
C2	2,87 pkt. 95,7% poziom wysoki	2,81 pkt. 93,7% poziom wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,85 pkt. 95,0% poziom wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,81 pkt. 93,7% poziom wysoki	2,91 pkt. 97,0% poziom wysoki	2,94 pkt. 98,0% poziom wysoki	2,54 pkt. 84,7% poziom wysoki	2,93 pkt. 97,7% poziom wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,89 pkt. 96,3% poziom wysoki	2,87 pkt. 95,7% poziom wysoki
C3	0,92pkt. 92,0% poziom	0,94pkt. 94,0% poziom	0,97pkt. 97,0% poziom	0,88pkt. 88,0% poziom	0,95pkt. 95,0% poziom	1,00 pkt. 100% poziom	0,91 pkt. 91,0% poziom	0,92 pkt. 92,0% poziom	0,88 pkt. 88,0% poziom	0,96 pkt. 96,0% poziom	1,00 pkt. 100% poziom	0,88 pkt. 88,0% poziom	0,78 pkt. 78,0% poziom	1,00 pkt. 100% poziom

⁵⁴ Poziom wykonania zadania określono wg skali

100%	POZIOM BARDZO WYSOKI
99 – 75%	POZIOM WYSOKI
74 – 50%	POZIOM ŚREDNI
49 – 25%	POZIOM NISKI
24 - 0%	POZIOM BARDZO NISKI

	wysoki	wysoki	wysoki	wysoki	wysoki	bardzo wysoki	wysoki	wysoki	wysoki	wysoki	bardzo wysoki	wysoki	wysoki	bardzo wysoki
C4	2,80 pkt. 93,3% poziom wysoki	2,81 pkt. 93,7% poziom wysoki	2,78 pkt. 92,7% poziom wysoki	2,93 pkt. 97,7% poziom wysoki	2,38 pkt. 79,3% poziom wysoki	2,20 pkt. 73,3% poziom średni	2,91 pkt. 97,0% poziom wysoki	2,79 pkt. 93,0% poziom wysoki	3,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,69 pkt. 89,7% poziom wysoki	2,87 pkt. 95,7% poziom wysoki	2,50 pkt. 83,3% poziom wysoki	2,56 pkt. 85,37% poziom wysoki	2,84 pkt. 94,7% poziom wysoki
C5	5,95 pkt. 85,0% poziom wysoki	5,53 pkt. 79,0% poziom wysoki	6,06 pkt. 86,6% poziom wysoki	5,93 pkt. 84,7% poziom wysoki	6,25 pkt. 89,3% poziom wysoki	5,40 pkt. 77,1% poziom wysoki	5,71 pkt. 81,6% poziom wysoki	6,45 pkt. 92,1% poziom wysoki	6,30 pkt. 90,0% poziom wysoki	6,00 pkt. 85,7% poziom wysoki	6,13 pkt. 87,6% poziom wysoki	4,88 pkt. 69,7% poziom średni	4,44 pkt. 63,4% poziom średni	6,28 pkt. 89,7% poziom wysoki
C6	3,57 pkt. 89,3% poziom wysoki	3,56 pkt. 89,0% poziom wysoki	3,67 pkt. 91,8% poziom wysoki	3,60 pkt. 90,0% poziom wysoki	3,72 pkt. 93,0% poziom wysoki	3,20 pkt. 80,0% poziom wysoki	3,56 pkt. 89,0% poziom wysoki	3,64 pkt. 91,0% poziom wysoki	3,53 pkt. 88,3% poziom wysoki	3,62 pkt. 90,5% poziom wysoki	3,53 pkt. 88,3% poziom wysoki	3,75 pkt. 93,8% poziom wysoki	3,67 pkt. 91,8% poziom wysoki	3,56 pkt. 89,0% poziom wysoki
C7	1,51 pkt. 75,5% poziom wysoki	1,13 pkt. 56,5% poziom średni	1,83 pkt. 91,5% poziom wysoki	1,47 pkt. 73,5% poziom średni	1,78 pkt. 89,0% poziom wysoki	1,40 pkt. 70,0% poziom średni	1,34 pkt. 67,2% poziom średni	1,70 pkt. 85,0% poziom wysoki	1,44 pkt. 72,0% poziom średni	1,31 pkt. 65,5% poziom średni	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	1,25 pkt. 62,5% poziom średni	1,22 pkt. 61,1% poziom średni	1,56 pkt. 78,0% poziom wysoki

Badana grupa dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym uzyskała średnią liczbę punktów 20,93⁵⁵, czyli 91,0% maksymalnej punktacji, co świadczy o wysokim poziomie opanowania kompetencji w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów oraz posługiwania się liczebnikami porządkowymi. Nieznacznie lepiej zadania wykonali chłopcy uzyskując średnią liczbę punktów 20,9 (w grupie dziewczynek średnia wyniosła 20,8).

Z danych przedstawionych w tabeli nr 12 wynika, że badana grupa dzieci przedszkolnych wszystkie zadania wykonała na wysokim poziomie, chociaż średnie punktów zadań dotyczących równoliczności są nieco wyższe od tych sprawdzających posługiwanie się liczebnikami porządkowymi.

Z grupy ćwiczeń dotyczących równoliczności najmniej kłopotów sprawiło przedszkolakom połączenie zbiorów o takiej samej liczbie elementów (zadanie C1). 64 badanych dzieci (91,4%) bezbłędnie wskazało zbiory równoliczne niezależnie od kształtu i jakości elementów. Uzyskane wyniki wskazują, że poprawność wykonania zadania w niewielkim zależała od liczebności zbiorów. Jedno dziecko (1,4%) błędnie połączyło zbiór dwuelementowy, czworo (5,7%) pomyliło się przy zbiorze sześcieelementowym, a tylko troje (4,2%) – przy zbiorze siedmioelementowym.

Stosunkowo najtrudniejsze okazało się samodzielne tworzenie zbiorów równolicznych (zadanie C3). Jednakże tylko pięcioro badanych dzieci (7,1%) nie potrafiło narysować tyle samo kólek, ile podanych chmurek. Zdiagnozowano różne sposoby tworzenia zbiorów np. oparte na mechanicznym odwzorowywaniu – rysowanie kólek pod chmurkami.

Z zadań dotyczących liczebników porządkowych bardzo trudne okazało się aktywne stosowanie liczebników porządkowych (zadanie C7). Z dokonanej analizy wynika, że na poziom wykonania ćwiczenia miało wpływ miejsce wskazanego elementu w ciągu. Dzieci częściej (80,0%) prawidłowo nazywały trzeci element, rzadziej – siódmy element (71,4%). Badani przejawiali tendencję do posługiwania się wyłącznie liczebnikami głównymi i szukali potwierdzenia „Czy trzy to trzeci, a siedem to siódmy?”

⁵⁵ Średnia arytmetyczna obliczona wg wzoru:
$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Najlepiej badane dzieci poradziły sobie z zaznaczaniem podanego liczebnika porządkowego (zadanie C4). 60 z nich (85,7%) potrafiło prawidłowo pokolorować element wskazany za pomocą liczebnika porządkowego. Nie zdiagnozowano istotnych statystycznie różnic w poziomie wykonania ćwiczenia w zależności od wartości liczebnika porządkowego, choć najlepsze wyniki dotyczą zaznaczenia trzeciego elementu (67 poprawnych odpowiedzi – 95,7%). Jednakże przykłady z szóstym i ósmym elementem prawidłowo wykonało niewiele mniej badanych, bo 65 dzieci (92,9%).

Z analizy wyników przedstawionych w tabeli nr 12 wynika, że wyższe średnie wyniki w zakresie analizowanych umiejętności uzyskały dzieci siedmioletnie. Dotyczy to szczególnie aktywnego stosowania liczebników porządkowych (wzrost z poziomu średniego sześciolatków do wysokiego siedmiolatków). Poziom bardzo wysoki osiągnęły – niezależnie od płci - tylko dzieci siedmioletnie.

Z przeprowadzonych badań wynika również, że z poziomem umiejętności matematycznych dotyczących równoliczności i liczebników porządkowych istotnie związany jest czas trwania edukacji przedszkolnej. Widoczny jest wyraźny wzrost sprawności łączenia zbiorów równolicznych oraz pasywnego i aktywnego rozumienia liczebników porządkowych u dzieci, które uczęszczały do przedszkola cztery lata.

Tabela nr 13 Poziom kompetencji zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów oraz posługiwania się liczebnikami porządkowymi – przedszkole tradycyjne (zestawienie procentowe)

Poziom kompetencji	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej			staż pracy nauczyciela				kwalifikacje dodatkowe	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	2 lata	3 lata	4 lata	0–	6-10	11-20	powyżej 20	tak	nie
bardzo wysoki	25,0	33,3	33,3	23,8	-	15,2	14,3	23,5	30,8	40,0	25,0	22,2	29,5
wysoki	56,3	61,1	60,0	71,4	87,5	78,8	78,6	73,6	53,8	53,3	50,0	44,4	65,6
średni	18,8	5,6	6,7	4,8	-	6,1	7,1	2,9	7,7	6,7	25,0	33,3	4,9
niski	-	-	-	-	-	-	-	-	7,7	-	-	-	-
bardzo niski	-	-	-	-	-	-	0,6	-	-	-	-	-	-

Jak wynika z tabeli nr 13 większość badanych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym prezentuje wysoki i bardzo wysoki poziom umiejętności matematycznych w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów oraz

posługiwania się liczebnikami porządkowymi. Bardzo wysoki poziom osiągają dzieci, które chodziły dłużej do przedszkola (3 i 4 lata). Poziom średni natomiast dotyczy przede wszystkim dzieci sześciolletnich, w większości dziewczynek (18,8%). Negatywnie należy jednak ocenić fakt, że są to dzieci z dłuższym okresem edukacji przedszkolnej (3 i 4 lata). Nie zdiagnozowano niskiego i bardzo niskiego poziomu opanowania analizowanej kompetencji matematycznej.

W oparciu o wyliczony wskaźnik istotności statystycznej stwierdzono, że poziom kompetencji matematycznych w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów oraz posługiwania się liczebnikami porządkowymi różnicuje wiek dziecka⁵⁶. Starsze dzieci – siedmioletnie wykazują wyższe umiejętności w zakresie analizowanej kompetencji. Siła tego związku jest słaba⁵⁷.

Analiza statystyczna wskazuje na to, że czynnikiem różnicującym poziom omawianych kompetencji dzieci jest posiadanie przez nauczyciela dodatkowych kwalifikacji zawodowych⁵⁸. Jest to zależność przeciwnieproporcjonalna o słabej sile⁵⁹. Oznacza to, że wraz z wzrostem dodatkowych kwalifikacji nauczyciela obniża się poziom umiejętności dzieci dotyczących rozróżniania zbiorów równolicznych oraz posługiwania się liczebnikami porządkowymi.

Natomiast staż pracy nauczyciela nie różnicuje poziomu omawianych kompetencji dzieci kończących edukację przedszkolną⁶⁰.

Podsumowanie i dyskusja

Z przeprowadzonych badań wynika, że w zakresie umiejętności ustalania równoliczności zbiorów oraz posługiwania się liczebnikami porządkowymi nieco wyższe wyniki uzyskały dzieci z przedszkoli tradycyjnych (średnia liczba uzyskanych punktów 20,93, czyli 91,0% maksymalnej punktacji) niż z przedszkoli Montessori (średnia liczba uzyskanych punktów 20,17, czyli 87,7% maksymalnej punktacji). W obu grupach badanych dzieci najwyższy wynik wynosi 23 punkty (placówki Montessori częstość 12,8%, placówki

⁵⁶ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,034$

⁵⁷ Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,253

⁵⁸ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,030$

⁵⁹ Wskaźnik korelacji r Pearsona – 0,260.

⁶⁰ Wskaźnik istotności statystycznej $p > 0,05$; $p = 0,543$

tradycyjne częstość 28,6%) Natomiast najniższym rezultatem w przedszkolach Montessori jest 0 punktów (częstość 1,4%), a w przedszkolach tradycyjnych zdecydowanie więcej, bo 9 punktów (częstość 1,4%)⁶¹.

Dzieci z obu badanych grup zdecydowanie lepiej poradziły sobie z ćwiczeniami dotyczącymi pierwszej składowej analizowanej kompetencji matematycznej, czyli umiejętności ustalania równoliczności zbiorów (zadania C1, C2, C3).

W tej sytuacji nieco zaskakujące są wyniki badań K. Szewczuk, która zauważa, że „dzieci w pierwszej klasie nie rozumują jeszcze operacyjnie na poziomie konkretnym”, które warunkuje „wnioskowanie o stałości liczby elementów w zbiorach mimo obserwowanych zmian sugerujących, że jest ich więcej lub mniej, wnioskowanie o zależności pomiędzy obiektami tworzącymi konsekwentne serie, a także ustalanie stałości wielkości nieciągłych” (Szewczuk, 2014, s.36). Zbieżne wnioski formułuje również D. Waloszek, zauważając, że wśród badanych sześciu- i siedmiolatków „większość dzieci (51,7%) nie posiada ukształtowanego pojęcia równy - nierówny na tyle, by włączać je do sposobu rozwiązywania zadań” (Waloszek, 1993, s.116). Autorka jednocześnie przestrzega, iż „jest to zjawisko niekorzystne dla przyszłej nauki matematyki, dokonywania operacji i działań” (Waloszek, 1993, s.116).

Dla badanej grupy przedszkolaków zdecydowanie trudniejsze okazały się zadania z liczebnikami porządkowymi.

Największa różnica w poziomie analizowanych umiejętności między dziećmi z placówek Montessori i tradycyjnych dotyczy posługiwania się pojęciami „pierwszy” i „ostatni”. W przedszkolach tradycyjnych 57,1% badanych wykonało to zadanie bezbłędnie, a w grupie dzieci montessoriańskich tylko 31,4%.

Ponadto badane dzieci z przedszkoli tradycyjnych lepiej połączyły zbiory równoliczne niezależnie od jakości i rozmieszczenia elementów. Jednocześnie wykazały się dobrą umiejętnością przeliczania.

Podczas badań stwierdzono, że dzieci z obu grup stosowały różne sposoby tworzenia zbiorów równolicznych. Dość często było to mechaniczne odwzorowywanie układu graficznego chmurek niepołączone z przeliczeniem elementów zbioru.

⁶¹ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Natomiast w przedszkolach Montessori wyższe wyniki osiągnięto w wieloetapowym zadaniu polegającym na kolorowaniu koralików zgodnie z podaną instrukcją zawierającą liczebniki porządkowe. Zróżnicowanie w poziomie wykonania tego ćwiczenia może być spowodowane lepszą koncentracją uwagi na zadaniu, większą dokładnością w pracy, jaka cechuje dzieci z placówek Montessori.

Niezależnie od tego zróżnicowania badane dzieci z obu rodzajów przedszkoli miały wątpliwości, od której strony (prawej czy lewej) należy zacząć liczenie koralików.

Na trudności dzieci w pojmowaniu aspektu porządkowego liczby zwraca uwagę również E. Gruszczyk-Kolczyńska (2009b), z badań której wynika, że w grupach siedmiolatków tylko około 35% dzieci rozumie operacyjnie na poziomie konkretnym i potrafi posługiwać się liczebnikami porządkowymi.

Uzyskane wyniki (średnia liczba punktów 20,55, czyli 89,3% maksymalnej punktacji) pozwalają wnioskować o wysokim poziomie opanowania przez dzieci kończące edukację przedszkolną umiejętności ustalania równoliczności dwóch zbiorów oraz posługiwania się liczebnikami porządkowymi.

91,4% badanych dzieci uzyskało co najmniej 17 punktów, które stanowiły 75% punktów możliwych i zgodnie z przyjętą skalą oznaczało wysoki poziom opanowania analizowanej kompetencji. 29 badanych przedszkolaków (20,7%) bezbłędnie wykonało wszystkie ćwiczenia, prezentując poziom bardzo wysoki.

4. Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w zakresie rozróżniania lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów.

Poziom kompetencji dzieci w zakresie rozróżniania lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów badały dwa zadania. Pierwsze zadanie dotyczyło określania kierunków w sytuacji rzeczywistej względem siebie. Dziecko umieszczało woreczek zgodnie z poleceniami nauczyciela. Zadanie drugie natomiast polegało na rozmieszczeniu czterech elementów (piłka, wazon, lampa i krzesło) na kartce papieru zgodnie z podanymi instrukcjami⁶².

⁶² Przyjęto następującą punktację zadań:

Grupa dzieci z przedszkoli Montessori

W tabeli nr 14 przedstawiono wyniki z poszczególnych zadań uzyskane przez badaną grupę dzieci.

Zadanie 1 - 8 punktów

Zadanie 2 – 4 punkty

Poziom analizowanej kompetencji określano według skali:

100%	12 pkt.	POZIOM BARDZO WYSOKI
99 – 75%	11 – 9 pkt.	POZIOM WYSOKI
74 – 50%	8 – 6 pkt.	POZIOM ŚREDNI
49 – 25%	5 – 3 pkt.	POZIOM NISKI
24 - 0%	poniżej 3 pkt.	POZIOM BARDZO NISKI

Tabela nr 14 Rozróżnianie lewej i prawej strony, określanie kierunków i ustalanie położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów średnia liczba uzyskanych punktów/ poziom wykonania zadań - przedszkole Montessori

Nr zadania	Średnia liczba punktów/ poziom wykonania zadania ⁶³	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej				staż pracy nauczyciela		kwalifikacje dodatkowe nauczyciela	
		6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	1 rok	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	tak	nie
D1	6,75 pkt. 84,4% poziom wysoki	6,73 pkt. 84,1% poziom wysoki	6,44 pkt. 80,5% poziom wysoki	6,81 pkt. 85,3% poziom wysoki	7,25 pkt. 90,6% poziom wysoki	7,00 pkt. 87,5% poziom wysoki	6,75 pkt. 84,4% poziom wysoki	6,79 pkt. 84,9% poziom wysoki	6,75 pkt. 84,4% poziom wysoki	6,67 pkt. 83,4% poziom wysoki	7,06 pkt. 88,3% poziom wysoki	6,53 pkt. 79,5% poziom wysoki	7,07 pkt. 88,4% poziom wysoki
D2	3,52 pkt. 88,0% poziom wysoki	3,50 pkt. 87,5% poziom wysoki	2,89 pkt. 72,25% poziom średni	3,71 pkt. 92,8% poziom wysoki	3,75 pkt. 93,8% poziom wysoki	3,00 pkt. 75,0% poziom wysoki	3,63 pkt. 90,8% poziom wysoki	3,70 pkt. 92,5% poziom wysoki	3,52 pkt. 88,0% poziom wysoki	3,56 pkt. 89,0% poziom wysoki	3,44 pkt. 86,0% poziom wysoki	3,48pkt. 87,9% poziom wysoki	3,60 pkt. 90,0% poziom wysoki

⁶³ Poziom wykonania zadania określono wg skali::

100%	POZIOM BARDZO WYSOKI
99 – 75%	POZIOM WYSOKI
74 – 50%	POZIOM ŚREDNI
49 – 25%	POZIOM NISKI
24 - 0%	POZIOM BARDZO NISKI

Badana grupa dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori uzyskała średnią liczbę punktów 10,27⁶⁴ (85,6% maksymalnej punktacji), co dowodzi wysokiego poziomu opanowania kompetencji w zakresie rozróżniania lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów.

Wyższą średnią liczbę punktów uzyskali chłopcy - 10,5 punktów. W grupie dziewczynek średnia wyniosła 9,9 punktów.

Z tabeli nr 14 wynika, że badane dzieci nie miały większych trudności z wykonaniem obu zadań. Nieco lepsze wyniki uzyskały przy określaniu kierunków na kartce papieru. Większość badanych dzieci (62,9%) potrafi prawidłowo rozmieścić na kartce podane elementy. Lepiej zadanie wykonali chłopcy uzyskując średnią liczbę punktów – 3,7 (średnia w grupie dziewczynek - 3,3). Stosunkowo najwięcej błędów dotyczyło rozróżniania stronnej lokalizacji przedmiotów. 45 badanych dzieci (64,3%) poprawnie nakleiło krzesło z prawej strony stołu. W pozostałych poleceniach (pod stołem, na stole i nad stołem) prawidłowe wykonanie zadań kształtowało się na poziomie 94,3% - 98,6%.

Niepokojącym sygnałem są jedynie wyniki siedmioletnich dziewczynek, które ćwiczenie z naklejaniem przedmiotów na kartce papieru (zadanie D2) wykonały na poziomie średnim.

Nie stwierdzono istotnych różnic pod względem wyników między dziećmi, zależnie od czasu trwania edukacji przedszkolnej. Jednakże dzieci, które tylko rok uczęszczały do przedszkola miały stosunkowo najwięcej trudności z rozmieszczeniem elementów na płaszczyźnie.

⁶⁴ Średnia arytmetyczna obliczona wg wzoru:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Tabela nr 15 Poziom kompetencji dzieci w zakresie rozróżniania lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów – przedszkole Montessori (zestawienie procentowe)

Poziom kompetencji	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej				staż pracy nauczyciela		kwalifikacje dodatkowe	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	1rok	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	tak	nie
bardzo wysoki	26,9	22,2	29,0	50,0	-	37,5	30,3	25,0	29,6	25,0	25,0	33,3
wysoki	69,2	55,5	61,3	50,0	100,0	50,0	63,6	64,3	63,0	62,5	60,0	66,6
średni	3,8	11,1	9,7	-	-	12,5	6,1	7,1	5,6	12,5	12,5	-
niski	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
bardzo niski	-	11,1	-	-	-	-	-	3,6	1,9	-	2,5	-

Wyniki przedstawione w tabeli nr 15 wskazują, że badana grupa dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori prezentuje wysoki i bardzo wysoki poziom kompetencji matematycznych w zakresie rozróżniania lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów. Szczególnie pozytywne są wyniki w grupie siedmioletnich chłopców, z których 50% orientuje się w przestrzeni na bardzo wysokim poziomie, a drugie 50% - na poziomie wysokim. Alarmujący jest natomiast wynik w grupie siedmioletnich dziewczynek, z których 11,1% prezentuje bardzo niski poziom analizowanej kompetencji. Negatywnie należy również ocenić fakt, że najniższy poziom dotyczy dzieci, które przez cztery lata uczęszczały do przedszkola. Zaskakujący jest przy tym fakt, że pracują z nimi nauczyciele posiadający dodatkowe kwalifikacje zawodowe. Jednakże przy tej zmiennej wielkość procentowa jest niewielka (2,5%).

W oparciu o wyliczony wskaźnik istotności statystycznej nie stwierdzono różnicowania poziomu kompetencji matematycznych w zakresie rozróżniania lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów w stosunku do własnej osoby i odniesieniu do innych obiektów przez wiek i płeć badanych dzieci oraz czas trwania edukacji przedszkolnej⁶⁵.

Analiza statystyczna wskazuje również, że staż pracy nauczyciela oraz posiadane przez niego kwalifikacje dodatkowe nie są czynnikami różnicującymi poziom omawianych kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną⁶⁶.

⁶⁵ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; płeć dziecka $p = 0,161$; wiek dziecka $p = 0,511$; czas trwania edukacji przedszkolnej $p = 0,462$;

⁶⁶ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż $p = 0,564$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,109$

Grupa dzieci z przedszkoli tradycyjnych

W tabeli nr 16 przedstawiono wyniki z poszczególnych zadań uzyskane przez badaną grupę dzieci.

Tabela nr 16 Rozróżnianie lewej i prawej strony, określanie kierunków i ustalanie położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów średnia liczba uzyskanych punktów/ poziom wykonania zadań - przedszkole tradycyjne

Nr zadania	Średnia liczba punktów/ poziom wykonania zadania ⁶⁷	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej			staż pracy nauczyciela				kwalifikacje dodatkowe	
		6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	11-20	powyżej 20	tak	nie
D 1	7,11 pkt. 88,9% poziom wysoki	6,94 pkt. 86,8% poziom wysoki	7,11 pkt. 88,9% poziom wysoki	6,93 pkt. 87,6% poziom wysoki	7,68 pkt. 96,0% poziom wysoki	6,40 pkt. 80,0% poziom wysoki	6,84 pkt. 85,5% poziom wysoki	7,48 pkt. 93,5% poziom wysoki	7,18 pkt. 89,8% poziom wysoki	6,69 pkt. 83,6% poziom wysoki	7,07 pkt. 88,4% poziom wysoki	7,63 pkt. 95,4% poziom wysoki	7,44 pkt. 93,0% poziom wysoki	7,07 pkt. 88,4% poziom wysoki
D2	3,77 pkt. 94,3% poziom wysoki	3,69 pkt. 92,3% poziom wysoki	3,89 pkt. 97,3% poziom wysoki	3,73 pkt. 93,3% poziom wysoki	3,88 pkt. 97,0% poziom wysoki	3,80 pkt. 95,0% poziom wysoki	3,66 pkt. 91,5% poziom wysoki	3,88 pkt. 97,0% poziom wysoki	3,74 pkt. 93,5% poziom wysoki	3,62 pkt. 90,5% poziom wysoki	3,93 pkt. 98,3% poziom wysoki	3,88 pkt. 97,0% poziom wysoki	3,89 pkt. 97,3% poziom wysoki	3,75 pkt. 93,8% poziom wysoki

⁶⁷ Poziom wykonania zadania określono wg skali

100%	POZIOM BARDZO WYSOKI
99 – 75%	POZIOM WYSOKI
74 – 50%	POZIOM ŚREDNI
49 – 25%	POZIOM NISKI
24 - 0%	POZIOM BARDZO NISKI

Badana grupa dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori uzyskała średnią liczbę punktów 10,88⁶⁸ (90,7% maksymalnej punktacji), co świadczy o wysokim poziomie opanowania kompetencji w zakresie rozróżniania lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów. Nieco wyższą średnią liczbę punktów uzyskali chłopcy – 10,9 punktów. W grupie dziewczynek średnia wyniosła 10,8 punktów. Należy zauważyć, że połowa badanych dzieci wykazała bardzo wysoki poziom opanowania analizowanej kompetencji, uzyskując maksymalną liczbę punktów.

Wyniki przeprowadzonych badań przedstawione w tabeli nr 16 wskazują na dość dużą różnicę w poziomie opanowania przez dzieci umiejętności określania kierunków w sytuacji rzeczywistej względem siebie oraz na kartce papieru. Zdecydowana większość badanych dzieci – 57, czyli 81,4% potrafi prawidłowo rozmieścić na kartce podane elementy (zadanie D2).

Wyniki przeprowadzonych badań pozwalają twierdzić, że zarówno podczas określania kierunków w sytuacjach rzeczywistych, tak i przy orientacji na kartce papieru najwięcej błędów dotyczyło rozróżniania stronnej lokalizacji przedmiotów. 81,4% badanych dzieci prawidłowo nakleiło krzesło z prawej strony stołu. Natomiast w pozostałych poleceniach (pod stołem, na stole i nad stołem) prawidłowe wykonanie zadań kształtowało się na poziomie 97,5% - 100%.

Uzyskane wyniki dowodzą, że poziom analizowanych umiejętności wzrasta wraz z wiekiem dzieci oraz czasem trwania edukacji przedszkolnej. Najlepsze rezultaty uzyskały dzieci siedmioletnie, które chodziły do przedszkola przez cztery lata.

⁶⁸ Średnia arytmetyczna obliczona wg wzoru:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Tabela nr 17 Poziom kompetencji dzieci w zakresie rozróżniania lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów – przedszkole tradycyjne (zestawienie procentowe)

Poziom kompetencji	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej			staż pracy nauczyciela				kwalifikacje dodatkowe	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	11-20	powyżej 20	tak	nie
bardzo wysoki	43,8	55,6	46,7	52,4	20,0	40,6	63,6	50,0	38,5	53,3	62,5	66,7	47,5
wysoki	43,8	38,9	40,0	47,6	80,0	43,8	36,4	44,1	38,5	46,7	37,5	33,3	44,3
średni	12,5	5,6	13,3	-	-	15,6	-	5,9	23,1	-	-	-	8,2
niski	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
bardzo niski	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Wyniki przedstawione w tabeli nr16 wskazują, że badana grupa dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym prezentuje bardzo wysoki i wysoki poziom kompetencji matematycznych w zakresie rozróżniania lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów. Poziom bardzo wysoki osiągają w większości dzieci, które doskonalili analizowane kompetencje przez cztery lata uczęszczania do przedszkola. Poziom średni natomiast dotyczy przede wszystkim dzieci młodszych - sześciolletnich (dziewczynki 12,5% i chłopcy 13,3%). Z tymi grupami dzieci pracowali nauczyciele z krótszym stażem pracy zawodowej i bez dodatkowych kwalifikacji.

W oparciu o wyliczony wskaźnik istotności statystycznej stwierdzono różnicowanie poziomu kompetencji matematycznych w zakresie rozróżniania lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów w stosunku do własnej osoby i odniesieniu do innych obiektów przez czas trwania edukacji przedszkolnej⁶⁹. Im dłużej dziecko pobierało edukację przedszkolną, tym wykazuje lepszą orientację przestrzenną. Jest to zależność o umiarkowanej sile⁷⁰. Bardzo wysoki poziom analizowanej kompetencji osiągnęły przede wszystkim dzieci uczęszczające do przedszkola przez cztery lata (63,6% badanych). Szczegółowa analiza poszczególnych zadań wskazuje, że długość edukacji

⁶⁹ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,005$

⁷⁰ Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,332

w przedszkolu wyraźnie usprawnia orientację dziecka w sytuacji rzeczywistej. W największym stopniu dotyczy to rozróżniania lewej i prawej strony⁷¹.

Nie zdiagnozowano natomiast, aby czynnikami różnicującymi poziom orientacji zarówno w przestrzeni, jak i na kartce papieru były płeć i wiek badanych dzieci, a także długość stażu pracy nauczyciela oraz posiadane przez niego kwalifikacje dodatkowe⁷².

Podsumowanie i dyskusja

Z przeprowadzonych badań wynika, że w zakresie umiejętności rozróżniania lewej i prawej strony oraz określania i ustalania położenia obiektów oba zadania lepiej wykonały dzieci z przedszkoli tradycyjnych, uzyskując średnią liczbę punktów 10,88, czyli 90,7% maksymalnej punktacji. Najniższy wynik wyniósł 7 punktów (częstość 2,9%), a najwyższy to maksymalne 12 punktów (częstość 50,0%). W przedszkolach montessoriańskich średnia wyniosła 10,27 punktów, czyli 85,6% maksymalnej punktacji, najniższy wynik to 0 punktów (częstość 1,4%), a najwyższy – również 12 punktów (częstość 28,6%)⁷³.

W zadaniu dotyczącym orientacji na papierze (zadanie D2) w przedszkolach tradycyjnych prawidłowo nakleiło na kartce podane elementy 81,4% badanych dzieci. Natomiast w przedszkolach Montessori odsetek wynosi tylko 62,9%, a jedno dziecko w ogóle nie podjęło się wykonania tego ćwiczenia.

Podobnie kształtują się wyniki odnośnie orientacji przestrzennej w sytuacjach rzeczywistych, choć nie są już tak zróżnicowane. Bezbłędnie zadanie wykonało 57,1% dzieci z przedszkoli tradycyjnych i 44,3% z placówek Montessori.

Należy zauważyć, że rozumienie i stosowanie terminów określających stosunki przestrzenne nie sprawia większych trudności badanym grupom dzieci, co potwierdzają również badania J. Kłysewicz (2008). Natomiast obie grupy badanych dzieci największe problemy mają z odróżnianiem prawej i lewej strony. Podobne wnioski formułują Z. Morawska (1985) i K. Szewczuk (2014). Z. Morawska wyjaśnia, że dziecku „nie sprawia kłopotów rozróżnianie takich kierunków jak „w górę” – tam, gdzie głowa; „w dół” – tam,

⁷¹ Wskaźniki istotności statystycznej odpowiednio $p = 0,010$ i $p = 0,015$

⁷² Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; płeć dziecka $p = 0,710$; wiek dziecka $p = 0,116$; staż $p = 0,384$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,289$

⁷³ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

gdzie nogi; „do przodu” – tam, gdzie twarz; „do tyłu” – tam, gdzie plecy” (Morawska, 1985, s.406). Natomiast trudności z rozpoznawaniem stronności są związane, zdaniem autorki z symetrią ludzkiego ciała. „Z zewnątrz prawa strona ciała jest taka sama jak lewa i w związku z tym brakuje dziecku dobrze wyróżnionego punktu odniesienia” (Morawska, 1985, s.406) Ponadto dla badanych dzieci łatwiejsze okazało się wyznaczenie prawej strony na kartce papieru niż w przestrzeni, gdyż orientacja stronna w przestrzeni pozostaje w trakcie rozwoju (Oszwa 2006).

Natomiast E. Gruszczyk-Kolczyńska (1992) radzi, aby podczas ustalania schematu własnego ciała jako punktem odniesienia było serce, którego wyraźniejsze bicie można wyczuć po intensywnej zabawie ruchowej. Pozwoli to określić – wskazać lewą stronę. Z kolei oznaczenie ręki prawej, dominującej gumką, wstążką czy bransoletą ułatwi dziecku zapamiętanie danej strony ciała.

Ponadto wspomniana E. Gruszczyk-Kolczyńska (1992) podaje bardzo wiele skutecznych ćwiczeń ukierunkowanych na kształtowanie świadomości schematu ciała, rozwijanie zdolności do przyjmowania własnego punktu widzenia, wdrażanie dzieci do rozpatrywania otoczenia z punktu widzenia drugiej osoby oraz ułatwiające dzieciom orientację na kartce papieru.

Ciekawe propozycje zabaw i gier dydaktycznych, kształtujących orientację w przestrzeni oraz na kartce papieru przedstawia również B. Odrobina (Fechner-Sędzicka, Ochmańska i Odrobina 2012). Autorka opisuje m.in. grę „Marynarze”, „W prawo, w lewo, w górę, w dół – graficzne dyktanda”, „Kałuże” czy „Pomóż Tomkowi”.

Uzyskane wyniki badań (średnia liczba punktów 10,57, czyli 88,1% maksymalnej punktacji) pozwalają wnioskować o wysokim poziomie opanowania przez dzieci kończące edukację przedszkolną umiejętności w zakresie rozróżniania lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów.

92,1% badanych dzieci uzyskało co najmniej 9 punktów, które stanowiły 75% punktów możliwych i zgodnie z przyjętą skalą oznaczało wysoki poziom opanowania kompetencji. 55 badanych przedszkolaków (39,3%) bezbłędnie wykonało wszystkie ćwiczenia, prezentując bardzo wysoki poziom analizowanej kompetencji matematycznej.

5. Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori odnośnie orientacji dzieci w zakresie pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą.

Poziom kompetencji dzieci odnośnie orientacji dzieci w zakresie pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą badano w oparciu o cztery zadania. W pierwszym zadaniu dzieci – poprzez zamalowanie wskazywały najdłuższy i najkrótszy pasek. Zadanie drugie polegało na uporządkowaniu drzew od najniższego do najwyższego. W trzecim ćwiczeniu dzieci mierzyły wskazaną odległość za pomocą kroków, stopa za stopą oraz dłonią. Natomiast w ostatnim zadaniu dzieci do pomiaru długości narysowanych pasków stosowały linijkę⁷⁴.

Grupa dzieci z przedszkoli Montessori

W tabeli nr 18 przedstawiono wyniki z poszczególnych zadań uzyskane przez badaną grupę dzieci.

⁷⁴ Przyjęto następującą punktację zadań:

Zadanie 1 - 2 punkty

Zadanie 2 – 1 punkt

Zadanie 3 – 3 punkty

Zadanie 4 – 2 punkty

Poziom analizowanej kompetencji określano według skali:

100%	8 pkt.	POZIOM BARDZO WYSOKI
99 – 75%	7 - 6 pkt..	POZIOM WYSOKI
74 – 50%	5 – 4 pkt.	POZIOM ŚREDNI
49 – 25%	3 – 2 pkt.	POZIOM NISKI
24 - 0%	poniżej 2 pkt.	POZIOM BARDZO NISKI

Tabela nr 18 Orientacja dzieci w zakresie pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia - średnia liczba uzyskanych punktów/ poziom wykonania zadań - przedszkole Montessori

Nr zadania	Średnia liczba punktów/ poziom wykonania zadania ⁷⁵	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej				staż pracy nauczyciela		kwalifikacje dodatkowe nauczyciela	
		6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	1 rok	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	tak	nie
E1	1,94 pkt. 97,0% poziom wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	1,78 pkt. 89,0% poziom wysoki	1,94 pkt. 97,0% poziom wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	0,00 pkt. 0% poziom zerowy	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	1,93 pkt. 96,5% poziom wysoki	1,93 pkt. 96,5% poziom wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	1,90 pkt. 95,0% poziom wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki
E2	0,65 pkt. 65,0 % poziom średni	0,46 pkt. 46,0 % poziom niski	0,67 pkt. 67,0 % poziom średni	0,68 pkt. 68,0 % poziom średni	0,75 pkt. 75,0 % poziom wysoki	0,00 pkt. 0% poziom zerowy	0,88 pkt. 88,0 % poziom wysoki	0,61 pkt. 61,0 % poziom średni	0,54 pkt. 54,0 % poziom średni	0,59 pkt. 59,0 % poziom średni	0,63 pkt. 63,0 % poziom średni	0,55 pkt. 55,0 % poziom średni	0,67 pkt. 67,0 % poziom średni

⁷⁵ Poziom wykonania zadania określono wg skali

100% POZIOM BARDZO WYSOKI
99 – 75% POZIOM WYSOKI
74 – 50% POZIOM ŚREDNI
49 – 25% POZIOM NISKI
24 - 0% POZIOM BARDZO NISKI

E3	1,92 pkt. 64,0 % poziom średni	2,00 pkt. 66,7 % poziom średni	2,00 pkt. 66,7 % poziom średni	1,74 pkt. 58,0 % poziom średni	2,75 pkt. 91,70 % poziom wysoki	0,00 pkt. 0% poziom zerowy	2,13 pkt. 71,0 % poziom średni	1,88 pkt. 62,7 % poziom średni	2,00 pkt. 66,70 % poziom wysoki	1,91 pkt. 63,7 % poziom średni	2,00 pkt. 66,7 % poziom średni	1,85 pkt. 61,7 % poziom średni	2,03 pkt. 67,7 % poziom średni
E4	1,04 pkt. 52,0% poziom średni	1,08 pkt. 54,0% poziom średni	1,00 pkt. 50,0% poziom średni	1,00 pkt. 52,0% poziom średni	1,25 pkt. 62,5% poziom średni	0,00 pkt. 0% poziom zerowy	0,63 pkt. 31,5% poziom niski	0,97 pkt. 48,5% poziom niski	1,29 pkt. 64,5% poziom średni	1,06 pkt. 53,0% poziom średni	1,00 pkt. 50,0% poziom średni	1,08 pkt. 54,0% poziom średni	1,00 pkt. 50,0% poziom średni

Badana grupa dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori uzyskała średnią liczbę punktów 5,58⁷⁶, czyli 69,7% maksymalnej punktacji, co świadczy o średnim poziomie opanowania kompetencji matematycznych w zakresie umiejętności pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia. Nieznacznie wyższą średnią liczbę punktów uzyskały dziewczynki 5,6 punktów (w grupie chłopców średnia wynosi 5,5 punktów).

Z tabeli nr 18 wynika, że zdecydowanie najłatwiejsze dla badanych dzieci było wskazanie najdłuższego i najkrótszego paska (zadanie E1). Prawidłowo zadanie wypełniło 68 badanych (97,1%). Nie stwierdzono różnic między rozróżnieniem paska najdłuższego i najkrótszego – obie te umiejętności występowały łącznie. Grupa sześciolletnich dziewczynek i siedmioletnich chłopców zrobiła to zadanie bezbłędnie.

Pozostałe ćwiczenia okazały się dużo trudniejsze i zostały wykonane na średnim poziomie. Najwięcej kłopotów sprawiło badanym przedszkolakom zmierzenie pasków długości za pomocą linijki (zadanie E4). Zaledwie 28 badanych dzieci (40,0%) poprawnie posługuje się linijką podczas mierzenia długości. Lepiej analizowane zadanie wykonały dziewczynki uzyskując średnią liczbę punktów – 2,0 (średnia w grupie chłopców wyniosła 1,8 punktów). Na poprawność pomiaru nie miała większego wpływu długość odcinków. Z przeprowadzonych badań wynika, że błędy popełniane przez dzieci polegały głównie na nieprawidłowym przyłożeniu linijki i niedokładnym odczytaniu wyniku pomiaru.

Ponadto badana grupa dzieci doświadczała także sporo trudności przy mierzeniu za pomocą kroków, dłonią oraz stopa za stopą. Tylko 17 z nich (24,3%) wykonało poprawnie wszystkie trzy pomiary. Dzieci nie poradziły sobie przede wszystkim z mierzeniem dłonią – zaledwie 12 poprawnych pomiarów (17,1%).

Analizowane umiejętności matematyczne dzieci nabywają w toku edukacji przedszkolnej. Z uzyskanych wyników badań wynika, że nie posiadają ich dzieci, które tylko przez rok uczęszczały do przedszkola (zerowy poziom wykonania wszystkich ćwiczeń). Natomiast umiejętność posługiwania się linijką na najwyższym zdiagnozowanym poziomie – średnim osiagają dzieci dopiero w czwartym roku edukacji przedszkolnej. Podobny wzrost poziomu umiejętności dzieci dłużej uczęszczających do przedszkola

⁷⁶ Średnia arytmetyczna obliczona wg wzoru:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

widoczny jest przy mierzeniu długości prostymi sposobami: krokami, stopa za stopą oraz dłonią (zadanie E3). Na wysokim poziomie takie ćwiczenia wykonali wyłącznie badani, którzy przez cztery lata chodzili do przedszkola.

Tabela nr 19 Poziom kompetencji dzieci odnośnie orientacji dzieci w zakresie pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia – przedszkole Montessori (zestawienie procentowe)

Poziom kompetencji	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej				staż pracy nauczyciela		kwalifikacje dodatkowe	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	1 rok	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	tak	nie
bardzo wysoki	3,8	11,1		50,0	-	-	3,0	10,7	-	25,0	2,5	10,0
wysoki	53,8	55,5	54,8	25,0	-	71,4	48,5	57,2	61,1	25,0	57,5	46,7
średni	42,3	22,2	32,2	25,0	-	12,5	45,5	32,1	35,2	37,5	30,0	40,0
niski	-	-	9,7	-	-	12,5	3,0	-	-	12,5	5,0	3,3
bardzo niski	-	11,1	3,2	-	100	3,6	-	-	3,7	-	5,0	-

Jak wynika z tabeli nr 19 badane dzieci kończące edukację przedszkolną w systemie Montessori prezentują wysoki i średni poziom umiejętności matematycznych w zakresie pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia.

Najlepsze wyniki uzyskano w grupie siedmioletnich chłopców, wśród których 50% prezentuje bardzo wysoki poziom analizowanej kompetencji. Niepojętym jest natomiast bardzo niski poziom w grupie siedmioletnich dziewczynek.

Przedstawione wyniki wskazują także, że stopień analizowanej kompetencji wzrasta wraz z czasem trwania edukacji przedszkolnej i najwyższy poziom osiągają dzieci po trzech, a zwłaszcza po czterech latach pobytu w przedszkolu. Natomiast poziom bardzo niski prezentują wszystkie badane dzieci, które chodziły do przedszkola tylko jeden rok. W tej grupie były również dzieci, które zupełnie nie nabyły umiejętności w zakresie mierzenia długości (poziom zerowy). Należy jednak zaznaczyć, że dotyczy to zaledwie 1,4% badanych.

W oparciu o wyliczony wskaźnik istotności statystycznej nie stwierdzono różnicowania poziomu kompetencji matematycznych odnośnie orientacji dzieci w zakresie pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia przez wiek i płeć badanych oraz czas trwania edukacji przedszkolnej⁷⁷.

⁷⁷ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; płeć dziecka $p = 0,911$; wiek dziecka $p = 0,203$; czas trwania edukacji przedszkolnej $p = 0,056$;

Czynnikami różnicującymi poziom omawianej kompetencji matematycznej nie są także staż pracy nauczyciela i jego dodatkowe kwalifikacje⁷⁸. Jednakże szczegółowa analiza ukazuje, że staż pracy nauczyciela wpływa proporcjonalnie na prezentowany przez dzieci poziom umiejętności mierzenia długości za pomocą dłoni⁷⁹. Jest to związek o umiarkowanej sile⁸⁰. Można przypuszczać, że nauczyciele z dłuższym stażem częściej stwarzają praktyczne sytuacje lub proponują więcej zabaw matematycznych, w których dzieci mogą mierzyć długość różnymi sposobami.

Grupa dzieci z przedszkoli tradycyjnych

W tabeli nr 20 przedstawiono wyniki z poszczególnych zadań uzyskane przez badaną grupę dzieci.

⁷⁸ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż $p = 0,628$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,486$

⁷⁹ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,005$

⁸⁰ Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,333

Tabela nr 20 Orientacja dzieci w zakresie pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia - średnia liczba uzyskanych punktów/ poziom wykonania zadań- przedszkole tradycyjne

Nr zadania	Średnia liczba punktów/ poziom wykonania zadania ⁸¹	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej			staż pracy nauczyciela				kwalifikacje dodatkowe	
		6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	11-20	powyżej 20	tak	nie
E1	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki	2,00 pkt. 100% poziom bardzo wysoki
E2	0,76 pkt. 76,0 % poziom wysoki	0,75 pkt. 75,0 % poziom wysoki	0,86 pkt. 86,0 % poziom wysoki	0,60 pkt. 60,0 % poziom średni	0,90 pkt. 90,0 % poziom wysoki	0,70 pkt. 70,0 % poziom średni	0,70 pkt. 70,0 % poziom średni	0,83 pkt. 83,0 % poziom wysoki	0,77 pkt. 77,0 % poziom wysoki	0,77 pkt. 77,0 % poziom wysoki	0,83 pkt. 83,0 % poziom wysoki	0,63 pkt. 63,0 % poziom średni	0,67 pkt. 67,0 % poziom średni	0,78 pkt. 78,0 % poziom wysoki
E3	2,04 pkt. 68,0 % poziom średni	1,88 pkt. 62,7 % poziom średni	1,89 pkt. 63,0 % poziom średni	2,07 pkt. 69,0 % poziom średni	2,63 pkt. 87,7 % poziom wysoki	1,80 pkt. 60,0 % poziom średni	2,00 pkt. 66,7 % poziom średni	2,12 pkt. 70,7 % poziom średni	2,18 pkt. 72,7 % poziom średni	1,62 pkt. 54,0 % poziom średni	2,07 pkt. 69,0 % poziom średni	2,13 pkt. 71,0 % poziom średni	2,44 pkt. 81,3,0 % poziom wysoki	1,98 pkt. 66,0 % poziom średni

⁸¹ Poziom wykonania zadania określono wg skali

100% POZIOM BARDZO WYSOKI
99 – 75% POZIOM WYSOKI
74 – 50% POZIOM ŚREDNI
49 – 25% POZIOM NISKI
24 - 0% POZIOM BARDZO NISKI

E4	1,29 pkt. 64,5% poziom średni	1,25 pkt. 62,5% poziom średni	1,44 pkt. 72,0% poziom średni	0,93 pkt. 46,5% poziom niski	1,70 pkt. 85,0% poziom wysoki	0,40 pkt. 20,0% poziom bardzo niski	1,16 pkt. 58,0% poziom średni	1,55 pkt. 77,5% poziom wysoki	1,29 pkt. 64,5% poziom średni	0,92 pkt. 46,0% poziom niski	1,53 pkt. 76,5% poziom wysoki	1,38 pkt. 69,0% poziom średni	1,67 pkt. 83,5% poziom wysoki	1,23 pkt. 61,5% poziom średni
----	--	--	--	---------------------------------------	--	---	--	--	--	---------------------------------------	--	--	--	--

Badana grupa dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym uzyskała średnią liczbę punktów 6,06⁸², czyli 75,8% maksymalnej punktacji, co świadczy o wysokim poziomie opanowania kompetencji matematycznych odnośnie orientacji w zakresie pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia. Nieznacznie wyższą średnią liczbę punktów uzyskali chłopcy - 6,1 (w grupie dziewczynek średnia wyniosła 6,0 punktów).

Z tabeli nr 20 wynika, że zdecydowanie najłatwiejsze dla badanych przedszkolaków było wskazanie najdłuższego i najkrótszego paska (zadanie E1). Ćwiczenie bezbłędnie wykonały wszystkie badane dzieci.

Najtrudniejszym natomiast okazało się zmierzenie pasków długości za pomocą linijki (zadanie E4). 38 badanych dzieci (54,3%) poprawnie posługuje się linijką podczas mierzenia długości odcinków. Z przeprowadzonych badań wynika, że nieco łatwiejszym dla badanej grupy dzieci okazało się zmierzenie krótszego odcinka (78,8% poprawnych pomiarów). Pasek dłuższy – 15- centymetrowy prawidłowo zmierzyło 70,0% badanych.

Z przedstawionych wyników można wnioskować, że umiejętność posługiwania się linijką wzrasta wraz z wiekiem dzieci. Dotyczy to szczególnie grupy chłopców, w której sześciolatki mierzą długość na poziomie niskim, a ich rok starsi koledzy na poziomie wysokim.

Podobny postęp (z poziomu średniego na wysoki) zdiagnozowano również w zakresie umiejętności porządkowania elementów od najniższego do najwyższego (zadanie E2) oraz mierzenia długości różnymi sposobami np. krokami czy dłonią (zadanie E3).

Sporo kłopotów sprawiło badanym dzieciom także odmierzanie długości za pomocą kroków, dłonią oraz stopa za stopą (zadanie E3). Tylko 21 z nich (30,0%) wykonało poprawnie wszystkie pomiary. Dzieci bardzo dobrze potrafią mierzyć długość krokami - 63 poprawnie dokonanych pomiarów (90%). Jednostkowe problemy pojawiły się przy mierzeniu stopa za stopą – 53 poprawnych pomiarów (75,7%). Natomiast badana grupa dzieci nie poradziła sobie z mierzeniem dłonią – zaledwie 26 poprawnych pomiarów (37,1%).

Analizowane umiejętności matematyczne dzieci nabywają w toku edukacji przedszkolnej. Dotyczy to szczególnie sprawności posługiwania się linijką. Dzieci po dwóch latach edukacji przedszkolnej opanowały ją na poziomie bardzo niskim, a po czterech

⁸² Średnia arytmetyczna obliczona wg wzoru:
$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

uczęszczania do przedszkola potrafią mierzyć długość za pomocą linijki na poziomie wysokim. Podobny wzrost poziomu umiejętności dzieci dłużej uczęszczających do przedszkola jest widoczny przy porządkowaniu elementów od najniższego do najwyższego (zadanie E2). Na wysokim poziomie to ćwiczenie wykonali wyłącznie badani, którzy przez cztery lata chodzili do przedszkola.

Tabela nr 21 Poziom kompetencji dzieci odnośnie orientacji dzieci w zakresie pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia – przedszkole tradycyjne (zestawienie procentowe)

Poziom kompetencji	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej			staż pracy nauczyciela				kwalifikacje dodatkowe	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	11-20	powyżej 20	tak	nie
bardzo wysoki	6,3	11,1	-	33,3	-	6,3	24,2	14,7	-	26,7	12,5	44,4	9,8
wysoki	56,3	61,1	60,0	38,1	20,0	59,4	51,5	55,9	61,5	40,0	50,0	22,2	57,4
średni	31,3	22,2	40,0	23,8	80,0	28,1	21,1	29,4	15,4	33,3	37,5	33,3	27,9
niski	6,3	5,6	-	4,8	-	6,3	3,0	-	23,1	-	-	-	4,9
bardzo niski	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Jak wynika z tabeli nr 21 badane dzieci kończące edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym prezentują wysoki i średni poziom umiejętności matematycznych w zakresie pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia.

Poziom bardzo wysoki osiągnęły przede wszystkim dzieci siedmioletnie – 33,3% badanych chłopców oraz 11,1% dziewczynek, które najdłużej (przez 4 lata) uczęszczały do przedszkola. Na poziomie niskim umiejętność mierzenia opanowały w większości dziewczynki (6,3% sześciolatek i 5,6% siedmiolatek). W tym kontekście zastanawiający jest niski poziom zdiagnozowany w grupie siedmioletnich chłopców. Jednakże jest to niewielki odsetek (4,8%).

Przedstawione wyniki wskazują, że stopień analizowanej kompetencji matematycznej wzrasta wraz z czasem trwania edukacji przedszkolnej. Najwyższy poziom osiągają dzieci po trzech, a zwłaszcza po czterech latach pobytu w przedszkolu. Jednocześnie niepokoi fakt, że poziom niski zdiagnozowano u dzieci, które również chodziły do przedszkola przez cztery lata.

W oparciu o wyliczony wskaźnik istotności statystycznej stwierdzono różnicowanie poziomu kompetencji matematycznych odnośnie orientacji dzieci w zakresie pomiaru

długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia przez czas trwania edukacji przedszkolnej⁸³. Im dłużej dziecko podlega oddziaływaniom edukacyjnym przedszkola, tym lepiej radzi sobie z dokonywaniem pomiarów długości. Jest to zależność o umiarkowanej sile⁸⁴. Na podstawie szczegółowej analizy poszczególnych zadań można stwierdzić, że wraz z czasem edukacji przedszkolnej wyraźnie wzrasta umiejętność dzieci dotycząca mierzenia długości za pomocą linijki⁸⁵. Jest to zależność o umiarkowanej sile⁸⁶.

Analiza statystyczna wskazuje, że staż pracy nauczyciela oraz jego dodatkowe kwalifikacje nie różnicują prezentowanego przez dzieci poziomu umiejętności matematycznych w zakresie mierzenia długości⁸⁷.

Podsumowanie i dyskusja

Z przeprowadzonych badań wynika, że w zakresie pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia grupa dzieci z przedszkoli tradycyjnych prezentuje poziom wysoki (średnia liczba punktów 6,06; czyli 75,5% maksymalnej punktacji). Najniższy uzyskany wynik wynosi 3 punkty, (częstość - 4,3%), a najwyższy to maksymalne 8 punktów (częstość - 14,3%).

Natomiast dzieci z przedszkoli Montessori analizowaną kompetencję opanowały na poziomie średnim (średnia liczba punktów wynosi 5,57, czyli 69,6% maksymalnej punktacji). Najniższy wynik to 0 punktów (częstość - 2,9%), a najwyższy również 8 punktów (częstość 5,7%)⁸⁸.

Wszystkie ćwiczenia lepiej wykonały dzieci z placówek tradycyjnych. Największa różnica w poziomie umiejętności dotyczy posługiwania linijką podczas pomiarów. W przedszkolach tradycyjnych 54,3% badanych potrafi bezbłędnie zmierzyć długości podanych odcinków. W przedszkolach Montessori taką umiejętność prezentuje 40% dzieci. Niemniej przeprowadzone badania wskazują dość ubogie doświadczenia wszystkich badanych dzieci związane z posługiwaniem się linijką. Dzieci korzystały z niej raczej

⁸³ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,009$

⁸⁴ Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,312

⁸⁵ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,003$

⁸⁶ Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,354

⁸⁷ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż $p = 0,897$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,110$

⁸⁸ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

intuicyjnie, nie wiedziały jak należy przyłożyć przyrząd do odcinka, gdzie i jak odczytać wynik.

Ponadto różnice między badanymi grupami dzieci wystąpiły podczas porządkowania elementów od najniższego do najwyższego. Zdecydowanie lepiej różnicowały wysokość drzewa dzieci z placówek tradycyjnych. 71,4% z nich umie ułożyć elementy zgodnie z gradacją danej cechy (wysokość drzewa). W przedszkolach Montessori prawidłowo zadanie wykonało 60% badanych dzieci.

Należy jednak zaznaczyć, że badane dzieci przedszkolne z obu grup miały kłopoty z prawidłowym ułożeniem drzew od najniższego do najwyższego. Dość często dzieci układały je w odwrotnej kolejności, co może świadczyć albo o braku umiejętności stopniowania wielkości, albo o nieprawidłowej orientacji na kartce papieru (układanie od lewej do prawej).

Niezależnie od wskazanych różnic w poziomie umiejętności mierzenia długości w obu grupach badanych dzieci największe trudności dotyczyły mierzenia za pomocą dłoni. Można wnioskować, że przyczyną doświadczanych kłopotów był brak doświadczeń dzieci w tym zakresie.

W tym kontekście bardzo cenne są propozycje ćwiczeń, jakie przedstawia E. Gruszczyk-Kolczyńska (1992). Mierzenie krokami - zdaniem autorki można skutecznie zrealizować w trakcie spaceru, podczas pobytu w ogrodzie, w lesie. Najpierw wykonuje czynność dorosły, a następnie dziecko. Okazuje się, że ten sam odcinek mierzony przez osobę dorosłą wyniósł 5 kroków, a mierzony przez dziecko 13 kroków. Dzięki takim obserwacjom dziecko uświadamia sobie, że wynik pomiaru zależy od stosowanych jednostek. Natomiast mierzenie stopami można przeprowadzić w domu. Dorosły określa odległość, którą mierzymy i pokazuje sposób mierzenia (stopa za stopą). Z kolei mierzenie łokciem, dłonią czy palcami ma dziecku uświadomić potrzebę precyzji pomiaru np. dokonujemy pomiaru długości stołu. Długość stołu wynosi: dwa łokcie, trzy dłonie i trzy palce. Stopniowo dzieci zapoznają się z narzędziami pomiaru długości, którymi posługują się dorośli jak: miara krawiecka, stolarska, taśma miernicza, linijka szkolna oraz dokonują prób mierzenia długości.

Uzyskane wyniki badań (średnia liczba punktów 5,82 czyli 72,8% maksymalnej punktacji) pozwalają wnioskować o górnej granicy średniego poziomu opanowania przez dzieci kończące edukację przedszkolną umiejętności dotyczących orientacji w zakresie pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia.

14 badanych dzieci (10%) bezbłędnie wykonało wszystkie ćwiczenia, prezentując bardzo wysoki poziom analizowanej kompetencji matematycznej.

6. Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w zakresie znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku.

Poziom kompetencji dzieci w zakresie znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku badało siedem zadań.

W pierwszym zadaniu dzieci przyporządkowywały obrazki do podanej pory dnia: wieczór, rano i południe. Zadanie drugie polegało na chronologicznym uporządkowaniu ilustracji przedstawiających pory dnia. Trzecie ćwiczenie sprawdzało, czy dzieci znają nazwy dni tygodnia oraz czy posługują się operacyjnie takimi określeniami czasu, jak: „jutro”, „wczoraj” oraz „dzisiaj”. W czwartym zadaniu dzieci przyporządkowywały obrazki do podanej pory roku, a w kolejnym rozmieszczały je z zachowaniem właściwego następstwa pór roku. Zadanie szóste polegało na pamięciowym wymienieniu nazw miesięcy. W ostatnim ćwiczeniu dzieci układały pięcioelementową historyjkę obrazkową zgodnie z logicznym przebiegiem wydarzeń⁸⁹.

Grupa dzieci z przedszkoli Montessori

W tabeli nr 22 przedstawiono wyniki z poszczególnych zadań uzyskane przez badaną grupę dzieci.

⁸⁹ Przyjęto następującą punktację zadań:

Zadanie 1 - 3 punkty

Zadanie 2 – 3 punkty

Zadanie 3 – 4 punkty

Zadanie 4 – 4 punkty

Zadanie 5 – 4 punkty

Zadanie 6 – 1 punkt

Zadanie 7 - 1 punkt

Poziom analizowanej kompetencji określano według skali:

100%	20 pkt.	POZIOM BARDZO WYSOKI
99 – 75%	19 - 15 pkt..	POZIOM WYSOKI
74 – 50%	14 – 10 pkt.	POZIOM ŚREDNI
49 – 25%	9 – 6 pkt.	POZIOM NISKI
24 - 0%	poniżej 5 pkt.	POZIOM BARDZO NISKI

Tabela nr 22 Znajomość stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku - średnia liczba uzyskanych punktów/ poziom wykonania zadań- przedszkole Montessori

Nr zadania	Średnia liczba punktów/ poziom wykonania zadania ⁹⁰	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej				staż pracy nauczyciela		kwalifikacje dodatkowe nauczyciela	
		6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	1 rok	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	tak	nie
F1	1,65 pkt. 55,0% poziom średni	1,62 pkt. 54,0% poziom średni	0,89 pkt. 29,7 % poziom niski	1,84 pkt. 61,3% poziom średni	2,25 pkt. 75,0% poziom wysoki	0,00 pkt. 0% poziom zerowy	2,00 pkt. 66,7% poziom średni	1,76 pkt. 58,7% poziom średni	1,50 pkt. 50,0% poziom średni	1,63 pkt. 54,3% poziom średni	1,75 pkt. 58,3% poziom średni	1,48 pkt. 49,3,0% poziom średni	1,90 pkt. 63,3,3% poziom średni
F2	1,55 pkt. 51,7% poziom średni	1,44 pkt. 48,0% poziom niski	1,44 pkt. 48,0% poziom niski	1,78 pkt. 59,3% poziom średni	1,75 pkt. 58,3% poziom średni	0,00 pkt. 0% poziom zerowy	2,13 pkt. 71,0% poziom średni	1,40 pkt. 46,7% poziom niski	1,68 pkt. 56,0% poziom średni	1,67 pkt. 55,7% poziom średni	1,25 pkt. 41,7% poziom niski	1,55 pkt. 51,7,0% poziom średni	1,60 pkt. 53,3% poziom średni
F3	3,30 pkt. 82,5% poziom wysoki	3,46 pkt. 86,5% poziom	3,00 pkt. 75,0% poziom	3,23 pkt. 80,8% poziom	3,50 pkt. 87,5% poziom	0,00 pkt. 0% poziom	2,75 pkt. 68,8% poziom	3,55 pkt. 88,8% poziom	3,30 pkt. 82,5% poziom	3,24 pkt. 81,0% poziom wysoki	3,50 pkt. 87,5% poziom	3,15 pkt. 78,8% poziom	3,50 pkt. 87,5% poziom

⁹⁰ Poziom wykonania zadania określono wg skali

100% POZIOM BARDZO WYSOKI

99 – 75% POZIOM WYSOKI

74 – 50% POZIOM ŚREDNI

49 – 25% POZIOM NISKI

24 - 0% POZIOM BARDZO NISKI

		wysoki	wysoki	wysoki	wysoki	zerowy	średni	wysoki	wysoki		wysoki	wysoki	wysoki
F4	3,20 pkt. 80,5% poziom wysoki	3,31 pkt. 82,8% poziom wysoki	2,89 pkt. 72,3% poziom średni	3,26 pkt. 81,50% poziom wysoki	3,25 pkt. 81,3% poziom wysoki	0,00 pkt. 0% poziom zerowy	3,13 pkt. 78,3% poziom wysoki	3,52 pkt. 88,0% poziom wysoki	3,04 pkt. 76,0% poziom wysoki	3,19 pkt. 79,8% poziom wysoki	3,38 pkt. 84,5% poziom wysoki	3,00 pkt. 75,% poziom wysoki	3,53 pkt. 88,3% poziom wysoki
F5	3,00 pkt. 75,0% poziom wysoki	2,85 pkt. 71,3% poziom średni	3,11 pkt. 77,8% poziom wysoki	3,19 pkt. 79,8% poziom wysoki	2,00 pkt. 50,0% poziom średni	0,00 pkt. 0% poziom zerowy	3,38 pkt. 84,5% poziom wysoki	3,00 pkt. 75,0% poziom wysoki	2,96 pkt. 74,0% poziom średni	3,09 pkt. 77,3% poziom wysoki	2,63 pkt. 65,8% poziom średni	2,85 pkt. 71,3% poziom średni	3,17 pkt. 79,3% poziom wysoki
F6	0,62 pkt. 62,0% poziom średni	0,54 pkt. 54,0% poziom średni	0,78 pkt. 78,0% poziom wysoki	0,48 pkt. 48,0% poziom niski	0,00 pkt. 0% poziom zerowy	0,00 pkt. 0% poziom zerowy	0,75 pkt. 75,0% poziom wysoki	0,36 pkt. 36,0% poziom niski	0,64 pkt. 64,0% poziom średni	0,54 pkt. 54,0% poziom średni	0,44 pkt. 44,0% poziom niski	0,60 pkt. 60,0% poziom średni	0,40 pkt. 40,0% poziom niski
F7	0,60 pkt. 60,0 % poziom średni	0,58 pkt. 58,0 % poziom średni	0,57 pkt. 57,0 % poziom średni	0,42 pkt. 42,0 % poziom niski	0,75 pkt. 75,0 % poziom wysoki	0,00 pkt. 0% poziom zerowy	0,63 pkt. 63,0 % poziom średni	0,49 pkt. 49,0 % poziom niski	0,54 pkt. 54,0 % poziom średni	0,50 pkt. 50,0% poziom średni	0,56 pkt. 56,0% poziom średni	0,50 pkt. 50,0 % poziom średni	0,53 pkt. 53,0 % poziom średni

Badana grupa dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori uzyskała średnią liczbę punktów 14,06⁹¹, czyli 56,2% maksymalnej punktacji, co świadczy o średnim poziomie opanowania umiejętności matematycznych w zakresie znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku. Wyższą średnią liczbę punktów uzyskali chłopcy – 14,5 (w grupie dziewczynek średnia wyniosła 13,5 punktów).

Z tabeli nr 22 wynika, że najłatwiejsze dla badanej grupy dzieci okazało się ćwiczenie dotyczące dni tygodnia (zadanie F3). Zdecydowana większość badanej grupy dzieci (87,1%) zna nazwy dni tygodnia i potrafi je wymienić w właściwej kolejności. Podczas badań zdiagnozowano jednak słabe rozumienie samego pojęcia „dzień tygodnia”. Dzieci wymagały dodatkowego wyjaśnienia terminu i ukierunkowania, aby wymienić znane im nazwy, których nie kwalifikowały jako kategoria „dzień tygodnia”. Na porównywalnym, wysokim poziomie badani posługują się operacyjnie takimi pojęciami jak: „dziś”, „jutro”, „wczoraj”. Potrafią przyporządkować im właściwą nazwę dnia tygodnia.

Zdecydowanie najwięcej kłopotów sprawiło badanym przedszkolakom ułożenie w prawidłowej kolejności obrazków ilustrujących rano, południe i wieczór (zadanie F2). Tylko 25 z nich (35,7%) wykazało się znajomością stałego następstwa pór dnia. Szczególnych trudności z tym zadaniem doświadczały dziewczynki, zarówno sześć- jak i siedmioletnie. Można przypuszczać, że poziom wykonania tego ćwiczenia mógł być konsekwencją problemów z właściwym rozpoznaniem na obrazkach trzech pór dnia: wieczór, rano i południe (zadanie F1). Najwięcej trudności sprawiło dzieciom rozpoznanie południa – 30 poprawnych wskazań (42,9%). Przy wskazywaniu wieczoru i rana nie stwierdzono istotnych różnic. Niepokojącym sygnałem jest fakt, że również z tym zadaniem wyraźnie najslabiej poradziły sobie siedmioletnie dziewczynki.

Z kolei w grupie chłopców znajomość pór dnia wzrasta wraz z wiekiem (z poziomu średniego do wysokiego). Jeszcze większy przyrost umiejętności stwierdzono w przypadku rozumienia kolejności wydarzeń z uwzględnieniem ich logicznego następstwa (zadanie F7). Jednocześnie należy wyraźnie zasygnalizować wymagający interwencji zerowy poziom znajomości nazw miesięcy zdiagnozowany w grupie siedmioletnich chłopców.

⁹¹Średnia arytmetyczna obliczona wg wzoru:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Z uzyskanych wyników badań wynika, że umiejętności matematyczne w zakresie orientacji w czasie dzieci nabywają wraz z trwaniem edukacji przedszkolnej. Nie posiadają ich badani, którzy uczęszczali do przedszkola tylko przez jeden rok (we wszystkich zadaniach stwierdzono poziom zerowy).

Tabela nr 23 Poziom kompetencji dzieci w zakresie znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku - przedszkole Montessori (zestawienie procentowe)

Poziom kompetencji	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej				staż pracy nauczyciela		kwalifikacje dodatkowe	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	1 rok	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	tak	nie
bardzo wysoki	3,8	-	3,2	-	-	-	3,0	3,6	3,7	-	2,5	3,3
wysoki	46,1	22,2	45,2	50	-	62,5	45,5	42,9	40,7	62,5	45,0	45,0
średni	30,8	44,4	38,7	25,0	-	25,0	36,4	35,7	40,7	12,5	27,5	46,7
niski	19,2	22,2	6,5	25,0	-	12,5	12,1	14,3	9,3	25,0	17,5	10,0
bardzo niski	-	11,1	6,5	-	100	-	3,0	3,6	5,6	-	7,5	-

Wyniki przedstawione w tabeli nr 23 wskazują, że większość badanych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori prezentuje wysoki i średni poziom kompetencji matematycznych w zakresie orientacji w czasie.

Negatywnie należy ocenić sytuację w grupie siedmioletnich dziewczynek, z których 22,2% prezentuje niski, a 11,1% bardzo niski poziom analizowanej kompetencji. Niepokój powinien także budzić niski poziom 25,0% siedmioletnich chłopców.

Zastanawiająca jest natomiast kwestia poziomu bardzo wysokiego, osiągniętego wyłącznie przez dzieci 6-letnie, z którymi pracowali nauczyciele z krótkim stażem pracy zawodowej (0-5 lat).

W oparciu o wyliczony wskaźnik istotności statystycznej nie stwierdzono różnicowania poziomu kompetencji matematycznych w zakresie znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku przez płeć i wiek dziecka oraz czas trwania edukacji przedszkolnej⁹².

Na podstawie analizy statystycznej można również stwierdzić, że staż pracy nauczyciela oraz jego dodatkowe kwalifikacje zawodowe nie różnicują umiejętności dzieci dotyczących orientacji w czasie⁹³.

⁹² Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; płeć dziecka $p = 0,358$; wiek dziecka $p = 0,821$; czas trwania edukacji przedszkolnej $p = 0,694$

⁹³ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż $p = 0,903$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,272$

Grupa dzieci z przedszkoli tradycyjnych

W tabeli nr 24 przedstawiono wyniki z poszczególnych zadań uzyskane przez badaną grupę dzieci.

Tabela nr 24 Znajomość stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku średnia liczba uzyskanych punktów/ poziom wykonania zadań- przedszkole tradycyjne

Nr zadania	Średnia liczba punktów/ poziom wykonania zadania ⁹⁴	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej			staż pracy nauczyciela				kwalifikacje dodatkowe	
		6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	11-20	powyżej 20	Tak	nie
F1	1,81 pkt. 60,3% poziom średni	1,56 pkt. 52,0% poziom średni	1,78 pkt. 59,3% poziom średni	1,93 pkt. 64,3% poziom średni	2,45 pkt. 81,7% poziom wysoki	1,20 pkt. 40,0% poziom niski	1,69 pkt. 56,3% poziom średni	2,03 pkt. 67,7% poziom średni	1,91 pkt. 63,7% poziom średni	1,46 pkt. 48,7% poziom niski	1,93 pkt. 64,3% poziom średni	1,75 pkt. 58,3% poziom średni	1,89 pkt. 63,0% poziom średni	1,80 pkt. 60,0% poziom średni
F2	2,23 pkt. 74,3% poziom średni	2,16 pkt. 72,0% poziom średni	2,36 pkt. 78,7% poziom średni	2,20 pkt. 73,3% poziom średni	2,67 pkt. 89,0% poziom wysoki	1,50 pkt. 50,0% poziom średni	2,17 pkt. 72,3% poziom średni	2,50 pkt. 83,3% poziom wysoki	2,57 pkt. 85,7% poziom wysoki	1,62 pkt. 54,0% poziom średni	2,33 pkt. 77,7% poziom wysoki	2,00 pkt. 66,7% poziom średni	2,32 pkt. 78,3% poziom wysoki	2,00 pkt. 66,7% poziom średni
F3	2,84 pkt. 71,0% poziom średni	2,38 pkt. 59,5% poziom średni	2,78 pkt. 69,5% poziom średni	2,67 pkt. 66,8% poziom średni	3,67 pkt. 91,8% poziom wysoki	3,00 pkt. 75,0% poziom wysoki	2,41 pkt. 60,3% poziom średni	3,24 pkt. 81,0% poziom wysoki	2,91 pkt. 72,8% poziom średni	2,00 pkt. 50,0% poziom średni	3 47 pkt. 86,8% poziom wysoki	2,75 pkt. 68,8% poziom średni	3,22 pkt. 80,5% poziom wysoki	2,79 pkt. 69,8% poziom średni
F4	3,23 pkt.	2,81 pkt.	3,44 pkt.	2,80 pkt.	3,82 pkt.	3,60 pkt.	2,88 pkt.	3,52 pkt.	3,15 pkt.	3,00 pkt.	3,73 pkt.	3,00 pkt.	3,11 pkt.	3,25 pkt.

⁹⁴ Poziom wykonania zadania określono wg skali

100%	POZIOM BARDZO WYSOKI
99 – 75%	POZIOM WYSOKI
74 – 50%	POZIOM ŚREDNI
49 – 25%	POZIOM NISKI
24 - 0%	POZIOM BARDZO NISKI

	80,8% poziom wysoki	70,3% poziom średni	86,% poziom wysoki	70,0% poziom średni	95,5% poziom wysoki	90,% poziom wysoki	72,0% poziom średni	88,0% poziom wysoki	78,8% poziom wysoki	75,0% poziom wysoki	93,3% poziom wysoki	75,0% poziom wysoki	77,8% poziom wysoki	81,3% poziom wysoki
F5	3,20 pkt. 80,0% poziom wysoki	3,25 pkt. 81,3% poziom wysoki	3,22 pkt. 80,5% poziom wysoki	2,87 pkt. 71,8% poziom średni	3,68 pkt. 92,0% poziom wysoki	3,60 pkt. 90,0% poziom wysoki	2,78 pkt. 69,5% poziom średni	3,55 pkt. 88,8% poziom wysoki	3,32 pkt. 83,% poziom wysoki	2,62 pkt. 65,5% poziom średni	3,27 pkt. 81,8% poziom wysoki	3,50 pkt. 87,5% poziom wysoki	3,56 pkt. 89,0% poziom wysoki	3,15 pkt. 78,8% poziom wysoki
F6	0,42 pkt. 42,0% poziom niski	0, 22 pkt. 22,0% poziom bardzo niski	0,39 pkt. 39,0% poziom niski	0,37 pkt. 37,0% poziom niski	0,81 pkt. 81,0% poziom wysoki	0,50 pkt. 50,0% poziom średni	0,28 pkt. 28,0% poziom niski	0,55 pkt. 55,0% poziom średni	0,29 pkt. 29,0% poziom niski	0,19 pkt. 19,0% poziom bardzo niski	0,87 pkt. 87,0% poziom wysoki	0,50 pkt. 50,0% poziom średni	0,22 pkt. 22,0% poziom bardzo niski	0,45 pkt. 45,0% poziom niski
F7	0,77 pkt. 77,0 % poziom wysoki	0,69 pkt. 69,0 % poziom średni	0,78 pkt. 78,0 % poziom wysoki	0,87 pkt. 87,0 % poziom wysoki	0,89 pkt. 89,0 % poziom wysoki	0,70 pkt. 70,0 % poziom średni	0,77 pkt. 77,0 % poziom wysoki	0,80 pkt. 80,0 % poziom wysoki	0,85 pkt. 85,0 % poziom wysoki	0,85 pkt. 85,0 % poziom wysoki	0,63 pkt. 63,0 % poziom średni	0,63 pkt. 63,0 % poziom średni	0,78 pkt. 78,0 % poziom wysoki	0,78 pkt. 78,0 % poziom wysoki

Badana grupa dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym uzyskała średnią liczbę punktów 14,82⁹⁵, czyli 59,3% maksymalnej punktacji, co świadczy o średnim poziomie opanowania umiejętności matematycznych w zakresie znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku.

Wyższą średnią liczbę punktów uzyskali chłopcy – 15,4 (w grupie dziewczynek średnia wyniosła 14,2 punktów).

Z tabeli nr 24 wynika, że najłatwiejsze dla badanej grupy dzieci okazało się ćwiczenie dotyczące rozróżniania pór roku (zadanie F4). 40 badanych dzieci (57,1%) potrafi przyporządkować porę roku do właściwego obrazka. Najłatwiejsza do rozpoznania okazała się zima – 70 poprawnych wskazań (100%), a najtrudniejsza wiosna – 45 poprawnych wskazań (64,3%). Między ilością poprawnych wskazań lata i jesieni nie stwierdzono istotnych różnic.

Równie wysokie wyniki uzyskała badana grupa dzieci podczas porządkowania pór roku we właściwej kolejności (zadanie F5). Jest to bardzo pozytywne zjawisko, które świadczy to o tym, że dzieci nie tylko pasywnie znają nazwy pór roku, czyli wymieniają ich nazwy, ale także rozumieją je aktywnie. 47 badanych przedszkolaków (67,1%) uporządkowało w chronologicznym porządku obrazki przedstawiające poszczególne pory roku. Podczas ustalania kolejności najmniej błędów dotyczyło zimy i jesieni.

Zdecydowanie na najniższym poziomie badana grupa dzieci wykazała się znajomością nazw miesięcy (zadanie F6). Tylko 23 z badanych (32,9%) potrafi nazwać miesiące z zachowaniem właściwej kolejności. Dzieci wymieniały nazwy wielu miesięcy, ale nie znały i nie rozumiały ich kolejności. Szczególne trudności z tym zadaniem miały sześciolatnie dziewczynki (bardzo niski poziom wykonania).

Niepokoici również niski poziom znajomości miesięcy, który zdiagnozowano wśród siedmioletnich dziewczynek. Jednocześnie należy wyróżnić grupę siedmioletnich chłopców, którzy na wysokim poziomie znają nazwy miesięcy i ich kolejność.

Otrzymane wyniki badań wskazują, że umiejętności orientacji w czasie dzieci nabywają wraz z trwaniem edukacji przedszkolnej. Najwyższe rezultaty uzyskano w grupie

⁹⁵ Średnia arytmetyczna obliczona wg wzoru:
$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

badanych, którzy chodzili do przedszkola przez cztery lata (większość zadań wykonanych na poziomie wysokim).

Tabela nr 25 Poziom kompetencji dzieci w zakresie znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku - przedszkole tradycyjne (zestawienie procentowe)

Poziom kompetencji	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej			staż pracy nauczyciela				kwalifikacje dodatkowe	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	11-20	powyżej 20	tak	nie
bardzo wysoki	6,3	5,6	6,7	23,8	-	6,3	18,2	11,8	7,7	13,3	12,5	11,1	11,5
wysoki	31,3	55,6	20,0	42,9	20,0	28,1	51,5	41,2	23,1	53,3	25,0	22,2	41,0
średni	37,5	16,7	46,7	19,0	60,0	34,4	18,2	35,3	15,4	20,0	37,5	55,6	24,6
niski	25,0	16,7	20,0	14,3	20,0	25,0	12,1	11,8	38,5	13,3	25,0	11,1	19,7
bardzo - niski	-	5,6	6,7	-	-	6,3	-	-	15,4	0-	-	-	3,3

Wyniki przedstawione w tabeli nr 25 wskazują, że większość badanych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym prezentuje wysoki i średni poziom kompetencji matematycznych w zakresie orientacji w czasie.

Poziom bardzo wysoki prezentują w większości siedmioletni chłopcy (23,8%), którzy przeważnie najdłużej uczęszczali do przedszkola (przez cztery lata).

Natomiast negatywnie należy ocenić sytuację w grupie siedmioletnich dziewczynek, z których 16,7% prezentuje niski, a 5,6% bardzo niski poziom analizowanej kompetencji. Dodatkowo niepokojącym jest fakt, że poziom najniższy dotyczy dzieci po trzech latach edukacji przedszkolnej.

W oparciu o wyliczony wskaźnik istotności statystycznej stwierdzono różnicowanie poziomu kompetencji matematycznych badanych dzieci w zakresie znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku przez czas trwania edukacji przedszkolnej⁹⁶. Długość uczęszczania do przedszkola wpływa proporcjonalnie na orientację dzieci w stosunkach czasowych. Siła tego związku jest słaba⁹⁷.

Na podstawie analizy statystycznej zebranych wyników nie zaobserwowano natomiast, aby czynnikami różnicującymi poziom analizowanych kompetencji

⁹⁶ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,018$

⁹⁷ Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,282

matematycznych były płeć i wiek dzieci⁹⁸ oraz staż pracy nauczyciela i jego kwalifikacje dodatkowe.⁹⁹

Podsumowanie i dyskusja

Z przeprowadzonych badań wynika, że w zakresie orientacji w czasie nieco wyższe wyniki uzyskały dzieci z przedszkoli tradycyjnych (średnia liczba punktów 14,82; czyli 74,1% maksymalnej punktacji) niż z przedszkoli Montessori (średnia liczba uzyskanych punktów 14,06; czyli 70,3% maksymalnej punktacji). W obu grupach najwyższy uzyskany wynik to 20 punktów (w przedszkolach Montessori częstość tylko 2,9%; w przedszkolach tradycyjnych częstość 11,4%). Natomiast najniższy uzyskany wynik w grupie Montessori to 0 punktów (częstość – 2,9%), a w grupie tradycyjnej - 4 punkty (częstość – 1,4%)¹⁰⁰.

Uzyskane wyniki dowodzą, że dzieci z przedszkoli tradycyjnych zdecydowanie lepiej znają kolejność pór dnia. 64,3% badanych bezbłędnie uporządkowało podane obrazki ilustrujące rano, południe i wieczór zachowując ich prawidłową kolejność (zadanie F1). W placówkach Montessori ten odsetek wynosi 35,7%. Należy zwrócić także uwagę, że dla 28,6% badanych z tej grupy zadanie okazało się zdecydowanie za trudne i dzieci nie uzyskały żadnego punktu.

Podobne wnioski formułuje U. Oszwa (2006), która zauważa, że dzieci mają trudności z powiązaniem konkretnej aktywności z odpowiednią nazwą pory dnia. Autorka wyjaśnia, iż „jest to jednak prawidłowość rozwojowa, związana z myśleniem konkretnym” (Oszwa, 2006, s.28). Odmienne stanowisko prezentuje natomiast J. Kłysewicz (2008), która na podstawie badań własnych zauważa, jednak, że dzieci skutecznie podejmują próby odwoływania się do rzeczywistych doświadczeń przy określaniu pór dnia. Ich chronologiczne uporządkowanie było - zdaniem autorki - łatwiejsze ze względu na skojarzenia z porami posiłków.

Kolejne ćwiczenie - ułożenie historyjki obrazkowej z zachowaniem logicznej chronologii (zadanie F7) okazało się łatwiejsze dla dzieci z placówek tradycyjnych. Aż 31,4% dzieci z przedszkoli Montessori zupełnie nie poradziło sobie z tym zadaniem. Trudności w ułożeniu historyjki obrazkowej wynikały z braku umiejętności dostrzegania ważnych

⁹⁸ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; płeć dziecka $p = 0,302$; wiek dziecka $p = 0,119$;

⁹⁹ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,944$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,973$

¹⁰⁰ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

szczegółów na rysunkach. Spostrzeganie dzieci było dość pobieżne i ogólnikowe (np. nie zwróciły uwagi, że jeśli za oknem siedzi ptaszek, to obrazek nie może przedstawiać nocy).

Dzieci z przedszkoli Montessori w wyższym stopniu wykazały się znajomością nazw dni tygodnia (zadanie F3). Ich przewaga dotyczyła szczególnie prawidłowego posługiwania się terminami „dziś”, „jutro” i „wczoraj”.

Dzieci montessoriańskie wykazały się również zdecydowanie lepszą znajomością nazw miesięcy (zadanie F6). Połowa z nich potrafiła bezbłędnie i z zachowaniem właściwej kolejności wymienić wszystkie dwanaście miesięcy. W przedszkolach tradycyjnych taką umiejętność wykazało się 32,9% badanych dzieci.

Oba uzyskane wyniki są nieco wyższe od rezultatów, jakie zdiagnozowała w swych badaniach U. Oszwa (2006). Autorka podaje, że „25% dzieci potrafiło wymienić przynajmniej 6 nazw miesięcy, niektóre czyniły to nawet we właściwej kolejności” (Oszwa, 2006, s.28).

Badane grupy dzieci dobrze wymieniały nazwy pór roku, ale nie potrafiły rozpoznać ich cech charakterystycznych przedstawionych na rysunkach. Dotyczy to przede wszystkim wiosny i lata. Zdecydowanie łatwiejsze było dla badanych dzieci rozpoznanie i nazwanie zimy oraz jesieni. Ponadto często zdarzało się, że dzieci potrafiły prawidłowo wymienić nazwy pór roku, lecz nie umiały rozpoznać ich na obrazkach. Świadczy to o dobrym pamięciowym utrwaleniu pojęć określających czas, przy jednoczesnym braku umiejętności zastosowania tej wiedzy w praktycznym działaniu.

Uzyskane wyniki są zbieżne z rezultatami badań U. Oszwy (2006), które wskazują, że „około 70% badanych zna pory roku i potrafi je wymienić w kolejności. Pozostałe 30% wymienia 3 z 4 pór lub tylko zimę i lato, bądź nie zna ich poprawnej kolejności” (Oszwa, 2006, s.28).

Uzyskane wyniki (średnia liczba punktów 14,44, czyli 57,8% maksymalnej punktacji) pozwalają wnioskować o średnim poziomie opanowania przez dzieci kończące edukację przedszkolną umiejętności dotyczących orientacji w czasie.

Przeważająca część dzieci (54,3%) uzyskała 18 - 12 punktów, co zgodnie z przyjętą skalą wskazuje na średni poziom opanowania analizowanej kompetencji matematycznej. Żadne z badanych dzieci nie wykonało poprawnie wszystkich ćwiczeń. Należy jednak pamiętać, że orientacja w czasie jest umiejętnością, „która kształtuje się na bazie doświadczeń dziecka, dzięki którym dostrzega ono zmiany zachodzące w przyrodzie, zauważa różnice między porami dnia, odróżnia dzień od nocy, nabiera rozeznania, że czas upływa oraz, że można go mierzyć. Te umiejętności wymagają zaangażowania wielu funkcji: orientacyjnych

(w bliższym i dalszym otoczeniu), poznawczych (np. pamięci, uwagi, spostrzegania), językowych (przyswojenie nazw określeń związanych z pomiarem czasu) oraz wiedzy (np. że rok ma 12 miesięcy, a tydzień 7 dni), powiązanej z posługiwaniem się liczbami i wykonywaniem działań arytmetycznych (ile czasu upłynęło, ile pozostało). Jest to zatem umiejętność bardzo złożona, wieloaspektowa i dlatego jej opanowanie wymaga cierpliwego i starannego modelowania z wykorzystaniem okoliczności stwarzających do tego sposobność” (Oszwa, 2006, s.36). Jednym z praktycznych rozwiązań jest często stosowana w edukacji przedszkolnej metoda „Rytmiczna organizacja czasu” opracowana przez E. Gruszczyk-Kolczyńską (2009).

7. Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori - wskaźnik ogólny

Opracowany test osiągnięć szkolnych, który wykonywały dzieci kończące edukację przedszkolną zawierał zadania dotyczące wszystkich sześciu kompetencji matematycznych wskazanych w Podstawie Programowej Wychowania Przedszkolnego. Pozwolił on na uzyskanie wskaźników szczegółowych (omówionych w poprzednich podrozdziałach) oraz jednego wskaźnika ogólnego, który otrzymano poprzez zsumowanie punktów, jakie zdobyło dziecko za wykonanie wszystkich zadań z testu¹⁰¹.

Grupa dzieci z przedszkoli Montessori

¹⁰¹ Przyjęto następującą punktację poszczególnych kompetencji:

- I. Liczenie obiektów i rozróżnianie błędnego liczenia od poprawnego – 15 punktów;
- II. Wyznaczanie przez dzieci wyniku dodawania i odejmowania, przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych – 25 punktów;
- III. Ustalanie przez dzieci równoliczności dwóch zbiorów; posługiwanie się liczebnikami porządkowymi – 23 punkty;
- IV. Rozróżnianie przez dzieci lewej i prawej strony, określanie kierunków i ustalanie położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów - 12 punktów;
- V. Orientacja dziecka w zakresie pomiaru długości oraz znajomość prostych sposobów mierzenia: krokami, stopą za stopą – 8 punktów;
- VI. Znajomość przez dzieci stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku – 25 punktów.

Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną określano według skali:

100%	108 pkt.	POZIOM BARDZO WYSOKI
99 – 75 %	107 – 81 pkt.	POZIOM WYSOKI
74 – 50%	80 – 54 pkt.	POZIOM ŚREDNI
49 – 25 %	53 – 27 pkt.	POZIOM NISKI
24 - 0 %	poniżej 27 pkt.	POZIOM BARDZO NISKI

Uzyskane wyniki (średnia liczba punktów 84,07¹⁰², czyli 77,8% maksymalnej punktacji) pozwalają wnioskować o wysokim poziomie opanowania kompetencji matematycznych przez dzieci kończące edukację przedszkolną w systemie Montessori. Najniższy uzyskany wynik wynosi 24 punkty (częstość 1,4%), a najwyższy 107,5 punktów (częstość 1,4%)¹⁰³.

46 badanych dzieci (65,7%) uzyskało liczbę punktów z przedziału 107–81, co zgodnie z przyjętą skalą świadczy o wysokim poziomie opanowania kompetencji matematycznych. Wyniki 22 dzieci (31,4%) mieszczą się w przedziale 80–54 punktów, czyli wskazują na średni poziom opanowania analizowanych kompetencji. Uzyskano zaledwie po jednym wyniku (1,4%) świadczącym o niskim oraz bardzo niskim poziomie opanowania kompetencji matematycznych.

Badana grupa dzieci najwyższe umiejętności wykazała w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego (średnia 14,26 punktów, czyli - 95,0% maksymalnej punktacji), ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi (średnia 20,27, czyli 88,1% maksymalnej punktacji) oraz rozróżniania lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów (średnia 10,27, czyli 85,6% maksymalnej punktacji). Zdecydowanie najslabiej dzieci montessoriańskie poradziły sobie z zadaniami dotyczącymi orientacji w czasie (średnia 14,06, czyli 56,2% maksymalnej punktacji).

Nie wystąpiło statystycznie istotne różnicowanie poziomu umiejętności matematycznych dzieci przez ich wiek, płeć, czas trwania edukacji przedszkolnej oraz wybrane cechy demograficzne nauczyciela – staż pracy zawodowej i posiadanie kwalifikacji dodatkowych¹⁰⁴.

¹⁰² Średnia arytmetyczna obliczona wg wzoru:
$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

¹⁰³ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

¹⁰⁴ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; płeć dziecka $p = 0,064$; wiek dziecka $p = 0,096$, czas trwania edukacji przedszkolnej $p = 0,105$; staż pracy $p = 0,268$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,315$

Grupa dzieci z przedszkoli tradycyjnych

Uzyskane wyniki (średnia liczba punktów 87,03¹⁰⁵, czyli 80,6% maksymalnej punktacji) pozwalają wnioskować o wysokim poziomie opanowania kompetencji matematycznych przez dzieci kończące edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym. Najniższy uzyskany wynik to 45,5 punktów (częstość 1,4%), a najwyższy 107,5 punktów (częstość 1,4%)¹⁰⁶.

51 badanych dzieci (72,8%) uzyskało liczbę punktów w przedziale 107-81, co zgodnie z przyjętą skalą świadczy o wysokim poziomie opanowania kompetencji matematycznych. Wyniki osiągnięte przez 18 dzieci (25,7%) mieszczą się w przedziale 80-54 punkty i wskazują na średni poziom. Uzyskano zaledwie jeden wynik (1,4%) świadczący o poziomie niskim. Żadne z badanych dzieci nie prezentowało bardzo niskiego poziomu opanowania kompetencji matematycznych.

Badana grupa dzieci najwyższe umiejętności wykazała w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego (średnia 14,15 punktów, czyli 94,3% maksymalnej punktacji), rozróżniania lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów (średnia 10,88, czyli 90,6% maksymalnej punktacji) oraz ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi (średnia 20,63, czyli 89,7% maksymalnej punktacji). Zdecydowanie najsłabiej badane dzieci poradziły sobie z zadaniami dotyczącymi orientacji w czasie (średnia 14,82, czyli 59,3% maksymalnej punktacji).

Na podstawie zebranych danych odnotowano różnicowanie poziomu umiejętności matematycznych dzieci przez ich wiek i czas trwania edukacji przedszkolnej¹⁰⁷. Są to zależności wprost proporcjonalne o umiarkowanej sile¹⁰⁸.

Natomiast płeć dzieci oraz staż pracy nauczyciela i jego dodatkowe kwalifikacje nie okazały się czynnikami różnicującymi poziom kompetencji matematycznych.

Wnioski końcowe

1. Wyższy poziom kompetencji matematycznych wykazała grupa dzieci z przedszkoli tradycyjnych (średnia liczba punktów 87,03, czyli 80,6% maksymalnej

¹⁰⁵ Średnia arytmetyczna obliczona wg wzoru:
$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

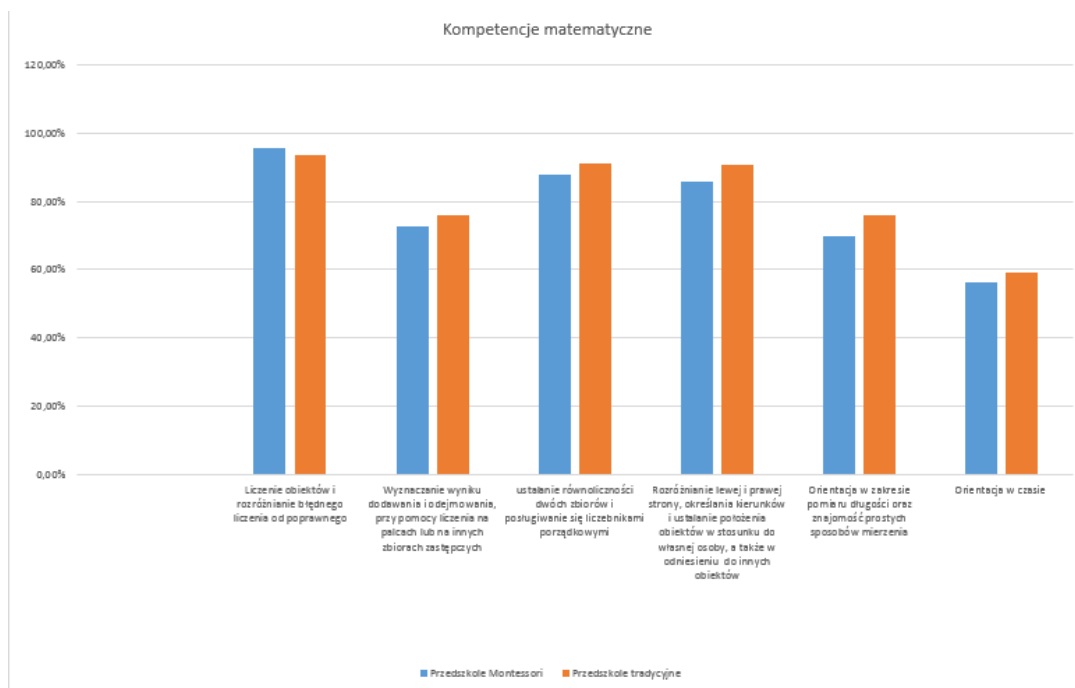
¹⁰⁶ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

¹⁰⁷ Wskaźniki istotności statystycznej wiek dziecka $p = 0,036$; czas trwania edukacji przedszkolnej $p = 0,001$

¹⁰⁸ Wskaźniki korelacji r Pearsona odpowiednio 0,351 i 0,376

punktacji) aniżeli z przedszkoli Montessori (średnia liczba punktów 84,07, czyli 77,8% maksymalnej punktacji).

Wykres nr 1 Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori i systemie tradycyjnym



2. Z wykresu nr 1 wynika, że w większości analizowanych kompetencji wyższe wyniki uzyskano w placówkach tradycyjnych.

Jedynie w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego lepsze wyniki uzyskano w placówkach Montessori.

3. Zdecydowanie najlepsze wyniki uzyskały badane dzieci z obu rodzajów placówek w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego (94,6% maksymalnej punktacji), ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi (89,1% maksymalnej punktacji) oraz orientacji przestrzennej (88,3% maksymalnej wartości).

Zbieżne wyniki empiryczne uzyskała D. Waloszek, która zauważa, że „umiejętność liczenia opanowana jest najlepiej z badanych umiejętności matematycznych” (Waloszek, 1993,s.119). Autorka wyjaśnia to „naturalną chęcią dziecka do przeliczania, dość wysokim poziomem pracy nauczycieli, ćwiczeniem tej umiejętności przez rodziców w domu” (Waloszek, 1993, s.119).

4. Nieco niższe wyniki uzyskano w zakresie umiejętności dokonywania pomiaru długości - (72,8% maksymalnej punktacji).

Jak zauważają J. Filip i T. Rams (2000) aspekt miarowy liczby jest najtrudniejszym dla dziecka aspektem liczby naturalnej i zgodnie z obserwacjami J. Piageta „kształtuje się u dzieci około 6 miesięcy później niż aspekt kardynalny i porządkowy” (Filip i Rams, 2000, s.116).

5. Najslabiej zostały ocenione umiejętności dzieci dotyczące orientacji w czasie (57,6% maksymalnej punktacji).

Również badania J. Kłysewicz (2008) wskazują, że dzieci kończące edukację przedszkolną mają najwięcej problemów z orientacją w czasie i znajomością kalendarza. Autorka zauważa, że „nawet jeśli potrafiły one wymienić nazwy pór roku, miesięcy czy pór dnia, to dla większości badanych zadania polegające na chronologicznym ich uporządkowaniu okazały się nie do pokonania. Ponad 50% badanych nie potrafiło wymienić pory roku następującej po porze wskazanej przez badającego a sporadycznie, bo tylko 10% uczniów, wykonywało prawidłowo podobne polecenia odnośnie miesięcy”(Kłysewicz, 2008, s.23). Uzyskane wyniki są zbieżne również z rezultatami badań U. Oszwy (2006), która wyjaśnia, że orientacja w czasie oraz znajomość określeń służących do jego pomiaru wymaga wyższego poziomu rozwoju poznawczego. Odwołuje się bowiem „do pojęć abstrakcyjnych i zjawisk dopiero przez dziecko 6-letnie poznawanych” (Oszwa, 2006, s.14). J. Kłysewicz dodaje, że „może to być spowodowane rzadkim stosowaniem tych pojęć przez nauczyciela, a także faktem, że czas jest pojęciem względnym i raz może płynąć wolniej, a raz szybciej, w zależności od okoliczności” (Kłysewicz, 2008, s.25).

6. Na podstawie zebranych danych odnotowano różnice między dziewczynkami a chłopcami. Średnia liczba punktów za cały test uzyskanych przez chłopców wynosi 87,7 i jest wyraźnie wyższa od średniej uzyskanej przez dziewczynki - 83,4 punktów. We wszystkich badanych aspektach edukacji matematycznej chłopcy wykazali wyższe umiejętności niż dziewczynki. Największe różnice dotyczą znajomości stałego następstwa jednostek czasu, a także wyznaczania przez dzieci wyniku dodawania i odejmowania. Problem różnicowania kształtowania się uzdolnień matematycznych przez płeć podejmuje K. Kotlarski zastanawiając się „czy płeć należy tu interpretować jako fakt biologiczny, czy jako społeczny” (Kotlarski, 1990, s.150). Autor jest bliższy tej drugiej interpretacji, dostrzegając, że chłopcy są bardziej motywowani, zachęceni do interesowania się matematyką, której znajomość zapewnia zdobycie w przyszłości dobrze wynagradzanego

zawodu związanego z wykształceniem technicznym. Podobne stanowisko zajmuje L. Kopciewicz wskazując, iż „niewielkie różnice szkolnych osiągnięć matematycznych dziewcząt względem chłopców generują różnice w przebiegu przyszłych karier, wskazując, że matematyka naprawdę nie jest dla dziewcząt” (Kopciewicz, 2013, s 16).

7. W obu badanych grupach dzieci przedszkolnych wystąpiło bardzo zróżnicowane tempo pracy. Chłopcy pracowali szybciej, choć mniej dokładnie (np. podczas kolorowania). Wykazywali się jednak pewnym sprytem i pomysłowością (np. bez liczenia, a poprzez analogię łączyli dwa ostatnie przykłady w zadaniach). Takie zachowania należy interpretować jako przejawy uzdolnień matematycznych

8. Przeprowadzone badania wskazują na istotny dodatni związek między kompetencjami matematycznymi a wiekiem dzieci i czasem trwania edukacji przedszkolnej¹⁰⁹.

Podobne wnioski wynikają z badań U. Oszwy (2006), w których ogólne niższe wyniki uzyskały dzieci uczęszczające do przedszkola tylko przez rok w porównaniu z rówieśnikami, których edukacja przedszkolna trwała dłużej - 2-4 lata.

Również A. Jacewicz w oparciu o przeprowadzone badania stwierdza, że „dzieci uczęszczające do przedszkola od 3 roku życia wykazują się dobrą i bardzo dobrą wiedzą matematyczną, na średnim lub najwyższym poziomie umiejętności matematycznych. Zdecydowanie gorzej funkcjonują w tej dziedzinie dzieci uczęszczające do przedszkola tylko jeden rok” (Jacewicz, 2007, s.187).

Nieco zaskakujące mogą zatem wydać się wyniki badań E. Putkiewicz i Z. Murawskiej (za: Białecki, 2007), z których wynika, że przedszkole w niewielkim stopniu przyczynia się do wzrostu poziomu umiejętności matematycznych i perspektyw dalszej edukacji. Wspomniane autorki badań piszą dość kontrowersyjnie, że „ma ono mniejsze znaczenie niż status społeczny rodziny czy wyposażenie domu w dobra kultury” (Białecki, 2007, s.251).

9. Przeprowadzona analiza wykazała, że zmienne dotyczące nauczyciela, czyli staż pracy zawodowej oraz kwalifikacje dodatkowe nie różnicują w istotnym stopniu poziomu kompetencji matematycznych badanych dzieci (podobnie Oszwa 2006).

10. **Uzyskany średni wynik - 85,5 (czyli 79,16% maksymalnej punktacji) pozwala sformułować wniosek końcowy, że dzieci kończące edukację przedszkolną zarówno w systemie tradycyjnym, jak i systemie Montessori prezentują wysoki poziom**

¹⁰⁹ Wskaźniki istotności statystycznej odpowiednio wiek dzieci $p = 0,003$; czas trwania edukacji przedszkolnej $p = 0,001$

kompetencji matematycznych wskazanych w Podstawie Programowej Wychowania Przedszkolnego.

Przeprowadzona analiza badań potwierdziła zatem istnienie u dzieci kończących edukację przedszkolną wcześniej opanowanych umiejętności matematycznych nazwanych przez E. Gruszczyk-Kolczyńską (1989) matematycznymi intuicjami.

Rozdział VII. Poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w ocenie nauczycieli w świetle badań własnych

Podstawa Programowa Wychowania Przedszkolnego określa, iż „celem wychowania przedszkolnego jest wspomaganie dzieci w rozwijaniu uzdolnień oraz kształtowanie czynności intelektualnych potrzebnych im w codziennych sytuacjach i w dalszej edukacji” (Dziennik Ustaw z dnia 15 stycznia 2009 r. Nr4, poz. 17). Pobudzanie i kierowanie rozwojem dziecka wymaga - jak zauważa K. Lubomirska „od nauczycieli dobrej orientacji w jego możliwościach. Jak wiadomo, rozwój jednostki ludzkiej nie przebiega w sposób jednolity. Obserwuje się różnice indywidualne pomiędzy poszczególnymi dziećmi w dojrzewaniu różnych sfer osobowości” (Lubomirska, 1997, s.136).

Dlatego tak ważne jest diagnozowanie zindywidualizowanych możliwości i potrzeb dzieci także w zakresie edukacji matematycznej. Pomaga to w projektowaniu dalszych działań edukacyjnych, profilaktycznych i korekcyjno-wyrównawczych.

W celu zbadania, jak nauczyciele oceniają poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną przygotowano dwie wersje ankiety.

Pierwszą wypełnili nauczyciele odnośnie każdego dziecka, które wykonało zadania z testu w przedszkolach tradycyjnych i w przedszkolach Montessori (załącznik 4). Nauczyciele z każdej grupy dokonali oceny poziomu kompetencji matematycznych 70 dzieci, które kończą edukację przedszkolną (dla przypomnienia w przedszkolach Montessori było to 35 dziewczynek i 35 chłopców, a w przedszkolach tradycyjnych: 34 dziewczynki i 36 chłopców).

Druga wersja ankiety miała charakter globalny i dotyczyła ogólnej oceny kompetencji matematycznych całej grupy dzieci kończących edukację przedszkolną (załącznik 5). Wypełnili ją nauczyciele z kolejnych przedszkoli tradycyjnych z Poznania i okolic oraz z placówek Montessori z całej Polski. Badani nauczyciele oceniali poziom kompetencji dzieci z czterech grup: dziewczynki 6-i 7-letnie oraz chłopcy 6- i 7-letni. Grupę badawczą stanowiło 50 nauczycieli z przedszkoli Montessori i 50 nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych.

Ocenie nauczycieli poddany został poziom opanowania przez dzieci kompetencji matematycznych, uwzględnionych w obowiązującej Podstawie Programowej Wychowania Przedszkolnego, czyli: liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego, wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania przy pomocy liczenia na palcach lub innych

zbiorach zastępczych, ustalania równoliczności zbiorów, orientacji przestrzennej, umiejętności mierzenia długości oraz orientacji w czasie i znajomości określeń służących do jego pomiaru.

W obliczeniach statystycznych zastosowano testy korelacji Chi Kwadrat Pearsona.

1. Poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego w ocenie nauczycieli

Przyjęto następującą skalę oceny poziomu kompetencji:

bardzo wysoki - dziecko bezbłędnie, samodzielnie: tworzy zbiór 10- elementowy; wyodrębnia zbiory o podanej liczebności; przelicza elementy zbiorów w zakresie 10 i łączy liczbę z jej symbolem graficznym; tworzy zbiory o podanej liczebności; odróżnia liczenie poprawne od błędnego, a ponadto samodzielnie przelicza powyżej 10;

wysoki - dziecko po objaśnieniach nauczyciela bezbłędnie: tworzy zbiór 10- elementowy; wyodrębnia zbiory o podanej liczebności; przelicza elementy zbiorów w zakresie 10 i łączy liczbę z jej symbolem graficznym; tworzy zbiory o podanej liczebności; odróżnia liczenie poprawne od błędnego;

średni - dziecko mimo objaśnień nauczyciela popełnia pomyłki podczas: tworzenia zbioru 10- elementowego; wyodrębniania zbiorów o podanej liczebności; przeliczania elementów zbiorów w zakresie 10 i łączenia liczby jej symbolem graficznym; tworzenia zbiorów o podanej liczebności; odróżniania liczenia poprawnego od błędnego;

niski - dziecko po objaśnieniach i tylko z pomocą nauczyciela: tworzy zbiór 10- elementowy; wyodrębnia niektóre zbiory o podanej liczebności (w zależności od położenia elementów); przelicza elementy zbiorów w zakresie 10 i łączy liczbę z jej symbolem graficznym, (ma problem z liczbą zero); tworzy zbiory o podanej liczebności; nie odróżnia liczenia poprawnego od błędnego;

bardzo niski - dziecko po objaśnieniach i mimo pomocy nauczyciela ma poważne problemy z: tworzeniem zbioru 10- elementowego; wyodrębnianiem zbiorów o podanej liczebności; przeliczaniem elementów zbiorów w zakresie 10 i łączeniem liczby z jej symbolem graficznym, (nie rozumie liczby zero); tworzeniem zbiorów o podanej liczebności; ponadto nie odróżnia liczenia poprawnego od błędnego

Grupa nauczycieli z przedszkoli Montessori – ocena indywidualna

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 26.

Tabela nr 26 Ocena indywidualna poziomu kompetencji dzieci w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego – przedszkole Montessori (zestawienie procentowe)¹¹⁰

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej				staż pracy nauczyciela		kwalifikacje dodatkowe nauczyciela	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	1 rok	2 lata	3 lata	4 lata	0–5	6-10	tak	nie
poziom bardzo wysoki	35,3	38,9	15,4	26,1	100	25,0	48,8	41,7	46,7	30,0	45,2	46,4
poziom wysoki	35,3	44,4	46,2	65,2	-	75,0	26,8	41,7	31,7	60,0	38,1	28,6
poziom średni	29,4	16,7	38,4	8,7	-	-	24,4	16,7	21,7	10,0	16,7	25,0
poziom niski	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
poziom bardzo niski	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

¹¹⁰ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Z tabeli nr 26 wynika, że w ocenie nauczycieli większość dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori prezentuje wysoki poziom umiejętności liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego.

Nieco zaskakującym jest fakt, że zdaniem nauczycieli poziom bardzo wysoki analizowanych umiejętności prezentują przede wszystkim dziewczynki, zarówno sześciolatnie (35,3%), jak i siedmioletnie (38,9%).

Zebrane wyniki badań dowodzą, że w ocenie nauczycieli żadne z badanych dzieci nie prezentuje niskiego i bardzo niskiego poziomu opanowania analizowanej kompetencji matematycznej.

Poziom bardzo wysoki zdaniem nauczycieli prezentują głównie dzieci, które uczęszczają do przedszkola przez 3-4 lata. Równocześnie zastanawiający i niepokojący jest fakt, iż również tej grupy dzieci dotyczy najniższy ze zdiagnozowanych poziomów - średni.

Jednocześnie należy wyjaśnić, że wśród badanych dzieci było tylko jedno, które przez rok chodziło do przedszkola i dlatego jego wynik należy traktować jako mało znaczący.

Z analizy statystycznej wynika, że dokonanej przez nauczycieli oceny poziomu kompetencji dzieci w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego nie różnicuje płeć i wiek dziecka ani czas trwania edukacji przedszkolnej¹¹¹.

Czynnikami różnicującymi nie są także cechy funkcjonowania zawodowego nauczyciela, czyli staż pracy oraz posiadane kwalifikacje dodatkowe¹¹². Jednakże analiza szczegółowa wskazuje, że w grupie nauczycieli z krótszym stażem pracy (0-5 lat) najczęściej wskazywanym jest poziom bardzo wysoki (46,7%). Natomiast grupa nauczycieli ze dłuższym stażem (6-10 lat) okazała się bardziej wymagająca i ostrożniejsza w ocenie poziomu umiejętności dzieci (50% określiło je jako wysokie).

Grupa nauczycieli z przedszkoli Montessori – ocena globalna

Badani nauczyciele oceniali poziom kompetencji matematycznych w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego w odniesieniu do dzieci z czterech grup: dziewczynki 6- i 7-letnie oraz chłopcy 6- i 7-letni.

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 27.

¹¹¹ Wskaźnik istotności statystycznej $p > 0,05$; płeć dziecka $p = 0,219$; wiek dziecka $p = 0,978$; czas trwania edukacji przedszkolnej $p = 0,691$

¹¹² Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,852$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,708$

Tabela nr 27 Ocena globalna poziomu kompetencji dzieci w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego – przedszkole Montessori (zestawienie procentowe)¹¹³

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat
poziom bardzo wysoki	22,0	80,0	22,0	76,0
poziom wysoki	70,0	18,0	58,0	20,0
poziom średni	8,0	2,0	20,0	4,0
poziom niski	-	-	-	-
poziom bardzo niski	-	-	-	-

Badani nauczyciele wysoko ocenili kompetencje matematyczne dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori.

Jako bardzo wysokie nauczyciele uznali w większości kompetencje dzieci najstarszych: siedmioletnich dziewczynek (80,0%) i siedmioletnich chłopców (76,0%).

W grupie sześciolatków dominującym był poziom wysoki (70,0% dziewczynek i 58,0% chłopców).

Na poziomie średnim umiejętności liczenia i rozróżniania liczenia błędnego od poprawnego w ocenie nauczycieli opanowali przede wszystkim sześcioletni chłopcy. Niepokoić może jedynie dość wysoki odsetek tej grupy przedszkolaków (20%).

Żaden z badanych nauczycieli nie wskazał poziomu niskiego i bardzo niskiego. Nie zdiagnozowano różnic w ocenie poziomu kompetencji dziewczynek i chłopców. Natomiast bardzo istotnym z punktu widzenia praktyki pedagogicznej i polityki oświatowej powinien być wskazywany przez badanych nauczycieli wyraźnie wyższy poziom analizowanej kompetencji matematycznej prezentowany przez dzieci starsze - siedmioletnie.

Na podstawie analizy statystycznej ustalono, że staż pracy zawodowej nauczyciela i jego kwalifikacje dodatkowe nie różnicowały oceny poziomu analizowanej kompetencji dzieci¹¹⁴.

Grupa nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych – ocena indywidualna

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 28.

¹¹³ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

¹¹⁴ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,846$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,661$

Tabela nr 28 Ocena indywidualna poziomu kompetencji dzieci w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego – przedszkole tradycyjne (zestawienie procentowe)¹¹⁵

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej			staż pracy nauczyciela				kwalifikacje dodatkowe	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	2 lata	3 lata	4 lata	0–5	6-10	11-20	powyżej 20	tak	nie
poziom bardzo wysoki	13,3	15,8	15,4	26,1	50,0	9,7	28,6	26,1	15,0	12,5	27,3	42,9	15,9
poziom wysoki	46,7	73,7	46,2	56,5	50,0	54,8	60,0	73,9	55,5	68,8	72,7	28,6	60,3
poziom średni	33,3	-	30,8	8,7	-	22,6	5,7	-	5,0	12,5	-	14,3	15,9
poziom niski	6,7	5,3	7,7	8,7	-	12,9	2,9	-	20,0	6,3	-	14,3	6,3
poziom bardzo niski	-	5,3	-	-	-	-	2,9	-	5,0	-	-	-	1,6

¹¹⁵ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Z tabeli nr 28 wynika, że w ocenie nauczycieli dzieci kończące edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym prezentują zróżnicowany poziom umiejętności liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego.

Jednakże w każdej analizowanej grupie przedszkolaków przeważającym jest poziom wysoki. Natomiast poziom bardzo wysoki osiągnęli - zdaniem nauczycieli przede wszystkim siedmioletni chłopców (26,1%).

Nauczyciele wyżej ocenili kompetencje dzieci siedmioletnich (większy odsetek na poziomie bardzo wysokim i wysokim i odpowiednio mniejszy na poziomie średnim).

Bardzo negatywnie należy ocenić sytuację, że w grupie siedmioletnich dziewczynek są takie, których omawiane umiejętności matematyczne nauczyciele ocenili jako niskie (5,3%) oraz jako bardzo niskie (5,3%). Równie niepokojąca jest niska ocena poziomu kompetencji odnotowana w grupie siedmioletnich chłopców (8,7%).

Zebrane wyniki badań dowodzą, że w ocenie nauczycieli żadne z badanych dzieci nie prezentuje bardzo niskiego poziom opanowania analizowanej kompetencji matematycznej.

Zastanawiająca jest ocena umiejętności dzieci, które krótko – przez dwa lata uczęszczają do przedszkola. 50% z nich osiągnęło zdaniem nauczycieli poziom bardzo wysoki, a druga połowa poziom wysoki. Niepokoi z kolei fakt, że poziom niski i bardzo niski prezentują zdaniem nauczycieli dzieci z najdłuższym czasem edukacji przedszkolnej.

Z analizy statystycznej wynika, że dokonanej przez nauczycieli oceny poziomu kompetencji dzieci w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego nie różnicuje płeć i wiek dziecka oraz czas trwania edukacji przedszkolnej¹¹⁶.

Czynnikami różnicującymi nie są także cechy demograficzne nauczyciela, czyli staż pracy zawodowej i posiadane kwalifikacje dodatkowe¹¹⁷. Należy jednak zauważyć, że najbardziej zróżnicowane i zindywidualizowane są oceny nauczycieli z stażem pracy od 6 do 10 lat. Ta grupa pedagogów dostrzegła dzieci na wszystkich poziomach opanowania analizowanej kompetencji. Najczęściej również oceniła umiejętności dzieci jako niskie (20%) i jako jedyna wskazała poziom bardzo niski (5,0%). Natomiast w grupie nauczycieli z najkrótszym (0-5 lat) i najdłuższym (powyżej 20 lat) stażem pracy wskazywany jest tylko poziom wysoki oraz bardzo wysoki.

¹¹⁶ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; płeć dziecka $p = 0,649$; wiek $p = 0,195$; czas trwania edukacji przedszkolnej $p = 0,904$

¹¹⁷ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,227$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,615$

Jednocześnie trzeba zaznaczyć zdecydowaną nieproporcjonalność ilościową obu grup (tylko 9 nauczycieli posiada dodatkowe kwalifikacje), która nie pozwala na wnikliwą analizę, czy posiadanie przez nauczyciela dodatkowych uprawnień różnicuje jego ocenę poziomu kompetencji dzieci.

Grupa nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych – ocena globalna

Badani nauczyciele oceniali poziom kompetencji matematycznych w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego w odniesieniu do dzieci z czterech grup: dziewczynki 6- i 7-letnie oraz chłopcy 6- i 7-letni.

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 29.

Tabela nr 29 Ocena globalna poziomu kompetencji dzieci w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego – przedszkole tradycyjne (zestawienie procentowe)¹¹⁸

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat
poziom bardzo wysoki	16,0	38,0	16,0	46,0
poziom wysoki	60,0	46,0	60,0	46,0
poziom średni	24,0	16,0	24,0	8,0
poziom niski	-	-	-	-
poziom bardzo niski	-	-	-	-

W ocenie badanych nauczycieli większość przedszkolaków kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym we wszystkich wskazanych grupach prezentuje wysoki poziom analizowanej kompetencji matematycznej.

Na poziomie bardzo wysokim widoczny jest większy odsetek siedmiolatków. Szczególnie korzystna jest sytuacja wśród siedmioletnich chłopców, wśród których kompetencje tylko 8,0% zostały ocenione przez nauczycieli jako średnie. Pozostali wykazują bardzo wysoki (46,0%) lub wysoki (46,0%) poziom umiejętności liczenia.

Poziom średni dotyczy w ocenie nauczycieli przede wszystkim dzieci sześciolletnich (24,0% dziewczynek i 24,0% chłopców), co potwierdza sformułowany wcześniej (przy analizie ocen nauczycieli z przedszkoli Montessori) wniosek o wyższych ocenach poziomu kompetencji matematycznych starszych przedszkolaków.

¹¹⁸ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Żaden z badanych nauczycieli nie określił umiejętności dzieci jako niskie czy bardzo niskie. Nie zdiagnozowano istotnych różnic w ocenie poziomu kompetencji dziewczynek i chłopców.

Na podstawie analizy statystycznej ustalono, że staż pracy zawodowej nauczyciela i jego kwalifikacje dodatkowe nie różnicowały oceny poziomu analizowanej kompetencji dzieci¹¹⁹.

2. Poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie dodawania i odejmowania liczb wspomaganego liczeniem na palcach lub innych zbiorach zastępczych w ocenie nauczycieli

Przyjęto następującą skalę oceny poziomu kompetencji:

bardzo wysoki - dziecko bezbłędnie, samodzielnie dodaje i odejmuje liczby powyżej 10, przelicza odjemnik i oblicza różnicę oraz ustala odjemnik przy podanej wartości odjemnej i różnicy, wykonuje działania w zapisie symbolicznym, liczy w pamięci; rozumie dodawanie jako powiększanie, a odejmowanie jako pomniejszanie; ustala brakujący składnik lub odjemnik – zadania z luką;

wysoki - dziecko po objaśnieniach nauczyciela bezbłędnie dodaje i odejmuje liczby powyżej 10, przelicza odjemnik i oblicza różnicę oraz ustala odjemnik przy podanej wartości odjemnej i różnicy, wykonuje działania w zapisie symbolicznym, większość obliczeń wykonuje w pamięci; rozumie dodawanie jako powiększanie, a odejmowanie jako pomniejszanie;

średni - dziecko po objaśnieniach nauczyciela popełnia pomyłki podczas: dodawania kilku składników powyżej 10; odejmowania liczb na konkretach, przeliczania odjemnika i różnicy; podejmuje próby wykonywania działań w zapisie symbolicznym, najczęściej liczy opierając się na konkretach;

niski - dziecko po objaśnieniach i tylko z pomocą nauczyciela dodaje i odejmuje liczby wyłącznie na konkretach w zakresie 10; podejmuje próby wykonywania działań w zapisie symbolicznym; nie potrafi liczyć w pamięci;

bardzo niski - dziecko po objaśnieniach i mimo pomocy nauczyciela ma poważne problemy z dodawaniem i odejmowaniem liczb na konkretach w zakresie 10; nie wykonuje działań w zapisie symbolicznym, nie wykonuje rachunku pamięciowego.

¹¹⁹ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,842$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,600$

Grupa nauczycieli z przedszkoli Montessori – ocena indywidualna

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 30.

Tabela nr 30 Ocena indywidualna poziomu kompetencji dzieci w zakresie dodawania i odejmowania liczb wspomaganego liczeniem na palcach lub innych zbiorach zastępczych – przedszkole Montessori (zestawienie procentowe)¹²⁰

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej				staż pracy nauczyciela		kwalifikacje dodatkowe nauczyciela	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	1 rok	2 lata	3 lata	4 lata	0–5	6-10	tak	nie
poziom bardzo wysoki	47,1	11,1	10,0	20,0	100	25,0	17,1	20,8	13,3	60,0	21,4	17,9
poziom wysoki	11,8	72,2	46,7	60,0	-	75,0	31,7	66,7	48,3	30,0	54,8	32,1
poziom średni	35,3	16,7	33,3	20,0	-	-	43,9	8,3	31,7	10,0	21,4	39,3
poziom niski	5,9	-	10,0	-	-	-	7,3	4,2	6,7	-	2,4	10,7
poziom bardzo niski	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

¹²⁰ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Z tabeli nr 30 wynika, że w ocenie nauczycieli dzieci kończące edukację przedszkolną w systemie Montessori prezentują zróżnicowany poziom umiejętności dodawania i odejmowania liczb wspomaganego liczeniem na palcach lub innych zbiorach zastępczych. Dobrze rokują oceny poziomu siedmiolatków, wśród których dominuje poziom wysoki (72,2% dziewczynek i 60,0% chłopców).

Poziom niski natomiast dotyczy wyłącznie dzieci sześciolletnich. Zastanawiająca jest w tym kontekście ocena grupy sześciolletnich dziewczynek, umiejętności których nauczyciele najczęściej ocenili jako bardzo wysokie (47,1%).

Żadne dziecko zdaniem ankietowanych nauczycieli nie prezentuje bardzo niskiego poziomu analizowanej kompetencji matematycznej.

Negatywnie należy ocenić sytuację, w której jako niskie nauczyciele ocenili wyłącznie kompetencje dzieci, które dłużej (przez 3 lub 4 lata) uczęszczały do przedszkola. Jednocześnie należy wyjaśnić, że wśród badanych dzieci było tylko jedno, które przez rok chodziło do przedszkola i dlatego jego wynik należy traktować jako mało znaczący.

Z analizy statystycznej wynika, że ocenę poziomu kompetencji w zakresie dodawania i odejmowania liczb wspomaganego liczeniem na palcach lub innych zbiorach zastępczych różnicuje wiek dziecka¹²¹. Jest to zależność o umiarkowanej sile¹²². W ocenie nauczycieli dzieci starsze prezentują wyższe umiejętności matematyczne dotyczące wykonywania działań arytmetycznych. Stąd w najstarszych grupach badanych dzieci nauczyciele nie wskazali poziomu niskiego, a 75% siedmiolatków prezentuje poziom wysoki.

Czynnikiem różnicującym jest także staż pracy nauczyciela¹²³. Jest to zależność o umiarkowanej sile¹²⁴. Nauczyciele z krótszym stażem pracy (0-5 lat) niżej ocenili kompetencje dzieci; rzadziej (13,3%) uznali je jako bardzo wysokie (wśród nauczycieli z dłuższym stażem 6-10 lat takie oceny stanowią 60%). Ponadto dostrzegli również dzieci, których umiejętności w zakresie dodawania i odejmowania są w ich ocenie niskie (6,7%).

Natomiast płeć dziecka nie jest czynnikiem różnicującym ocenę poziomu analizowanej kompetencji matematycznej¹²⁵. Niemniej jako bardzo wysokie ocenione zostały przez nauczycieli kompetencje 10 dziewczynek (14,3%) i tylko 4 chłopców (5,7%). Podobna

¹²¹ Wskaźnik istotności statystycznej $p < 0,05$; $p = 0,033$

¹²² Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,327

¹²³ Wskaźnik istotności statystycznej $p < 0,05$; $p = 0,003$

¹²⁴ Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,348

¹²⁵ Wskaźnik istotności statystycznej $p > 0,05$; $p = 0,346$

zależność występuje przy niskiej ocenie kompetencji, którą nauczyciele ustalili dla jednej dziewczynki (1,4%) i trzech chłopców (4,3%)¹²⁶.

Oceny poziomu analizowanej kompetencji dzieci nie różnicuje również czas trwania edukacji przedszkolnej oraz kwalifikacje dodatkowe nauczyciela¹²⁷.

Grupa nauczycieli z przedszkoli Montessori – ocena globalna

Badani nauczyciele oceniali poziom kompetencji matematycznych w zakresie dodawania i odejmowania liczb wspomaganych liczeniem na palcach lub innych zbiorach zastępczych w odniesieniu do dzieci z czterech grup: dziewczynki 6- i 7-letnie oraz chłopcy 6- i 7-letni.

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 31.

Tabela nr 31 Ocena globalna poziomu kompetencji dzieci w zakresie dodawania i odejmowania liczb wspomaganych liczeniem na palcach lub innych zbiorach zastępczych – przedszkole Montessori (zestawienie procentowe)¹²⁸

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat
poziom bardzo wysoki	12,0	66,0	10,0	62,0
poziom wysoki	54,0	30,0	52,0	32,0
poziom średni	34,0	4,0	38,0	6,0
poziom niski	-	-	-	-
poziom bardzo niski	-	-	-	-

Ankietowani nauczyciele zdecydowanie wyżej ocenili poziom analizowanej kompetencji dzieci siedmioletnich w porównaniu z ich rok młodszymi kolegami. Bardzo pozytywnie należy interpretować fakt, że większość siedmiolatków - w ocenie nauczycieli wykonuje działania matematyczne na bardzo wysokim poziomie (66,0% dziewczynek i 62,0% chłopców).

Natomiast najniższy ze zdiagnozowanych poziomów - średni dotyczy przede wszystkim sześciolatków (34,0% dziewczynek i 38,0% chłopców).

¹²⁶ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

¹²⁷ Wskaźniki istotności statystycznej $p < 0,05$; czas trwania edukacji $p = 0,083$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,058$

¹²⁸ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Żaden z badanych nauczycieli nie określił kompetencji matematycznych dzieci jako niskie czy bardzo niskie.

Nie uzyskano istotnych statystycznie różnic między ocenami poziomu kompetencji chłopców i dziewczynek.

Na podstawie analizy statystycznej ustalono, że staż pracy zawodowej nauczyciela i jego kwalifikacje dodatkowe nie różnicowały oceny poziomu analizowanej kompetencji dzieci¹²⁹.

Grupa nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych – ocena indywidualna

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 32.

¹²⁹ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,561$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,771$

Tabela nr 32 Ocena indywidualna poziomu kompetencji dzieci w zakresie dodawania i odejmowania liczb wspomaganego liczeniem na palcach lub innych zbiorach zastępczych – przedszkole tradycyjne (zestawienie procentowe)¹³⁰

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej			staż pracy nauczyciela				kwalifikacje dodatkowe	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	11-20	powyżej 20	tak	nie
poziom bardzo wysoki	46,7	26,3	30,8	47,8	-	35,5	45,7	60,9	40,0	12,5	27,3	57,1	36,5
poziom wysoki	40,0	63,2	46,2	39,1	75,0	48,4	42,9	26,1	45,0	75,0	54,5	28,6	49,2
poziom średni	13,3	10,5	23,1	8,7	25,0	12,9	11,4	13,0	10,0	12,5	18,2	14,3	12,7
poziom niski	-	-	-	4,3	-	3,2	-	-	5,0	-	-	-	1,6
poziom bardzo niski	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

¹³⁰ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Jak wynika z tabeli nr 32 kompetencje matematyczne w zakresie dodawania i odejmowania liczb wspomaganego liczeniem na palcach lub innych zbiorach zastępczych większości dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym nauczyciele ocenili jako wysokie lub bardzo wysokie.

Nieco zaskakujące są oceny w grupie dziewczynek, wśród których sześciolatki przeważają na poziomie bardzo wysokim, a siedmiolatki na poziomie wysokim.

Zdiagnozowany poziom średni dotyczy głównie sześciolatków (13,3% dziewczynek i 23,1% chłopców).

Niepokoić natomiast powinna sytuacja, w której niska ocena poziomu umiejętności odnosi się do najstarszych chłopców (4,3%).

Żadne dziecko zdaniem ankietowanych nauczycieli nie prezentuje bardzo niskiego poziomu analizowanej kompetencji matematycznej

Poziom bardzo wysoki w ocenie nauczycieli osiągają wyłącznie dzieci, które dłużej uczęszczają do przedszkola (3-4 lata).

Szczególnie pozytywna dydaktycznie jest sytuacja w grupie przedszkolaków z najdłuższym czasem trwania edukacji przedszkolnej. Umiejętności większości z nich nauczyciele ocenili poziomem bardzo wysokim, a siedmiolatki na poziomie wysokim.

Zdiagnozowany poziom średni dotyczy głównie sześciolatków (13,3% dziewczynek i 23,1% chłopców).

Niepokoić natomiast powinna sytuacja, w której niska ocena poziomu umiejętności odnosi się do najstarszych chłopców (4,3%).

Żadne dziecko zdaniem ankietowanych nauczycieli nie prezentuje bardzo niskiego poziomu analizowanej kompetencji matematycznej.

jako bardzo wysokie (45,7%), nieco mniej jako wysokie (42,9%), a zdecydowanie najmniej jako średnie (11,4%).

Z analizy statystycznej wynika, że oceny poziomu kompetencji dzieci w zakresie dodawania i odejmowania liczb wspomaganego liczeniem na palcach lub innych zbiorach zastępczych dokonaną przez nauczycieli nie różnicuje płeć i wiek dziecka oraz czas trwania edukacji przedszkolnej¹³¹.

¹³¹ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; płeć dziecka $p = 0,941$; wiek dziecka $p = 0,894$; czas trwania edukacji przedszkolnej $p = 0,105$

Czynnikiem różnicującym nie jest również staż pracy nauczyciela oraz jego kwalifikacje dodatkowe ¹³². Niemniej najczęściej (60,9%) kompetencje dzieci jako bardzo wysokie ocenili nauczyciele z krótkim stażem pracy (0-5 lat). Dla porównania wśród nauczycieli z stażem dłuższym niż 20 lat takie oceny stanowią 27,3%. Natomiast najbardziej zróżnicowane są oceny nauczycieli pracujących 6-10 lat, którzy dostrzegali w swoich grupach również dzieci wykonujące działania matematyczne na niskim poziomie.

Zdecydowana nieproporcjonalność ilościowa obu grup (tylko 9 nauczycieli posiada dodatkowe kwalifikacje) nie pozwala na wnikliwą analizę różnicowania oceny dokonywanej przez nauczyciela przez jego dodatkowe uprawnienia.

Grupa nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych – ocena globalna

Badani nauczyciele oceniali poziom kompetencji matematycznych w zakresie dodawania i odejmowania liczb wspomaganego liczeniem na palcach lub innych zbiorach zastępczych odniesieniu do dzieci z czterech grup: dziewczynki 6- i 7-letnie oraz chłopcy 6- i 7-letni.

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 33.

Tabela nr 33 Ocena globalna poziomu kompetencji dzieci w zakresie dodawania i odejmowania liczb wspomaganego liczeniem na palcach lub innych zbiorach zastępczych – przedszkole tradycyjne (zestawienie procentowe)¹³³

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat
poziom bardzo wysoki	2,0	24,0	8,0	26,0
poziom wysoki	66,0	56,0	56,0	62,0
poziom średni	30,0	20,0	34,0	12,0
poziom niski	2,0	-	2,0	-
poziom bardzo niski	-	-	-	-

W ocenie ankietowanych nauczycieli większość dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym niezależnie od płci i wieku prezentuje wysoki poziom analizowanej kompetencji matematycznej.

¹³² Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,227$, kwalifikacje dodatkowe $p = 0,615$

¹³³ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Wyżej zostały ocenione umiejętności dzieci starszych – siedmioletnich, z których większy odsetek osiągnął poziom bardzo wysoki (24,0% dziewczynek i 26,0% chłopców). Jednocześnie mniejsza jest grupa siedmioletnich przedszkolaków na poziomie średnim (20,0% dziewczynek i 12,0% chłopców).

Natomiast tylko nieliczne sześciolatki (2,0% dziewczynek i 8,0% chłopców) nabyły omawiane umiejętności na poziomie bardzo wysokim.

Ponadto w tej grupie nauczyciele dostrzegli także przedszkolaków, których poziom umiejętności dodawania i odejmowania ocenili jako niski. Jest to dość niepokojące zjawisko, które implikuje konieczność otoczenia tych dzieci dodatkową opieką dydaktyczną na poziomie edukacji szkolnej.

Żaden z badanych nauczycieli nie wskazał poziomu bardzo niskiego.

Nie uzyskano istotnych statystycznie różnic między ocenami poziomu kompetencji chłopców i dziewczynek.

Na podstawie analizy statystycznej ustalono, że staż pracy zawodowej nauczyciela i jego kwalifikacje dodatkowe nie różnicowały oceny poziomu analizowanej kompetencji dzieci¹³⁴.

3. Poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi w ocenie nauczycieli

Przyjęto następującą skalę oceny poziomu kompetencji:

bardzo wysoki - dziecko bezbłędnie, samodzielnie ustala równoliczność zbiorów niezależnie od wielkości i jakości elementów (stałość ilości nieciągłych), porównuje liczebność zbiorów niezależnie od wielkości elementów; prawidłowo stosuje znaki „<”, „>”, „=”; tworzy zbiory równoliczne; rozumie i stosuje liczebniki porządkowe;

wysoki - dziecko po objaśnieniach nauczyciela bezbłędnie ustala równoliczność zbiorów niezależnie od wielkości i jakości elementów (stałość ilości nieciągłych), porównuje liczebność zbiorów niezależnie od wielkości elementów; tworzy zbiory równoliczne; rozumie i stosuje liczebniki porządkowe;

średni - dziecko po objaśnieniach nauczyciela popełnia pomyłki podczas ustalania równoliczności liczebności zbiorów oraz porównywania liczebności zbiorów niezależnie

¹³⁴ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,456$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,351$

od wielkości elementów; w czasie tworzenia zbiorów równolicznych; rozumie liczebniki porządkowe;

niski - dziecko po objaśnieniach i tylko z pomocą nauczyciela ustala równoliczności liczebności zbiorów oraz porównuje liczebność zbiorów, uzależniając ją od wielkości i położenia elementów; tworzy zbiory równoliczne; rozumie liczebniki porządkowe;

bardzo niski - dziecko po objaśnieniach i mimo pomocy nauczyciela ma poważne problemy z porównywaniem liczebności zbiorów, uzależnia ją od wielkości i położenia elementów; porównuje liczebność zbiorów wyłącznie na konkretnych, ma kłopoty z tworzeniem zbiorów równolicznych oraz rozumieniem liczebników porządkowych.

Grupa nauczycieli z przedszkoli Montessori – ocena indywidualna

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 34.

Tabela nr 34 Ocena indywidualna poziomu kompetencji dzieci w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi – przedszkole Montessori (zestawienie procentowe)¹³⁵

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej				staż pracy nauczyciela		kwalifikacje dodatkowe nauczyciela	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	1 rok	2 lata	3 lata	4 lata	0–5	6-10	tak	Nie
poziom bardzo wysoki	29,4	27,8	36,7	40,0	100	25,0	34,1	29,2	33,3	30,0	33,3	32,1
poziom wysoki	52,9	66,7	30,0	60,0	-	50,0	36,6	66,7	45,0	60,0	57,1	32,1
poziom średni	17,6	5,6	23,3	-	-	25,0	22,0	4,2	16,7	10,0	7,1	28,6
poziom niski	-	-	10,0	-	-	-	7,3	-	5,0	-	2,4	7,1
poziom bardzo niski	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

¹³⁵ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Jak wynika z tabeli nr 34 kompetencje większości badanych dzieci kończących edukacją przedszkolną w systemie Montessori w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi badani nauczyciele ocenili jako wysokie.

Bardzo dobra jest sytuacja w grupie dzieci siedmioletnich, szczególnie chłopców, którzy prezentują w ocenie nauczycieli poziom wysoki (60%) i bardzo wysoki (40%). Pozytywnie należy także postrzegać umiejętności najstarszych dziewczynek, których tylko 5,6% zdaniem nauczycieli jest na poziomie średnim.

Jako niskie określili nauczyciele kompetencje zaledwie 10% sześcioletnich chłopców.

Żadne dziecko zdaniem ankietowanych nauczycieli nie prezentuje bardzo niskiego poziomu analizowanej kompetencji matematycznej.

Wyżej ocenione przez nauczycieli zostały kompetencje dzieci, które dłużej uczęszczają do przedszkola (3-4 lata). Zaobserwowano malejący odsetek na poziomie średnim. Niepokoić jednak może sytuacja, że na poziomie niskim są wyłącznie dzieci po trzech latach edukacji przedszkolnej. Jednakże z pewnością pozytywną okolicznością jest fakt, iż po 4 latach edukacji przedszkolnej dzieci w większości (66,7%) osiągają wysoki poziom kompetencji matematycznych dotyczących równoliczności zbiorów i stosowania liczebników porządkowych.

Jednocześnie należy wyjaśnić, że wśród badanych dzieci było tylko jedno, które przez rok chodziło do przedszkola i dlatego jego wynik należy traktować jako mało znaczący.

Z analizy statystycznej wynika, że ocenę poziomu kompetencji dzieci w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi dokonaną przez nauczycieli różnicuje wiek dziecka¹³⁶. Jest to zależność o umiarkowanej sile¹³⁷. Niski poziom analizowanej kompetencji w ocenie nauczycieli dotyczy wyłącznie młodszych dzieci. Dzieci siedmioletnie w ocenie nauczycieli prezentują głównie poziom wysoki lub bardzo wysoki.

Oceny umiejętności dzieci dokonanej przez badaną grupę nauczycieli nie różnicuje natomiast płeć dziecka, czas trwania edukacji przedszkolnej oraz cechy demograficzne nauczyciela, czyli staż pracy i posiadane dodatkowe kwalifikacje zawodowe¹³⁸. Niemniej

¹³⁶ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,028$

¹³⁷ Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,331

¹³⁸ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; płeć dziecka $p = 0,381$; czas trwania edukacji przedszkolnej $p = 0,567$; staż pracy $p = 0,634$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,105$

tylko nauczyciele z krótszym stażem pracy (0-5 lat) zauważyli w swoich grupach dzieci ustalające równoliczność zbiorów, a szczególnie posługujące się liczebnikami porządkowymi na niskim poziomie.

Grupa nauczycieli z przedszkoli Montessori – ocena globalna

Badani nauczyciele oceniali poziom kompetencji matematycznych w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi w odniesieniu do dzieci z czterech grup: dziewczynki 6-i 7-letnie oraz chłopcy 6-i 7-letni.

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 35.

Tabela nr 35 Ocena globalna poziomu kompetencji dzieci w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi – przedszkole Montessori (zestawienie procentowe)¹³⁹

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat
poziom bardzo wysoki	6,0	42,0	12,0	56,0
poziom wysoki	56,0	48,0	54,0	36,0
poziom średni	34,0	10,0	30,0	6,0
poziom niski	4,0	-	4,0	2,0
poziom bardzo niski	-	-	-	-

Ankietowani nauczyciele zdecydowanie wyżej ocenili omawiane kompetencje matematyczne dzieci siedmioletnich kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori.

Poziom bardzo wysoki osiągnęły nieliczne sześciolatki (6,0% dziewczynek i 12,0% chłopców) przy zadawalającym odsetku siedmiolatek (42,0% dziewczynek i 56,0% chłopców).

Szczególnie pozytywnie należy ocenić sytuację w grupie siedmioletnich dziewczynek, które prezentują dość wyrównany, wysoki poziom analizowanych umiejętności matematycznych.

¹³⁹ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Natomiast w rówieśniczej grupie chłopców mogą niepokoić wskazania poziomu niskiego, ale są one jednostkowe (2,0%).

Niemniej można zauważyć, że wśród dzieci kończących edukację przedszkolną - zdaniem badanych nauczycieli są tacy/ takie (głównie sześciolatki), którzy/ które tylko po objaśnieniach i z pomocą nauczyciela ustalają równoliczność zbiorów oraz porównują ich liczebność (4,0% dziewczynek i 4,0% chłopców).

Żaden z badanych nauczycieli nie wskazał poziomu bardzo niskiego.

Nie uzyskano istotnych statystycznie różnic między ocenami poziomu kompetencji chłopców i dziewczynek.

Na podstawie analizy statystycznej ustalono, że staż pracy zawodowej nauczyciela i jego kwalifikacje dodatkowe nie różnicowały oceny poziomu analizowanej kompetencji dzieci¹⁴⁰.

Grupa nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych - ocena indywidualna

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 36.

¹⁴⁰ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,359$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,750$

Tabela nr 36 Ocena indywidualna poziomu kompetencji dzieci w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi – przedszkole tradycyjne (zestawienie procentowe)¹⁴¹

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej			staż pracy nauczyciela				kwalifikacje dodatkowe	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	11-20	powyżej 20	tak	nie
poziom bardzo wysoki	13,3	42,1	15,4	47,8	50,0	12,9	48,6	26,1	10,0	75,0	27,3	57,1	30,2
poziom wysoki	53,3	47,4	61,5	39,1	25,0	58,1	42,9	65,2	50,0	12,5	63,6	14,3	52,4
poziom średni	26,7	5,3	15,4	8,7	25,0	19,4	5,7	8,7	20,0	12,5	9,1	28,6	11,1
poziom niski	6,7	5,3	7,7	-	-	6,5	2,9	-	15,5	-	-	-	4,8
poziom bardzo niski	-	-	-	4,3	-	3,2	-	-	5,0	-	-	-	1,6

¹⁴¹ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Jak wynika z tabeli nr 36 jako bardzo wysokie zostały ocenione kompetencje w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi przede wszystkim dzieci siedmioletnich kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym.

Natomiast na poziomie średnim są najczęściej sześciolatki.

Bardzo prawidłowo są zróżnicowane oceny nauczycieli dotyczące sześcioletnich dziewczynek, wśród których przeważa poziom wysoki (53,3%). Jednocześnie nauczyciele dostrzegli zarówno grupę dzieci na poziomie bardzo wysokim (13,3%), jak i nielicznych na poziomie niskim (6,7%).

W grupie siedmioletnich dziewczynek wyraźnie wzrasta odsetek na poziomie bardzo wysokim (42,1%), ale niekorzystna jest sytuacja 5,3% dzieci, których umiejętności nauczyciele ocenili jako niskie.

Podobne prawidłowości zdiagnozowano w ocenach dotyczących chłopców – siedmiolatek przeważają na poziomie bardzo wysokim (47,8%), a sześciolatki na wysokim (61,5%). Jednakże należy zwrócić szczególną uwagę, że równocześnie jako bardzo niskie ocenili nauczyciele umiejętności wyłącznie najstarszych chłopców, którzy przez trzy lata uczęszczali do przedszkola.

Dość nieoczekiwanie jako bardzo wysokie uznali badani nauczyciele kompetencje dzieci po dwóch latach edukacji przedszkolnej.

Niemniej na podstawie zebranych wyników można wnioskować, że w ocenie nauczycieli poziom analizowanej kompetencji wzrasta wraz z długością pobytu dziecka w przedszkolu. Po czterech latach dzieci prezentują głównie poziom bardzo wysoki (48,6%), a tylko nieliczni poziom niski (2,9%).

Z analizy statystycznej wynika, że ocenę poziomu kompetencji dzieci w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi dokonaną przez badanych nauczycieli różnicuje wiek dziecka¹⁴². Jest to zależność proporcjonalna o umiarkowanej sile¹⁴³. Najwięcej dzieci, które w ocenie nauczycieli prezentują bardzo wysoki i wysoki poziom analizowanej kompetencji jest w grupie siedmiolatek. Poziom bardzo wysoki osiąga 19 z nich (27,1% ogółu badanych), a wysoki 18 (25,7%).

¹⁴² Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,029$

¹⁴³ Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,330

Z kolei płeć dziecka, czas trwania edukacji przedszkolnej oraz cechy demograficzne nauczyciela, czyli staż jego pracy i posiadane dodatkowe kwalifikacje zawodowe nie różnicują oceny poziomu analizowanej kompetencji dzieci¹⁴⁴. Jednakże najbardziej szczegółowe i zindywidualizowane są oceny nauczycieli ze stażem pracy 6-10 lat, którzy nie posiadają dodatkowych kwalifikacji zawodowych. Właściwa z pedagogicznego punktu widzenia jest przewaga wskazywanego poziomu wysokiego, jak również świadomość pedagogów, że w ich grupach są dzieci z trudnościami i szczególnymi potrzebami edukacyjnymi (poziom niski i bardzo niski). Zdecydowana nieproporcjonalność ilościowa obu grup (tylko 9 nauczycieli posiada dodatkowe kwalifikacje) nie pozwala na wnikliwą analizę różnicowania oceny dokonywanej przez nauczyciela przez jego dodatkowe uprawnienia.

Grupa nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych – ocena globalna

Badani nauczyciele oceniali poziom kompetencji matematycznych w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi w odniesieniu do dzieci z czterech grup: dziewczynki 6- i 7-letnie oraz chłopcy 6- i 7-letni.

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 37.

Tabela nr 37 Ocena globalna poziomu kompetencji dzieci w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi – przedszkole tradycyjne (zestawienie procentowe)¹⁴⁵

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat
poziom bardzo wysoki	12,0	22,0	14,0	26,0
poziom wysoki	48,0	56,0	46,0	56,0
poziom średni	36,0	20,0	36,0	16,0
poziom niski	2,0	2,0	2,0	2,0
poziom bardzo niski	2,0	-	2,0	-

¹⁴⁴ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; płeć dziecka $p = 0,415$; czas trwania edukacji przedszkolnej $p = 0,354$; staż pracy $p = 0,262$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,225$

¹⁴⁵ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Większość badanych nauczycieli uważa, że omawiane kompetencje matematyczne dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym (niezależnie od wieku i płci) kształtują się na wysokim poziomie.

Poziom bardzo wysoki prezentują częściej siedmiolatki (22,0% dziewczynek i 26,0% chłopców).

Dzieci młodsze przeważają na poziomie średnim.

Dość niepokojącym jest fakt, że we wszystkich badanych grupach nauczyciele wskazują dzieci o niskim poziomie umiejętności matematycznych związanych z równolicznością zbiorów i posługiwaniem się liczebnikami porządkowymi.

Natomiast bardzo negatywnie należy interpretować fakt, że w ocenie nauczycieli są także dzieci sześciolatnie, które opanowały analizowane kompetencje na bardzo niskim poziomie. Ta grupa przedszkolaków będzie potrzebowała dużej pomocy nie tylko pedagogicznej, ale i psychologicznej w szkole.

W oparciu o uzyskane wyniki nie stwierdzono istotnych statystycznie różnic między ocenami poziomu kompetencji chłopców i dziewczynek.

Na podstawie analizy statystycznej ustalono również, że staż pracy zawodowej nauczyciela i jego kwalifikacje dodatkowe nie różnicowały oceny poziomu analizowanych kompetencji matematycznych dzieci¹⁴⁶.

4. Poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie rozróżniania prawej i lewej strony oraz określania kierunków i ustalania położenia przedmiotów w ocenie nauczycieli

Przyjęto następującą skalę oceny poziomu kompetencji:

bardzo wysoki - dziecko bezbłędnie, samodzielnie określa kierunki w sytuacji rzeczywistej względem siebie oraz na kartce papieru;

wysoki - dziecko po objaśnieniach nauczyciela bezbłędnie określa kierunki w sytuacji rzeczywistej względem siebie oraz na kartce papieru;

średni - dziecko po objaśnieniach nauczyciela popełnia pomyłki podczas określania kierunków w sytuacji rzeczywistej względem siebie oraz na kartce papieru;

¹⁴⁶ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,399$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,240$

niski - dziecko po objaśnieniach i tylko z pomocą nauczyciela określa kierunki w sytuacji rzeczywistej względem siebie oraz na kartce papieru;

bardzo niski - dziecko po objaśnieniach i mimo pomocy nauczyciela ma poważne problemy z określaniem kierunków w sytuacji rzeczywistej względem siebie; nie określa kierunków na kartce papieru.

Grupa nauczycieli z przedszkoli Montessori – ocena indywidualna

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 38.

Tabela nr 38 Ocena indywidualna poziomu kompetencji dzieci w zakresie rozróżniania prawej i lewej strony oraz określania kierunków i ustalania położenia przedmiotów – przedszkole Montessori (zestawienie procentowe)¹⁴⁷

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej				staż pracy nauczyciela		kwalifikacje dodatkowe nauczyciela	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	1 rok	2 lata	3 lata	4 lata	0–5	6-10	tak	nie
poziom bardzo wysoki	23,5	33,3	3,3	20,0	100	50,0	7,3	33,3	15,0	30,0	33,3	10,7
poziom wysoki	41,2	55,6	53,3	80,0	-	50,0	48,8	62,5	50,0	70,0	57,1	57,1
poziom średni	35,3	11,1	36,7	-	-	-	39,0	4,2	31,7	-	7,1	28,6
poziom niski	-	-	6,7	-	-	-	4,9	-	3,3	-	2,4	3,6
poziom bardzo niski	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	

¹⁴⁷ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Jak wynika z tabeli nr 38 nauczyciele bardzo wysoko ocenili kompetencje większości badanych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori w zakresie rozróżniania prawej i lewej strony oraz określania kierunków i ustalania położenia przedmiotów. Dotyczy to przede wszystkim dzieci siedmioletnich, ale także dużej grupy sześciioletnich dziewczynek (23,5%).

Należy zauważyć, że lepiej zostały ocenione przez nauczycieli kompetencje badanych dziewczynek aniżeli chłopców. W grupie dziewczynek stwierdzono wyższy odsetek (niezależnie od wieku) ocen na poziomie bardzo wysokim; nie zdiagnozowano poziomu niskiego.

Bardzo pozytywnie rokująca jest także sytuacja w grupie siedmioletnich chłopców, których kompetencje nauczyciele ocenili jako wysokie (80%) i bardzo wysokie (20%).

Podobnie, choć z pewnym zaskoczeniem należy interpretować oceny grupy dzieci, które uczęszczały do przedszkola tylko przez dwa lata (50% - poziom bardzo wysoki i 50% - wysoki).

Niepokoić natomiast może poziom niski wyznaczony w percepcji nauczycieli wobec dzieci po dłuższej (3-letniej) edukacji przedszkolnej.

Jednocześnie należy wyjaśnić, że wśród badanych dzieci było tylko jedno, które przez rok chodziło do przedszkola i dlatego jego wynik należy traktować jako mało znaczący.

Z analizy statystycznej wynika, że ocenę poziomu kompetencji dzieci w zakresie rozróżniania prawej i lewej strony oraz określania kierunków i ustalania położenia przedmiotów dokonaną przez badanych nauczycieli różnicuje płeć dziecka¹⁴⁸. Jest to zależność o słabej sile¹⁴⁹. Poziom bardzo wysoki prezentuje 10 dziewczynek (14,3%) i zaledwie 2 chłopców (2,9%). Na najniższy ze wskazanych poziomów – niski zostali ocenieni wyłącznie chłopcy (2,9%)¹⁵⁰.

Ocenę poziomu analizowanej kompetencji dzieci dokonanej przez nauczycieli różnicuje również wiek dzieci¹⁵¹. Siła tego związku jest umiarkowana¹⁵². W percepcji nauczycieli poziom bardzo wysoki prezentuje najwięcej siedmiolatków (siedmioro – 10%). W tej grupie wiekowej niewielki procent (2,9%) stanowią dzieci, których kompetencje

¹⁴⁸ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,014$

¹⁴⁹ Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,294

¹⁵⁰ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

¹⁵¹ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,002$

¹⁵² Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,362

nauczyciel ocenili jako średnie. Natomiast najniższy ze wskazanych poziomów – niski dotyczy tylko sześciolatek¹⁵³.

Czynnikiem różnicującym dokonywaną przez nauczycieli ocenę poziomu analizowanej kompetencji okazał się również czas trwania edukacji przedszkolnej¹⁵⁴. Jest to zależność o słabej sile¹⁵⁵. Bardzo wysoki poziom analizowanej kompetencji prezentują w ocenie nauczycieli przede wszystkim dzieci, które przez 4 lata uczęszczały do przedszkola. Poza tym w tej grupie nie ma dzieci, których kompetencje zostały oceniane jako niskie czy bardzo niskie.

Oceny poziomu analizowanej kompetencji dokonywanej przez nauczycieli nie różnicuje natomiast staż jego pracy oraz posiadane dodatkowe kwalifikacje zawodowe¹⁵⁶. Niemniej ponownie tylko nauczyciele z krótszym stażem pracy (0-5 lat) dostrzegli w swoich grupach dzieci rozróżniające i określające kierunki na niskim poziomie. Oceny nauczycieli z dłuższym stażem, choć bardziej jednorodne (30% - poziom bardzo wysoki i 70% - wysoki), zapewniają o prawidłowym przygotowaniu dzieci do dalszej edukacji matematycznej.

Grupa nauczycieli z przedszkoli Montessori – ocena globalna

Badani nauczyciele oceniali poziom kompetencji matematycznych w zakresie rozróżniania prawej i lewej strony oraz określania kierunków i ustalania położenia przedmiotów w odniesieniu do dzieci z czterech grup: dziewczynki 6- i 7-letnie oraz chłopcy 6- i 7-letni.

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 39.

Tabela nr 39 Ocena globalna poziomu kompetencji dzieci w zakresie rozróżniania prawej i lewej strony oraz określania kierunków i ustalania położenia przedmiotów – przedszkole Montessori (zestawienie procentowe)¹⁵⁷

Ocena dokonana przez nauczyciela	Dziewczynki		chłopcy	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat
poziom bardzo wysoki	4,0	54,0	2,0	50,0
poziom wysoki	46,0	42,0	52,0	44,0
poziom średni	48,0	4,0	44,0	6,0
poziom niski	2,0	-	2,0	-
poziom bardzo niski	-	-	-	-

¹⁵³ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

¹⁵⁴ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,010$

¹⁵⁵ Wskaźnik Pearsona 0,214

¹⁵⁶ Wskaźnik istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,333$, kwalifikacje dodatkowe $p = 0,392$

¹⁵⁷ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Dokonane przez nauczycieli oceny poziomu kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori są wyraźnie zróżnicowane odnośnie poszczególnych grup wiekowych.

Poziom bardzo wysoki osiągają prawie wyłącznie dzieci siedmioletnie (54,0% dziewczynek i 50,0% chłopców). W grupie sześciolatków są to pojedyncze wskazania (4,0% dziewczynek i 2,0% chłopców). Analogiczna sytuacja jest na poziomie średnim, gdzie dominują dzieci młodsze (48,0% dziewczynek i 44,0% chłopców) przy niewielkim odsetku siedmiolatków (4,0% dziewczynek i 6,0% chłopców).

Bardzo dobrze rokująca jest zatem w ocenie nauczycieli sytuacja dzieci siedmioletnich. Natomiast niepokoić może fakt, że zdaniem nauczycieli są dzieci sześciolatnie kończące edukację przedszkolną, które na niskim poziomie wykazują orientację w przestrzeni i na kartce papieru. Choć jest to dość nieliczna grupa (po 2,0% dziewczynek i chłopców), to jednak ostrzega, że na progu edukacji szkolnej będą dzieci z trudnościami w nauce matematyki.

Żaden z badanych nauczycieli nie wskazał poziomu bardzo niskiego.

W oparciu o uzyskane wyniki nie stwierdzono istotnych statystycznie różnic między ocenami poziomu kompetencji chłopców i dziewczynek.

Na podstawie analizy statystycznej ustalono, że staż pracy zawodowej nauczyciela i jego kwalifikacje dodatkowe nie różnicowały oceny poziomu analizowanej kompetencji dzieci¹⁵⁸.

Grupa nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych – ocena indywidualna

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 40.

¹⁵⁸ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,393$, kwalifikacje dodatkowe $p = 0,275$

Tabela nr 40 Ocena indywidualna poziomu kompetencji dzieci w zakresie rozróżniania prawej i lewej strony oraz określania kierunków i ustalania położenia przedmiotów – przedszkole tradycyjne (zestawienie procentowe)¹⁵⁹

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej			staż pracy nauczyciela				kwalifikacje dodatkowe	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	11-20	powyżej 20	tak	nie
poziom bardzo wysoki	53,3	36,8	61,5	56,5	50,0	54,8	48,6	73,9	45,0	50,0	18,2	71,4	49,2
poziom wysoki	40,0	52,6	30,8	30,4	50,0	35,5	40,0	21,7	40,0	43,8	63,6	28,6	39,7
poziom średni	6,7	-	7,7	8,7	-	6,5	5,7	4,3	-	6,3	18,2	-	6,3
poziom niski	-	10,5	-	4,3	-	3,2	5,7	-	15,0	-	-	-	4,8
poziom bardzo niski	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

¹⁵⁹ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Jak wynika z tabeli nr 40 kompetencje zdecydowanej większości badanych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym w zakresie rozróżniania prawej i lewej strony oraz określania kierunków i ustalania położenia przedmiotów nauczyciele ocenili jako wysokie i bardzo wysokie.

Z punktu widzenia nauczycieli wyższe są umiejętności dzieci młodszych. Nieco zaskakujące są wskazania poziomu bardzo wysokiego, który osiągnęły przede wszystkim dzieci sześciolatnie (53,3% dziewczynek i 61,5% chłopców). Z kolei poziom niski dotyczy wyłącznie siedmiolatków (10,5% dziewczynek i 4,3% chłopców).

Żadne dziecko zdaniem ankietowanych nauczycieli nie prezentuje bardzo niskiego poziomu analizowanej kompetencji matematycznej.

Negatywnym zjawiskiem jest obserwowane obniżanie ocen nauczycieli w odniesieniu do dzieci wraz z czasem ich edukacji przedszkolnej. Zadawałające są wyłącznie wyniki w grupie dzieci, które najkrócej (przez dwa lata) uczęszczały do przedszkola – 50% na poziomie bardzo wysokim i 50% na poziomie wysokim. Natomiast niepokoić powinny wskazania niskiej oceny poziomu kompetencji dzieci po trzech (3,7%), a szczególnie po czterech latach edukacji przedszkolnej (5,7%).

Ocenę poziomu analizowanej kompetencji dokonywanej przez nauczycieli różnicuje staż jego pracy¹⁶⁰. Jest to zależność o słabej sile¹⁶¹. Jako bardzo wysoki poziom kompetencji dzieci ocenili najczęściej nauczyciele pracujący najkrócej (73,9%), a najrzadziej pedagodzy z ponad 20-letnim doświadczeniem zawodowym (18,2%). Podobna zależność występuje przy wskazywaniu poziomu niskiego – częściej dostrzegli go nauczyciele dłużej czynni zawodowo.

Z analizy statystycznej wynika natomiast, że oceny poziomu kompetencji dzieci w zakresie rozróżniania prawej i lewej strony oraz określania kierunków i ustalania położenia przedmiotów dokonaną przez badanych nauczycieli nie różnicuje płeć i wiek dziecka oraz czas trwania edukacji przedszkolnej¹⁶².

Natomiast zdecydowana nieproporcjonalność ilościowa obu grup (tylko 9 nauczycieli posiada dodatkowe kwalifikacje) nie pozwala na wnikliwą analizę różnicowania oceny dokonywanej przez nauczyciela przez jego dodatkowe uprawnienia.

¹⁶⁰ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,036$

¹⁶¹ Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,287

¹⁶² Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; płeć $p = 0,426$; wiek $p = 0,256$; czas trwania edukacji przedszkolnej $p = 0,527$

Grupa nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych – ocena globalna

Badani nauczyciele oceniali poziom kompetencji matematycznych w zakresie rozróżniania prawej i lewej strony oraz określania kierunków i ustalania położenia przedmiotów w odniesieniu do dzieci z czterech grup: dziewczynki 6- i 7-letnie oraz chłopcy 6- i 7-letni.

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 41.

Tabela nr 41 Ocena globalna poziomu kompetencji dzieci w zakresie rozróżniania prawej i lewej strony oraz określania kierunków i ustalania położenia przedmiotów – przedszkole tradycyjne (zestawienie procentowe)¹⁶³

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat
poziom bardzo wysoki	8,0	26,0	8,0	26,0
poziom wysoki	50,0	56,0	50,0	54,0
poziom średni	42,0	18,0	42,0	20,0
poziom niski	-	-	-	-
poziom bardzo niski	-	-	-	-

Większość badanych nauczycieli uznało, że analizowane kompetencje dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym kształtują się na wysokim poziomie.

Nauczyciele dość ostrożnie wskazywali poziom bardzo wysoki, szczególnie w odniesieniu do dzieci sześciolatków (po 8,0% dziewczynek i chłopców).

Zebrane wyniki wskazują zatem tendencję do wyższego oceniania przez nauczycieli umiejętności dzieci starszych. Siedmiolatki częściej osiągają poziom bardzo wysoki i jednocześnie rzadziej były oceniane na poziomie średnim.

Pozytywnie trzeba interpretować fakt, że w ocenie nauczycieli nie ma wśród dzieci kończących edukację przedszkolną takich, których poziom analizowanej kompetencji należałoby ocenić jako niski czy bardzo niski.

W oparciu o uzyskane wyniki nie stwierdzono istotnych statystycznie różnic między ocenami poziomu kompetencji chłopców i dziewczynek.

¹⁶³ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Na podstawie analizy statystycznej ustalono, że staż pracy zawodowej nauczyciela i jego kwalifikacje dodatkowe nie różnicowały oceny poziomu analizowanej kompetencji dzieci¹⁶⁴. /

5. Poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie dokonywania pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą w ocenie nauczycieli

Przyjęto następującą skalę oceny poziomu kompetencji:

bardzo wysoki - dziecko bezbłędnie, samodzielnie wyróżnia element najdłuższy i najkrótszy, porządkuje elementy według podanej cechy jakościowej; mierzy długość krokami, stopami i dłonią oraz za pomocą linijki;

wysoki - dziecko po objaśnieniach nauczyciela bezbłędnie wyróżnia element najdłuższy i najkrótszy, porządkuje elementy według podanej cechy jakościowej; mierzy długość krokami, stopami i dłonią oraz za pomocą linijki;

średni - dziecko po objaśnieniach nauczyciela popełnia pomyłki podczas wyróżniania elementu najdłuższego i najkrótszego, porządkowania elementów według podanej cechy jakościowej; mierzenia długość krokami, stopami i dłonią, szczególnie przy pomocy linijki;

niski - dziecko po objaśnieniach i tylko z pomocą nauczyciela wyróżnia element najdłuższy i najkrótszy, porządkuje elementy według podanej cechy jakościowej; mierzy długość krokami, stopami i dłonią; nie posługuje się linijką;

bardzo niski - dziecko po objaśnieniach i mimo pomocy nauczyciela ma poważne problemy z: wyróżnianiem elementu najdłuższego i najkrótszego, porządkowaniem elementów według podanej cechy jakościowej; oraz mierzeniem długości krokami, stopami i dłonią, nie posługuje się linijką.

Grupa nauczycieli z przedszkoli Montessori – ocena indywidualna

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 42.

¹⁶⁴ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,505$, kwalifikacje dodatkowe $p = 0,562$

Tabela nr 42 Ocena indywidualna poziomu kompetencji dzieci w zakresie dokonywania pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą – przedszkole Montessori (zestawienie procentowe)¹⁶⁵

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej				staż pracy nauczyciela		kwalifikacje dodatkowe nauczyciela	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	1 rok	2 lata	3 lata	4 lata	0–5	6-10	tak	nie
poziom bardzo wysoki	29,4	33,3	23,3	40,0	100	25,5	31,7	20,8	30,0	20,0	31,0	25,0
poziom wysoki	41,2	61,1	43,3	60,0	-	75,5	31,7	75,0	43,3	80,0	52,4	42,9
poziom średni	29,4	5,6	33,3		-	-	36,6	4,2	26,7	-	16,7	32,1
poziom niski	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
poziom bardzo niski	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

¹⁶⁵ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Jak wynika z tabeli nr 42 kompetencje większości badanych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori w zakresie dokonywania pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia nauczyciele ocenili jako wysokie.

Badani nauczyciele zdecydowanie wyżej ocenili kompetencje siedmiolatków. Szczególnie korzystna jest sytuacja w grupie siedmioletnich chłopców (40,0% na poziomie bardzo wysokim i 60,0% na wysokim).

Natomiast wyjątkowo nisko zostały ocenione przez nauczycieli kompetencje o rok młodszych przedszkolaków. Analizowane kompetencje matematyczne 33,3% 6-letnich chłopców i 29,4% 6-letnich dziewczynek nauczyciele ocenili jako średnie. Wskazane zróżnicowanie ocen należy jednak potraktować jako prawidłowość rozwojową. Rozumowanie operacyjne w zakresie pomiaru długości dzieci osiągają bowiem dopiero w 7-8 roku życia.

Żadne dziecko zdaniem ankietowanych nauczycieli nie prezentuje niskiego i bardzo niskiego poziomu analizowanej kompetencji matematycznej.

Nieco zaskakujące jest zróżnicowanie ocen dokonanych przez nauczycieli w zależności od czasu trwania edukacji przedszkolnej. Najwyżej ocenione zostały umiejętności dzieci, które relatywnie najkrócej uczęszczały do przedszkola (poziom wysoki lub bardzo wysoki). Jednocześnie należy wyjaśnić, że wśród badanych dzieci było tylko jedno, które przez rok chodziło do przedszkola i dlatego jego wynik należy traktować jako mało znaczący. Natomiast niezbyt optymistycznie rąkują oceny poziomu kompetencji dzieci po trzech latach edukacji przedszkolnej (36,6% - poziom średni).

Z analizy statystycznej wynika, że ocenę nauczycieli dotyczącą poziomu kompetencji dzieci w zakresie dokonywania pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia różnicuje płeć dziecka¹⁶⁶. Jest to zależność o słabej sile¹⁶⁷. Poziom bardzo wysoki prezentuje zdaniem nauczycieli nieco więcej dziewczynek (11) niż chłopców (9). Podobna tendencja jest widoczna na poziomie wysoki, który dotyczy 18 dziewczynek i 16 chłopców. Natomiast na najniższy ze wskazanych poziomów – niski zostały ocenione kompetencje 6 dziewczynek i 10 chłopców.

Czynnikiem różnicującym ocenę poziomu analizowanej kompetencji dzieci dokonaną przez nauczycieli jest również wiek dziecka¹⁶⁸. Jest to zależność o umiarkowanej sile¹⁶⁹.

¹⁶⁶ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,048$

¹⁶⁷ Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,137

¹⁶⁸ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,002$

¹⁶⁹ Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,354

W ocenie nauczycieli wraz z wiekiem dziecka rosną jego kompetencje w zakresie dokonywania pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia. Najstarsze dzieci – siedmioletnie prezentują w ocenie nauczycieli poziom wysoki (70,0%) lub bardzo wysoki (30,0%). Natomiast w grupie dzieci najmłodszych poziom bardzo wysoki dotyczy tylko 2,9% ogółu badanych.

Z przeprowadzonych badań wynika, że dokonane przez nauczycieli oceny poziomu analizowanej kompetencji nie są natomiast różnicowane przez czas trwania edukacji przedszkolnej dziecka oraz staż pracy nauczyciela i posiadane przez niego kwalifikacje dodatkowe¹⁷⁰. Niemniej nauczyciele z krótszym stażem pracy (0-5 lat) dokonali bardziej zróżnicowanych ocen dostrzegając również dzieci, które na średnim poziomie dokonują pomiarów długości.

Grupa nauczycieli z przedszkoli Montessori – ocena globalna

Badani nauczyciele oceniali poziom kompetencji matematycznych w zakresie umiejętności dokonywania pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą w odniesieniu do dzieci z czterech grup: dziewczynki 6- i 7-letnie oraz chłopcy 6- i 7-letni.

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 43.

Tabela nr 43 Ocena globalna poziomu kompetencji dzieci w zakresie umiejętności dokonywania pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą – przedszkole Montessori (zestawienie procentowe)¹⁷¹

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat
poziom bardzo wysoki	12,0	58,0	12,0	68,0
poziom wysoki	64,0	36,0	58,0	28,0
poziom średni	20,0	6,0	22,0	4,0
poziom niski	4,0	-	8,0	-
poziom bardzo niski	-	-	-	-

¹⁷⁰ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; czas trwania edukacji przedszkolnej $p = 0,075$; staż pracy nauczyciela $p = 0,609$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,404$

¹⁷¹ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Większość ankietowanych nauczycieli jako wysokie ocenia analizowane kompetencje dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori.

Widoczna jest tendencja do wyższego oceniania umiejętności dzieci siedmioletnich w porównaniu z sześciolatkami.

W odniesieniu do dzieci najstarszych przeważają wskazania bardzo wysokiego poziomu opanowania umiejętności w zakresie mierzenia długości (58,0% dziewczynek i 68,0% chłopców).

Natomiast umiejętności przedszkolaków sześcioletnich najczęściej oceniane są jako wysokie (64,0% dziewczynek i 58,0% chłopców).

Szczególnie pozytywna jest sytuacja w grupie najstarszych chłopców, z których zdecydowana przewaga (68,0%) potrafi – w ocenie nauczycieli - mierzyć długość na bardzo wysokim poziomie, a zaledwie 4,0% na poziomie średnim.

Oceny nauczycieli dotyczące siedmioletnich dziewczynek są bardziej ujednolicone, ale z pewnością także pozytywnie rokują (58,0% - poziom bardzo wysoki; tylko 6,0% poziom średni).

Należy jednak zwrócić uwagę, że wśród dzieci kończących edukację przedszkolną są w ocenie nauczycieli takie sześciolatki, które mają trudności z mierzeniem długości (niski poziom opanowania kompetencji – 4,0% dziewczynek i 8,0% chłopców). Ta grupa dzieci będzie potrzebowała większej pomocy i wsparcia ze strony nauczycieli na początku edukacji szkolnej.

Żaden z badanych nauczycieli nie wskazał poziomu bardzo niskiego.

W oparciu o uzyskane wyniki nie stwierdzono istotnych statystycznie różnic między ocenami poziomu kompetencji chłopców i dziewczynek.

Na podstawie analizy statystycznej ustalono, że staż pracy zawodowej nauczyciela i jego kwalifikacje dodatkowe nie różnicowały oceny poziomu analizowanej kompetencji dzieci¹⁷².

Grupa nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych – ocena indywidualna

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 44.

¹⁷² Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,607$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,323$

Tabela nr 44 Ocena indywidualna poziomu kompetencji dzieci w zakresie dokonywania pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą – przedszkole tradycyjne (zestawienie procentowe)¹⁷³

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej			staż pracy nauczyciela				kwalifikacje dodatkowe	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	11-20	powyżej 20	tak	nie
poziom bardzo wysoki	40,0	26,3	38,5	52,2	75,0	35,5	40,0	56,5	15,0	43,8	45,5	28,6	41,3
poziom wysoki	33,3	57,9	46,2	39,1	-	45,2	48,6	34,8	55,0	37,5	54,5	42,9	44,4
poziom średni	20,0	5,5	7,7	4,3	-	12,9	5,7	8,7	15,0	6,3	-	-	9,5
poziom niski	6,7	10,5	-	4,3	25,0	3,2	5,7	-	10,0	12,5	-	28,6	3,2
poziom bardzo niski	-	-	7,7	-	-	3,2	-	-	5,0	-	-	-	1,6

¹⁷³ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Jak wynika z tabeli nr 44 dokonane przez nauczycieli oceny kompetencji każdej grupy dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym w zakresie dokonywania pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia są bardzo zróżnicowane – od poziomu bardzo wysokiego do bardzo niskiego.

W grupie dziewczynek dość nieoczekiwanie lepiej zostały ocenione przez nauczycieli umiejętności sześciolatek: wyższy odsetek na poziomie bardzo wysokim i mniejszy na niskim.

Jako właściwy z edukacyjnego punktu widzenia należy natomiast uznać rozkład ocen w grupie siedmioletnich chłopców, wśród których przeważają wskazania poziomu bardzo wysokiego, a pojedyncze (świadczące o zindywidualizowanym podejściu nauczycieli) są oceny na poziomie średnim i niskim (po 4,3%).

Niepokoić powinna sytuacja najstarszych dziewczynek, z których 10,5% mierzy długość na poziomie niskim.

Natomiast zdecydowanie negatywnie należy interpretować fakt, że poziom analizowanej kompetencji 7,7% sześcioletnich chłopców badani nauczyciele ocenili jako bardzo niski.

Na podstawie zebranych wyników można stwierdzić, że oceny wskazane przez nauczycieli wzrastają wraz z czasem edukacji przedszkolnej. W grupie dzieci, które przez cztery lata chodziły do przedszkola zwiększyła się liczba wskazanego poziomu bardzo wysokiego, a spadły wskazania poziomu średniego i niskiego.

Dość specyficzny jest natomiast rozkład ocen nauczycieli odnośnie dzieci uczęszczających do przedszkola przez dwa lata. Zdiagnozowano duże zróżnicowanie poziomów kompetencji dzieci: większość z nich prezentuje poziom bardzo wysoki (75,0%), a pozostali poziom niski (25,0%).

Z analizy statystycznej wynika, że oceny nauczycieli dotyczące poziomu kompetencji dzieci w zakresie dokonywania pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia różnicuje płeć dziecka¹⁷⁴. Jest to zależność o słabej sile¹⁷⁵. Poziom bardzo wysoki w ocenie nauczycieli prezentuje nieco więcej chłopców (17) niż dziewczynek (11).

Oceny poziomu analizowanej kompetencji dzieci dokonane przez nauczycieli są różnicowane również przez wiek dziecka¹⁷⁶. Jest to zależność o mocnej sile¹⁷⁷. W ocenie

¹⁷⁴ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,014$

¹⁷⁵ Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,137

¹⁷⁶ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,002$

¹⁷⁷ Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,606

nauczycieli wraz z wiekiem dziecka rosną jego kompetencje w zakresie dokonywania pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia. Najwyżej ocenione zostały kompetencje dzieci siedmioletnich. Poziom bardzo wysoki dotyczy 51,6% siedmiolatków, a poziom wysoki 41,9% badanych.

Natomiast z przeprowadzonych badań wynika, że dokonanej przez nauczycieli oceny poziomu analizowanej kompetencji dzieci nie różnicują czas trwania edukacji przedszkolnej, staż pracy nauczyciela oraz jego dodatkowe kwalifikacje¹⁷⁸. Niemniej nauczyciele ze stażem pracy 6-10 lat, którzy nie posiadają dodatkowych uprawnień zawodowych dokonali najbardziej zróżnicowanych ocen dostrzegając dzieci, które dokonują pomiarów długości na wszystkich wskazanych poziomach. Oceny nauczycieli pracujących ponad 20 lat są bardzo ujednolicone i wysokie zarazem (45,5% - poziom bardzo wysoki i 54,5% - poziom wysoki). Zdecydowana nieproporcjonalność ilościowa obu grup (tylko 9 nauczycieli posiada dodatkowe uprawnienia) nie pozwala na wnikliwą analizę różnicowania oceny dokonanej przez nauczyciela przez jego dodatkowe przygotowanie zawodowe.

Grupa nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych – ocena globalna

Badani nauczyciele oceniali poziom kompetencji matematycznych w zakresie umiejętności dokonywania pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą – w odniesieniu do dzieci z czterech grup: dziewczynki 6- i 7-letnie oraz chłopcy 6- i 7-letni.

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 45.

Tabela nr 45 Ocena globalna poziomu kompetencji dzieci w zakresie umiejętności dokonywania pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą – przedszkole tradycyjne (zestawienie procentowe)¹⁷⁹

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat
poziom bardzo wysoki	14,0	32,0	14,0	32,0
poziom wysoki	50,0	58,0	52,0	50,0
poziom średni	32,0	8,0	30,0	18,0
poziom niski	4,0	2,0	4,0	-
poziom bardzo niski	-	-	-	-

¹⁷⁸ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,005$, czas trwania edukacji przedszkolnej $p = 0,645$; staż pracy nauczyciela $p = 0,869$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,177$

¹⁷⁹ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Kompetencje większości dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym we wszystkich wskazanych grupach ankietowani nauczyciele ocenili jako wysokie.

Przy wskazaniach poziomu bardzo wysokiego przeważają dzieci siedmioletnie (po 32,0% dziewczynek i chłopców) w porównaniu z sześciolatkami (po 14,0% dziewczynek i chłopców). Potwierdzają to także wskazania poziomu średniego, na którym pozostają w większości dzieci młodsze (32,0% dziewczynek i 30,0% chłopców).

Należy zwrócić uwagę, że – w ocenie nauczycieli na progu edukacji szkolnej są również dzieci, które na niskim poziomie potrafią mierzyć długość. Tak jak w poprzednich kompetencjach problem ten dotyczy głównie dzieci sześciolatków (po 4,0% dziewczynek i chłopców) i implikuje konieczność podjęcia przez nauczycieli w szkole działań wspierających tę grupę pierwszoklasistów.

Natomiast żaden z badanych nauczycieli nie wskazał poziomu bardzo niskiego.

W oparciu o uzyskane wyniki nie stwierdzono istotnych statystycznie różnic między ocenami poziomu kompetencji chłopców i dziewczynek.

Na podstawie analizy statystycznej ustalono również, że staż pracy zawodowej nauczyciela i jego kwalifikacje dodatkowe nie różnicowały oceny poziomu analizowanej kompetencji dzieci¹⁸⁰.

6. Poziom kompetencji matematycznych dzieci w zakresie orientacji w czasie - znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w ocenie nauczycieli

Przyjęto następującą skalę oceny poziomu kompetencji:

bardzo wysoki - dziecko bezbłędnie, samodzielnie rozróżnia pory dnia i wymienia je w kolejności, wymienia nazwy dni tygodnia we właściwej kolejności; stosuje pojęcia „dziś”, „jutro” i „wczoraj”; rozpoznaje pory roku i podaje je w kolejności; wymienia nazwy miesięcy; układa historyjkę obrazkową z zachowaniem chronologii wydarzeń;

wysoki - (dziecko po objaśnieniach nauczyciela bezbłędnie rozróżnia pory dnia i wymienia je w kolejności, wymienia nazwy dni tygodnia we właściwej kolejności; stosuje pojęcia „dziś”,

¹⁸⁰ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,742$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,428$

„jutro” i „wczoraj”; rozpoznaje pory roku i podaje je w kolejności, wymienia nazwy miesięcy; układa historyjkę obrazkową z zachowaniem chronologii wydarzeń;

średni - dziecko po objaśnieniach nauczyciela popełnia pomyłki podczas: rozróżniania pór dnia i ustalania ich kolejność, wymieniania nazw dni tygodnia we właściwej kolejności oraz stosowania pojęć „dziś”, „jutro” i „wczoraj”; rozpoznawania i ustalania kolejności pór roku; nazywania miesięcy; układania historyjki obrazkowej z zachowaniem chronologii wydarzeń;

niski - dziecko po objaśnieniach i tylko z pomocą nauczyciela rozróżnia pory dnia i ustala ich kolejność; rozpoznaje i ustala kolejność pór roku; wymienia nazw dni tygodnia, układa historyjkę obrazkową z zachowaniem chronologii wydarzeń; nie stosuje pojęć „dziś”, „jutro” i „wczoraj”; myli nazwy miesięcy;

bardzo niski - dziecko po objaśnieniach i mimo pomocy nauczyciela ma poważne problemy z: rozróżnianiem pór dnia i ustalaniem ich kolejności, z rozpoznawaniem i ustalaniem kolejności pór roku; nie potrafi ułożyć historyjki obrazkowej z zachowaniem chronologii wydarzeń; myli nazwy miesięcy; nie rozumie pojęć „dziś”, „jutro” i „wczoraj”.

Grupa nauczycieli z przedszkoli Montessori – ocena indywidualna

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 46.

Tabela nr 46 Ocena indywidualna poziomu kompetencji dzieci w zakresie orientacji w czasie - znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy przedszkole Montessori (zestawienie procentowe)¹⁸¹

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej				staż pracy nauczyciela		kwalifikacje dodatkowe nauczyciela	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	1 rok	2 lata	3 lata	4 lata	0–5	6-10	tak	nie
poziom bardzo wysoki	47,1	61,1	26,7	60,0	100	25,0	34,1	58,3	43,3	40,0	52,4	28,6
poziom wysoki	23,5	38,9	36,7	40,0	-	50,0	31,7	37,5	31,7	50,0	35,7	32,1
poziom średni	23,5	-	33,3	-	-	25,0	29,3	4,2	21,7	10,0	11,9	32,1
poziom niski	5,9	-	3,3	-	-	-	4,9	-	3,3	-	-	7,1
poziom bardzo niski	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

¹⁸¹ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Wyniki przedstawione w tabeli nr 46 wskazują na duże zróżnicowanie między nauczycielskimi ocenami kompetencji w zakresie orientacji w czasie dzieci sześciu- i siedmioletnich kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori.

Bardzo pozytywna jest sytuacja dzieci starszych, których umiejętności nauczyciele ocenili w większości jako bardzo wysokie (61,1% dziewczynek i 60,0% chłopców) lub jako wysokie (38,9% dziewczynek i 40,0% chłopców).

Natomiast zaniepokojenie powinny budzić wskazania poziomu niskiego w grupie sześciolatków (5,9% dziewczynki i 3,3% chłopcy).

Na podstawie zebranego materiału badawczego można zauważyć prawidłową tendencję wzrostu poziomu analizowanej kompetencji wraz z czasem edukacji przedszkolnej. Umiejętności większości dzieci (58,3%), które przez cztery lata uczęszczały do przedszkola nauczyciele ocenili jako bardzo wysokie. Widoczny jest także spadek odsetka dzieci na poziomie średnim i brak wskazań poziomu niskiego. W tym kontekście nieco zaskakującym jest fakt, że poziom niski dotyczy dzieci z równie długim (bo trzyletnim) pobytem w przedszkolu (3,9%).

Jednocześnie należy wyjaśnić, że wśród badanych dzieci było tylko jedno, które przez rok chodziło do przedszkola i dlatego jego wynik należy traktować jako mało znaczący.

Z analizy statystycznej wynika, że dokonana przez nauczycieli ocena poziomu kompetencji dzieci w zakresie orientacji w czasie różnicuje wiek dziecka¹⁸². Siła tego związku jest umiarkowana¹⁸³. W ocenie nauczycieli wraz z wiekiem dziecka rosną jego kompetencje w zakresie orientacji w czasie. Najwyżej ocenione zostały kompetencje dzieci siedmioletnich. Poziom bardzo wysoki dotyczy 65,0% siedmiolatków, a poziom wysoki 35,0% badanych. Jako niski oceniają nauczyciele poziom kompetencji tylko dzieci najmłodszych.

Natomiast płeć dziecka, czas trwania edukacji przedszkolnej oraz staż pracy nauczyciela i jego dodatkowe kwalifikacje nie są czynnikami, które różnicują dokonywane przez nauczycieli oceny poziomu analizowanej kompetencji dzieci¹⁸⁴.

¹⁸² Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,002$

¹⁸³ Wskaźnik korelacji r Pearsona 0,331

¹⁸⁴ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,005$; płeć $p = 0,408$, czas trwania edukacji przedszkolnej $p = 0,075$; staż pracy $p = 0,609$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,333$

Grupa nauczycieli z przedszkoli Montessori – ocena globalna

Badani nauczyciele oceniali poziom kompetencji matematycznych w zakresie orientacji w czasie - znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w odniesieniu do dzieci z czterech grup: dziewczynki 6- i 7 letnie oraz chłopcy 6- i 7-letni.

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 47.

Tabela nr 47 Ocena globalna poziomu kompetencji dzieci w zakresie orientacji w czasie - znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy – przedszkole Montessori (zestawienie procentowe)¹⁸⁵

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat
poziom bardzo wysoki	8,0	50,0	8,0	38,0
poziom wysoki	32,0	46,0	42,0	60,0
poziom średni	54,0	4,0	44,0	2,0
poziom niski	6,0	-	6,0	-
poziom bardzo niski	-	-	-	-

W dokonanych przez badanych nauczycieli ocenach poziomu omawianych kompetencji dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie Montessori widoczne jest zróżnicowanie między dziećmi sześć- i siedmioletnimi.

Poziom bardzo wysoki osiągają przede wszystkim dzieci starsze: 50,0% dziewczynek i 38,0% chłopców. W ocenach sześciolatków ten odsetek wynosi zaledwie 8,0%.

Zdiagnozowane zróżnicowanie ocen związane z wiekiem dzieci potwierdzają również wskazania poziomu średniego. Pozostaje na nim przewaga sześciolatków: 54,5% dziewczynek i 44,0% chłopców, podczas gdy w grupie siedmiolatków wskazania wynoszą odpowiednio 4,0% i 2,0%.

Ponadto orientację w czasie na niskim poziomie wykazują zadaniem badanych wyłącznie sześciolatki (po 6,0% dziewczynek i chłopców). Po raz kolejny zatem nauczyciele w swych ocenach sygnalizują duże deferencje między poziomem kompetencji matematycznych dzieci sześć- i siedmioletnich wskazując wyższe umiejętności tych starszych.

Żaden z badanych nauczycieli nie wskazał poziomu bardzo niskiego.

¹⁸⁵ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

W oparciu o uzyskane wyniki nie stwierdzono istotnych statystycznie różnic między ocenami poziomu kompetencji chłopców i dziewczynek.

Na podstawie analizy statystycznej ustalono, że staż pracy zawodowej nauczyciela i jego kwalifikacje dodatkowe nie różnicowały oceny poziomu analizowanej kompetencji matematycznej dzieci¹⁸⁶.

Grupa nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych – ocena indywidualna

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 48.

¹⁸⁶ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,066$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,981$

Tabela nr 48 Ocena indywidualna poziomu kompetencji dzieci w zakresie orientacji w czasie - znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy – przedszkole tradycyjne (zestawienie procentowe)¹⁸⁷

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej			staż pracy nauczyciela				kwalifikacje dodatkowe	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	2 lata	3 lata	4 lata	0–5	6-10	11-20	powyżej 20	tak	nie
poziom bardzo wysoki	46,7	36,8	53,8	78,3	50,0	51,6	60,0	73,9	40,0	50,0	54,5	57,1	55,6
poziom wysoki	46,7	57,9	38,5	13,0	50,0	38,7	34,3	26,1	45,0	37,5	45,5	28,6	38,1
poziom średni	6,7	-	7,7	4,3	-	6,5	2,9	-	5,0	12,5	-	14,3	3,2
poziom niski	-	5,3	-	-	-	-	2,9	-	5,0	-	-	-	1,6
poziom bardzo niski	-	-	-	4,3	-	3,2	-	-	5,0	-	-	-	1,6

¹⁸⁷ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Wyniki przedstawione w tabeli nr 48 świadczą, że badani nauczyciele wyżej ocenili kompetencje matematyczne w zakresie orientacji w czasie dzieci sześciolletnich kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym. Bardzo konstruktywna jest sytuacja zarówno w grupie dziewczynek, jak i chłopców, gdzie dominującym – zdaniem nauczycieli jest poziom bardzo wysoki (46,7% dziewczynek i 53,8% chłopców) i wysoki (46,7% dziewczynek i 38,5% chłopców).

Zdecydowanie mniej korzystna jest ocena kompetencji dzieci siedmioletnich.

Trudno jednoznacznie ocenić środowisko siedmioletnich chłopców. Optymistycznym zapewne jest fakt, że kompetencje zdecydowanej większości dzieci (78,3%) nauczyciele ocenili jako bardzo wysokie. Jednakże należy zauważyć, iż w tej grupie przedszkolaków są również tacy, których umiejętności zostały ocenione jako średnie (4,3%), a przede wszystkim jako bardzo niskie (4,3%).

W grupie siedmioletnich dziewczynek sytuacja jest stosunkowo bardziej korzystna. Większość badanych - w ocenie nauczycieli orientuje się w czasie na poziomie wysokim (57,9%), lecz są także wskazania poziomu niskiego (5,3%).

Dużym zaskoczeniem są bardzo zadowalające oceny kompetencji dzieci, które tylko przez dwa lata uczęszczały do przedszkola (50,0% - poziom bardzo wysoki i 50,0% - poziom wysoki). W tej sytuacji ostrzegawczo należy potraktować oceny dotyczące dzieci chodzących dłużej do przedszkola, szczególnie bardzo niski poziom dzieci po trzech latach edukacji przedszkolnej (3,2%).

Z analizy statystycznej wynika, że oceny poziomu kompetencji dzieci w zakresie orientacji w czasie dokonaną przez nauczycieli nie różnicuje wiek i płeć dziecka oraz czas trwania edukacji przedszkolnej¹⁸⁸.

Czynnikami różnicującymi nie są również staż pracy nauczyciela oraz posiadane dodatkowe kwalifikacje¹⁸⁹. Niemniej jednak najbardziej zindywidualizowane i zróżnicowane są oceny nauczycieli ze stażem pracy 6-10 lat. Ta grupa pedagogów najrzadziej oceniła kompetencje dzieci jako bardzo wysokie (40,0%) i dostrzegła przedszkolaków, których analizowane kompetencje są na wszystkich wskazanych poziomach. Najbardziej

¹⁸⁸ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,005$; płeć $p = 0,212$; wiek dziecka $p = 0,901$; czas trwania edukacji przedszkolnej $p = 0,563$

¹⁸⁹ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,005$; staż pracy $p = 0,418$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,959$

optymistyczni w swych ocenach okazali się nauczyciele z najkrótszym stażem pracy (73,9% wskazań poziomu bardzo wysokiego i 26,1% poziomu wysokiego).

Zdecydowana nieproporcjonalność ilościowa obu grup (tylko 9 nauczycieli posiada dodatkowe kwalifikacje) nie pozwala na wnikliwą analizę różnicowania oceny dokonywanej przez nauczyciela w związku z jego dodatkowymi uprawnieniami.

Grupa nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych – ocena globalna

Badani nauczyciele oceniali poziom kompetencji matematycznych w zakresie orientacji w czasie - znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy – w odniesieniu do dzieci z czterech grup: dziewczynki 6- i 7-letnie oraz chłopcy 6- i 7-letni.

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 49.

Tabela nr 49 Ocena globalna poziomu kompetencji dzieci w zakresie orientacji w czasie - znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy – przedszkole tradycyjne (zestawienie procentowe)¹⁹⁰

Ocena dokonana przez nauczyciela	dziewczynki		chłopcy	
	6 lat	7 lat	6 lat	7 lat
poziom bardzo wysoki	14,0	26,0	8,0	26,0
poziom wysoki	30,0	44,0	32,0	42,0
poziom średni	50,0	30,0	48,0	30,0
poziom niski	6,0	-	12,0	2,0
poziom bardzo niski	-	-	-	-

Większość badanych nauczycieli analizowane kompetencje dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym oceniła jako wysokie i średnie.

Nie zdiagnozowano większego zróżnicowania ocen między sześciolatkami i siedmiolatkami. Najbardziej pozytywnie należy ocenić sytuację w grupie siedmioletnich dziewczynek, wśród których nauczyciele nie wskazali poziomu niskiego.

Tymczasem niepokojąca jest dość spora grupa dzieci, których umiejętności w zakresie orientacji w czasie badani nauczyciele ocenili jako niskie (6,0% sześciolletnich dziewczynek, 12,0% sześciolletnich chłopców oraz 2,0% siedmiolatków). Implikuje to konieczność prowadzenia na etapie edukacji wczesnoszkolnej wzmożonych działań wyrównujących. Żaden z badanych nauczycieli nie wskazał natomiast poziomu bardzo niskiego.

¹⁹⁰ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

W oparciu o uzyskane wyniki nie stwierdzono istotnych statystycznie różnic między ocenami poziomu kompetencji chłopców i dziewczynek.

Na podstawie analizy statystycznej ustalono, że staż pracy zawodowej nauczyciela i jego kwalifikacje dodatkowe nie różnicowały oceny poziomu analizowanej kompetencji dzieci¹⁹¹.

Wnioski końcowe

1. Dokonując całościowej analizy wyników badań dotyczących dokonanej przez nauczycieli indywidualnej oceny poziomu kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną (przedstawionych kolejno w tabelach nr 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46 i 48) można sformułować następujące wnioski ogólne:

- wyżej kompetencje matematyczne dzieci ocenili nauczyciele z przedszkoli Montessori, którzy w żadnym przypadku nie wskazali poziomu bardzo niskiego; nauczyciele z przedszkoli tradycyjnych ustalili go w większości analizowanych kompetencji;
- zaznaczyły się rozbieżności między ocenami nauczycieli z obu rodzajów placówek dotyczące najlepiej i najslabiej opanowanych kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną;
- nauczyciele z przedszkoli Montessori zdecydowanie najwyżej ocenili kompetencje dzieci w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego (45,7% badanych na poziomie bardzo wysokim¹⁹², brak wskazań poziomu niskiego i bardzo niskiego);
- najslabiej zdaniem ankietowanych nauczycieli montessoriańskich opanowane są umiejętności dzieci w zakresie rozróżniania lewej i prawej strony oraz określania kierunków i ustalania położenia przedmiotów (tylko 17,1% na poziomie bardzo wysokim, 4,3% na poziomie niskim¹⁹³) a także w zakresie umiejętności wykonywania dodawania i odejmowania liczb wspomaganego liczeniem na palcach lub innych zbiorach zastępczych (20,0% na poziomie bardzo wysokim i najliczniejsze ze zdiagnozowanych wskazań na poziomie niskim – 5,7%)¹⁹⁴;

¹⁹¹ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,144$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,105$

¹⁹² Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

¹⁹³ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

¹⁹⁴ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

- nauczyciele z przedszkoli tradycyjnych natomiast najwyżej ocenili kompetencje dzieci w zakresie orientacji w czasie (55,7% badanych na poziomie bardzo wysokim¹⁹⁵) oraz rozróżniania lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia przedmiotów (51,4% badanych na poziomie bardzo wysokim¹⁹⁶, brak wskazań poziomu bardzo niskiego);
- najslabiej - zdaniem ankietowanych nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych opanowane są umiejętności dzieci w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego (zaledwie 18,6% na poziomie bardzo wysokim, 7,1% na niskim i 1,4% na bardzo niskim¹⁹⁷) oraz w zakresie dokonywania pomiarów długości i znajomości prostych sposobów mierzenia (32,9% - poziom bardzo wysoki, 5,6% poziom niski i 1,4% poziom bardzo niski)¹⁹⁸;
- wśród nauczycieli z przedszkoli Montessori pedagogzy z krótki stażem (0–5 lat) dokonali najbardziej zróżnicowanych ocen poziomu kompetencji matematycznych dzieci, dostrzegając również te, które doświadczają pierwszych niepowodzeń w uczeniu się matematyki;
- z grupy nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych najbardziej zindywidualizowane są oceny nauczycieli ze stażem 6-10 lat;
- nauczyciele z przedszkoli Montessori najwyższe oceny poziomu kompetencji wskazali odnośnie dzieci, których edukacja przedszkolna trwała dłużej (3-4 lata).

2. Na temat różnicowania osiąganego przez dzieci poziomu kompetencji matematycznych przez czas trwania edukacji przedszkolnej wypowiedzieli się również nauczyciele dokonujący oceny globalnej.

Uzyskane wyniki empiryczne pozwalają stwierdzić, że:

- w opinii nauczycieli z przedszkoli Montessori długość edukacji przedszkolnej w wysokim stopniu różnicuje poziom umiejętności matematycznych dzieci (40,0% odpowiedzi) lub wręcz jest czynnikiem decydującym (38,0% odpowiedzi); zdaniem tylko

¹⁹⁵ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

¹⁹⁶ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

¹⁹⁷ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

¹⁹⁸ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

jednego pedagoga (2,0%) długość uczęszczania do przedszkola nie ma znaczenia w procesie kształtowania kompetencji matematycznych;

- większość nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych również uważa, że czas trwania edukacji przedszkolnej w wysokim stopniu różnicuje poziom kompetencji matematycznych dzieci (58,0% odpowiedzi); także tylko jeden z badanych (2,0%) sądzi, że długość uczęszczania do przedszkola nie ma znaczenia w kształtowaniu kompetencji matematycznych.

3. Analiza całościowa wyników badań dotyczących dokonanej przez nauczycieli oceny globalnej poziomu kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną (przedstawionych kolejno w tabelach nr 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47 i 49) pozwala na sformułowanie następujących wniosków ogólnych:

- wyżej kompetencje dzieci kończących edukację przedszkolną ocenili nauczyciele z przedszkoli Montessori, którzy w żadnej z omawianych grup działalności matematycznej, uwzględnionych w obowiązującej Podstawie Programowej Wychowania Przedszkolnego nie wskazali poziomu bardzo niskiego; nauczyciele z przedszkoli tradycyjnych uznali, że na bardzo niskim poziomie są umiejętności grupy dzieci w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi

- w percepcji badanych nauczycieli montessoriańskich najwyższe są umiejętności dzieci w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego oraz wyznaczania wyniku podstawowych addytywnych działań matematycznych, czyli dodawania i odejmowania (nie ma wskazań poziomu niskiego i bardzo niskiego);

Uzyskane wyniki potwierdzają zatem dużą skuteczność i efektywność licznych materiałów Montessori służących wprowadzeniu liczb w zakresie pierwszej dziesiątki oraz wykonywaniu działań na małych liczbach.

- natomiast najsłabiej, zdaniem nauczycieli z przedszkoli Montessori, opanowane zostały umiejętności dotyczące dokonywania pomiaru długości i orientacji w czasie;

- nauczyciele z przedszkoli tradycyjnych również jako najlepiej opanowaną kompetencję matematyczną dzieci kończące edukację przedszkolną uznali liczenie obiektów i rozróżnianie błędnego liczenia od poprawnego, a także rozróżnianie prawej i lewej strony, określanie kierunków oraz ustalanie położenia przedmiotów (nie ma wskazań poziomu niskiego i bardzo niskiego);

- niepokojąco natomiast jest wskazanie poziomu bardzo niskiego, które dotyczy umiejętności dzieci sześciolatków w zakresie ustalania równoliczności zbiorów, a przede wszystkim posługiwania się liczebnikami porządkowymi;
- nie uzyskano istotnych statystycznie różnic między ocenami poziomu umiejętności matematycznych chłopców i dziewczynek;
- analiza statystyczna nie wykazała różnicowania oceny poziomu analizowanych kompetencji dzieci przez staż pracy nauczyciela oraz posiadane dodatkowe kwalifikacje.

4. Zarówno w ocenie indywidualnej, jak i globalnej ankietowani nauczyciele z obu rodzajów placówek przedszkolnych wyżej ocenili kompetencje matematyczne dzieci siedmiolatków w porównaniu z ich młodszymi kolegami i koleżankami.

Wskazywany bardzo wysoki poziom poszczególnych kompetencji dotyczył w większości dzieci starszych, a poziom niski prezentowały głównie sześciolatki.

W tej sytuacji, jak zauważa K. Szewczuk (2014) nauczyciel na pierwszym etapie edukacyjnym spotyka się z bardzo zróżnicowaną grupą uczniów.

Podobnych obserwacji dokonuje E. Gruszczyk-Kolczyńska twierdząc, że w pierwszej klasie różnice w rozwoju poznawczym uczniów mogą sięgać nawet 4 lat. W ławce szkolnej usiądzie zatem dziecko, którego rozwój intelektualny jest na poziomie 5-latka, jak i uczeń osiągający kompetencje 9-latka.

Z tych powodów –jak podaje wspomniana K. Szewczuk nie mogą dziwić słowa nauczycieli klas pierwszych, którzy odpowiadając na pytanie: „Czym głównie zajmowali się w ciągu całego roku szkolnego?” stwierdzają: „Wyrównywałam przepaści, jakie dzieliły moich uczniów” (Szewczuk, 2014, s.26).

Rozdział VIII. Przebieg procesu rozwijania kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w systemie tradycyjnym i systemie Montessori w świetle badań własnych

W rozdziale VI i VII przedstawiono rozważania dotyczące osiąganego przez dzieci kończące edukację przedszkolną poziomu kompetencji matematycznych.

Jednakże konieczną i potrzebną wydaje się być także analiza różnicowania poziomu dokonana w oparciu o czynnik pedagogiczny. Styl pracy nauczyciela, podejmowane przez niego działania dydaktyczne to, jak zauważa B. Dudel „względnie stały sposób tworzenia środowiska edukacyjnego i procesów w nim zachodzących” (Dudel, 2012, s.242). Strategia (rozumiana jako spójny dobór celów, metod i środków dydaktycznych), jaką przyjmuje nauczyciel jest bardzo ważnym elementem procesu kształtowania kompetencji matematycznych dzieci.

W związku z tym przygotowano ankietę dla nauczycieli dotyczącą przebiegu procesu rozwijania kompetencji matematycznych dzieci, które kończą edukację przedszkolną. Uwzględniając specyfikę pracy w przedszkolach Montessori i tradycyjnych opracowano dwie wersje ankiety, którą wypełniło 70 nauczycieli z placówek montessoriańskich oraz 70 nauczycieli z placówek tradycyjnych (załączniki 6 i 7).

Pierwsze pytania zawarte w ankiecie dotyczyły częstotliwości realizacji poszczególnych treści matematycznych stosowanej przez nauczycieli w grupie dzieci kończących edukację przedszkolną.

W dalszej części pytano o wykorzystywane metody i form pracy dydaktycznej wykorzystywane w przedszkolnej edukacji matematycznej.

Kolejne pytania odnosiły się do obserwowanych przez nauczycieli trudności w uczeniu się matematyki oraz działań edukacyjnych podejmowanych w celu ich pokonywania.

W następnych pytaniach podjęto problematykę dzieci uzdolnionych matematycznie oraz inicjowanych przez nauczycieli oddziaływań stymulujących te predyspozycje.

Ankietowanych nauczycieli pytano również o działania edukacyjne, które należy podejmować w celu podnoszenia poziomu umiejętności matematycznych dzieci oraz o potrzebę poszerzania własnych kompetencji dotyczących prowadzenia zajęć matematycznych z dziećmi w przedszkolu.

W obliczeniach statystycznych dla odpowiedzi o charakterze porządkowym posłużono się korelacją Spearmana, a dla odpowiedzi jakościowych (tak/nie) wykonano testy korelacji Chi Kwadrat Pearsona.

1. Częstotliwość realizacji treści matematycznych stosowana przez nauczycieli w przedszkolach Montessori i tradycyjnych

Ważnym elementem procesu kształtowania kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną jest częstotliwość, z jaką nauczyciele realizują treści matematyczne zawarte w Podstawie Programowej Wychowania Przedszkolnego.

Wyniki przeprowadzonych badań zamieszczono w tabeli nr 50.

Tabela nr 50 częstotliwość realizowania treści matematycznych przez nauczycieli w przedszkolach Montessori i tradycyjnych (zestawienie procentowe)¹⁹⁹

treści matematyczne	Przedszkole Montessori				Przedszkole tradycyjne			
	codziennie	3-4 razy w tygodniu	1-2 razy w tygodniu	rzadziej niż raz w tygodniu	codziennie	3-4 razy w tygodniu	1-2 razy w tygodniu	rzadziej niż raz w tygodniu
treści matematyczne – ogólnie (całościowo)	81,4	15,7	2,9	-	35,7	41,4	22,9	-
dotyczące rozwijania umiejętności liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego	58,6	35,7	5,7	-	41,4	40,0	18,6	-
dotyczące rozwijania umiejętności wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania, przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych	21,4	55,7	20,0	2,9	20,0	45,7	31,4	-
dotyczące rozwijania umiejętności ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi	8,6	40,0	37,1	14,3	15,7	27,1	54,3	2,9
dotyczące rozwijania umiejętności rozróżniania lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów	18,6	22,9	45,7	12,9	34,3	34,3	28,6	2,9
dotyczące rozwijania orientacji dziecka w zakresie pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą	7,1	8,6	50,0	34,3	1,4	14,3	47,1	37,1
dotyczące rozwijania znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku	65,7	20,0	11,4	2,9	41,4	24,3	24,3	10,0

¹⁹⁹ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Wyniki przedstawione w tabeli nr 50 wskazują, że realizację treści matematycznych w pracy z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną zdecydowanie częściej deklarują nauczyciele z przedszkoli Montessori. Większość z nich (81,4%) codziennie podejmuje zagadnienia matematyczne w pracy z dziećmi. Tylko 2,9% badanych określiło tę częstotliwość jako 1-2 razy w tygodniu.

Natomiast w placówkach tradycyjnych większość badanych nauczycieli (41,4%) odpowiedziało, że treści matematyczne realizuje 3-4 razy w tygodniu. Spory jest także (w porównaniu z przedszkolami Montessori) odsetek odpowiedzi wskazujących częstotliwość 1-2 razy w tygodniu (22,9%).

Pozytywnie należy interpretować fakt, że badania nie wykazały w obu rodzajach placówek sytuacji, kiedy edukacja matematyczna byłaby prowadzona rzadziej niż raz w tygodniu.

Codziennie badani nauczyciele z obu typów przedszkoli realizują przede wszystkim treści dotyczące rozwijania znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia i miesięcy w roku (65,7% przedszkola Montessori i 41,4% przedszkola tradycyjne) oraz treści z zakresu rozwijania umiejętności liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego (58,6% przedszkola Montessori i 41,4% przedszkola tradycyjne).

Oba wskazane bloki tematyczne częściej realizują nauczyciele montessoriańscy. Prowadzeniu edukacji z zakresu orientacji w czasie służą z pewnością zajęcia wstępne realizowane zgodnie z zasadami Montessori, które obejmują swobodne wypowiedzi dzieci dotyczące dnia poprzedniego oraz pracę z kalendarzem. Natomiast wysoką częstotliwość ćwiczeń w przeliczaniu i poznawaniu monografii liczb pierwszej dziesiątki można wyjaśniać bardzo bogatą ofertą montessoriańskich materiałów rozwojowych z tego działu.

Z dużą regularnością, głównie 3-4 razy w tygodniu prowadzona jest także edukacja matematyczna z zakresu rozwijania umiejętności wyznaczania przez dzieci wyniku dodawania i odejmowania przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych (55,7% przedszkola Montessori i 45,7% przedszkola tradycyjne).

Zdecydowanie najrzadziej badani nauczyciele realizują treści dotyczące rozwijania orientacji dziecka w zakresie pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia. Codziennie czyni to zaledwie 7,1% nauczycieli z przedszkoli Montessori i tylko 1,4% z przedszkoli tradycyjnych. Te treści matematyczne dominują przy wskazaniach częstotliwości określonej jako rzadziej niż raz w tygodniu (34,3% przedszkola Montessori i 37,1% przedszkola tradycyjne).

Uzyskane rezultaty mogą wyjaśniać niskie wyniki, jakie osiągnęły badane dzieci w zadaniach wymagających dokonania pomiaru krokami, stopą za stopą, dłonią czy przy użyciu linijki. Są także potwierdzeniem sformułowanych w wyniku analizy badań wniosków o braku doświadczeń dzieci w zakresie mierzenia i posługiwania się przyrządami mierniczymi.

Z analizy statystycznej wynika, że częstotliwości realizowania poszczególnych treści matematycznych w obu rodzajach placówek nie różnicuje staż pracy nauczyciela²⁰⁰ ani posiadane kwalifikacje dodatkowe²⁰¹.

Zdiagnozowana częstotliwość realizacji poszczególnych treści matematycznych może budzić niepokój i implikować negatywne skutki, na które zwraca uwagę K. Kamińska pisząc, że „nauczyciele skupiają się na konkretnych umiejętnościach dzieci, głównie biegłości rachunkowej, zaniedbując powiązanie edukacji matematycznej z rozwojem matematycznego myślenia. W tej fazie rozwoju proces myślenia dziecka uzależniony jest bardziej od jego bezpośrednich spostrzeżeń oraz doświadczeń niż od operacji umysłowych. Natomiast nabywanie jedynie sprawności rachunkowej oddala dziecko od myślenia matematycznego” (Kamińska, 2012, s.6, także Waloszek 1993).

Należałoby zatem w praktyce przedszkolnej zintensyfikować działania, które będą stymulowały przede wszystkim rozwój matematycznego myślenia dzieci i wprowadzały je w świat logicznej argumentacji.

2. Metody pracy nauczyciela stosowane w realizacji treści matematycznych w przedszkolach Montessori i tradycyjnych

Z poziomem kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną istotnie związane są wykorzystywane przez nauczycieli metody pracy dydaktycznej.

Zgodnie z omówionymi w rozdziale IV założeniami metodycznymi systemu Montessori analizie poddano stosowanie przez nauczycieli metod kształcenia właściwych dla pedagogiki montessoriańskiej.

²⁰⁰ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$ przedszkole Montessori: całościowo $p = 0,075$; kolejne treści $p = 0,513$; $p = 0,733$; $p = 0,680$; $p = 0,070$; $p = 0,825$; $p = 0,402$; przedszkole tradycyjne: całościowo $p = 0,277$; kolejne treści $p = 0,222$; $p = 0,529$; $p = 0,791$; $p = 0,515$; $p = 0,061$; $p = 0,136$

²⁰¹ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$ przedszkole Montessori: całościowo $p = 0,614$; kolejne treści $p = 0,847$; $p = 0,642$; $p = 0,188$; $p = 0,461$; $p = 0,724$; $p = 0,876$; przedszkole tradycyjne: całościowo $p = 0,763$; kolejne treści $p = 0,303$; $p = 0,203$; $p = 0,729$; $p = 0,259$; $p = 0,261$; $p = 0,308$

Wszyscy badani nauczyciele deklarują, że w pracy z najstarszymi dziećmi wykorzystują każdą z trzech wskazanych metod kształcenia, czyli asymilacji wiedzy, samodzielnego dochodzenia do wiedzy oraz metody praktyczne.

Z pierwszej grupy metod jako stosowaną najczęściej nauczyciele wymienili przede wszystkim metodę słowną, czyli trzystopniową lekcję nazw (67,1%). Natomiast najrzadziej zdecydowana większość nauczycieli (80,0%) opiera swe oddziaływania edukacyjne na rozmowie²⁰².

Jest to bardzo pozytywna sytuacja dydaktyczna, gdyż po pierwsze zapobiega nadmiernemu werbalizmowi w pracy z dziećmi przedszkolnymi. A ponadto trzystopniowa lekcja nazw jest skuteczniejsza, ponieważ zapewnia skojarzenie pomiędzy prezentacją a odpowiednim słowem oraz umożliwia dziecku osiągnięcia stanu polaryzacji uwagi.

Wśród stosowanych metod samodzielnego dochodzenia do wiedzy zdecydowanie przeważa indywidualna praca z materiałem rozwojowym (85,7% wskazań nauczycieli). Rzadko natomiast w placówkach Montessori stosowane są gry dydaktyczne (78,6% odpowiedzi)²⁰³.

Zgodnie z oczekiwaniami wyraźnie najczęściej stosowaną metodą praktyczną są ćwiczenia z materiałem rozwojowym (90,0% odpowiedzi nauczycieli)²⁰⁴. Dowodzi to o wysokim przekonaniu pedagogów o skuteczności i efektywności materiałów Montessori. Dodatkowe materiały dydaktyczne są postrzegane tylko jako uzupełnienie czy poszerzenie pomocy montessoriańskich i działania z nimi odbywają się rzadziej.

Z analizy statystycznej wynika, że częstotliwość stosowanych przez nauczycieli montessoriańskich metod asymilacji wiedzy²⁰⁵, metod samodzielnego dochodzenia do wiedzy²⁰⁶ oraz metod praktycznych²⁰⁷ nie różnicuje staż pracy nauczyciela ani posiadane kwalifikacje dodatkowe.

Zagadnienie stosowanych metod pracy edukacyjnej w realizacji treści matematycznych podjęto również w odniesieniu do nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych.

²⁰² Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

²⁰³ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

²⁰⁴ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

²⁰⁵ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$ staż pracy $p = 0,788$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,681$

²⁰⁶ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$ staż pracy $p = 0,305$ kwalifikacje dodatkowe $p = 0,960$

²⁰⁷ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$ staż pracy $p = 0,348$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,169$

Cała grupa respondentów zadeklarowała, że w pracy z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną wykorzystuje wszystkie wskazane metody kształcenia, czyli metody słowne, percepcyjne, czynne oraz aktywizujące.

Z pierwszej grupy metod jako stosowane najczęściej nauczyciele na pierwszym miejscu wymienili przede wszystkim objaśnienia i instrukcje (57,1%). Natomiast najrzadziej większość nauczycieli (60,0%) opiera swe oddziaływania dydaktyczne na rozmowie²⁰⁸.

Należy pozytywnie ocenić taki dobór metod nauczania praktykowany przez nauczycieli w tradycyjnych przedszkolach odnośnie edukacji matematycznej. Objaśnienia i instrukcje są bowiem najskuteczniejsze podczas kształtowania umiejętności matematycznych, takich jak posługiwanie się linijką, mierzenie objętości płynów, orientacja w przestrzeni i posługiwanie się kalendarzem.

Rozmowę czy opowiadanie natomiast można stosować sporadycznie np. przybliżając dzieciom historię liczb. Jednakże taka opowieść powinna, jak sugeruje K. Kamińska „stanowić wstęp do rozbudzania dziecięcej ciekawości zapisem graficznym liczb pojawiających się w najbliższym otoczeniu dziecka” (Kamińska, 2012, s.7).

Z metod percepcyjnych najczęściej stosowaną w przedszkolu tradycyjnym jest pokaz i obserwacja (67,4% odpowiedzi), a najrzadziej (32,6%) metoda przykładu²⁰⁹. Zdiagnozowany dobór metod oglądowych należy uznać jako całkowicie słuszny. Preferowany przez badanych pokaz i obserwacja stanowią bowiem punkt wyjścia w działalności poznawczej dziecka i wyzwają jego aktywność własną.

Najczęściej wykorzystywaną przez nauczycieli metodą czynną jest metoda zadań stawianych dziecku do wykonania (32,9%). Nieco mniej popularne były wskazania samodzielnych doświadczeń (22,9%) oraz metody ćwiczeń (21,4%). Dość zaskakującym jest natomiast fakt, że przy wskazaniach najrzadziej stosowanej metody czynnej dominuje metoda Wspomagania Rozwoju Umysłowego Dzieci wg E. Gruszczyk-Kolczyńskiej (37,1%)²¹⁰.

Z pewnością dobrą edukacyjnie jest sytuacja powszechnego praktykowania metody zadań stawianych dziecku do rozwiązania. Dzięki temu jest ono pobudzane do poszukiwań, odkrywania, tworzenia i badania. Ponadto rozwiązywanie zadania wiąże się z pokonywaniem trudności. Trzeba jednak pamiętać o właściwym przygotowaniu dzieci do przezwycięzania tych problemów tak, by potrafiły one w miarę swoich indywidualnych możliwości

²⁰⁸ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

²⁰⁹ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

²¹⁰ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

pokonywać je samodzielnie i z zaangażowaniem własnej pomysłowości, gdyż tylko wtedy rozwiązanie zadania dziecko będzie kojarzyło z odczuciem satysfakcji, z samorealizacją i z czerpaniem radości z wysiłku intelektualnego.

Należy jednak pamiętać, że zadania stawiane do wykonania mają na celu pobudzanie aktywności dzieci w kierunku z góry przewidzianym przez nauczyciela. W tym kontekście nasuwa się sugestia, aby w praktyce edukacyjnej równie często realizować metodę samodzielnych doświadczeń, która jest skierowana na rozwijanie własnej inicjatywy dziecka podejmującego działalność, a jak wynika również z obserwacji M. Fiedler (1983) jest ona zdecydowanie za mało wykorzystywana. Dziecko działające znajduje się w sytuacji osoby kierującej swoim postępowaniem, co wywołuje jego zadowolenie i jednocześnie pobudza aktywność umysłową. Poprzez działanie unaocznia ono sobie, w sposób jasny i zrozumiały to, co nie zawsze mogłoby przyswoić poprzez prezentację werbalną.

Ankietowani nauczyciele wskazali również, że w edukacji matematycznej dzieci kończących edukację przedszkolną stosują metody aktywizujące. Wymienili takie metody jak: metoda projektów, metoda gier dydaktycznych, burza mózgów, linia czasu oraz metoda prawda-falsz. Większość ankietowanych nauczycieli (77,1%)²¹¹ nie udzieliła jednak odpowiedzi na to pytanie otwarte.

Należy zachęcać nauczycieli do regularnego sięgania po takie metody pracy dydaktycznej, które wzbudzają aktywność matematyczną dziecka, mobilizują jego zainteresowania i uwagę. Dzięki temu dziecko dużo łatwiej poradzi sobie nawet z trudnym niejednokrotnie materiałem matematycznym, bo jak wskazują liczne badania i obserwacje dydaktyczne znacznie dłużej pamięta się informacje zdobyte w wyniku własnych poszukiwań, niż gotowe, podane przez nauczyciela.

Z analizy statystycznej wynika, że dobór i częstotliwość stosowania metod słownych²¹², percepcyjnych²¹³, czynnych²¹⁴ oraz aktywizujących²¹⁵ nie są różnicowane przez staż pracy nauczyciela ani posiadane kwalifikacje dodatkowe.

²¹¹ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

²¹² Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$ staż pracy $p = 0,614$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,723$

²¹³ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$ staż pracy $p = 0,161$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,187$

²¹⁴ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$ staż pracy $p = 0,732$ kwalifikacje dodatkowe $p = 0,177$

²¹⁵ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$ staż pracy $p = 0,381$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,109$

3. Formy pracy nauczyciela stosowane w realizacji treści matematycznych w przedszkolach Montessori i tradycyjnych

Warunkiem skutecznie prowadzonej edukacji matematycznej w przedszkolu jest także dobór właściwych form pracy.

W przedszkolach Montessori nauczyciele zdecydowanie najczęściej (81,4%) deklarowali, że stosują pracę indywidualną, podczas której udzielają lekcji podstawowej i trójstopniowej lekcji nazw. Natomiast jako najrzadziej stosowaną wskazali głównie pracę zespołową, czyli pracę w laboratorium lub własną z wybranym tematem (84,3%)²¹⁶.

Uzyskany wynik jest całkowicie zrozumiały, gdyż w metodzie Montessori podstawą jest praca własna dziecka. Jej celem jest wdrożenie do skoncentrowanego działania, w czasie którego dziecko zdobywa nie tylko nową wiedzę i umiejętności, ale także wzmacnia poczucie własnej wartości, uczy się radzenia sobie z rzeczywistością oraz nabywa kompetencje społeczne. Dzięki przyzwyczajeniu do skoncentrowanej pracy ćwiczy wytrwałość, dążenie do wyznaczonego celu, niezawodność oraz gotowość do podjęcia wysiłku, aby wykonać zadanie.

Z analizy statystycznej wynika, że dobór stosowanych form pracy edukacyjnej nie jest różnicowany przez staż pracy nauczyciela ani posiadane kwalifikacje dodatkowe²¹⁷.

W przedszkolach tradycyjnych dominującą formą pracy edukacyjnej deklarowaną przez nauczycieli jest również praca indywidualna dziecka, którą jako najczęściej stosowaną uznało 55,7% ankietowanych. Na uwagę zasługuje również fakt, że 24,3% badanych jako najbardziej preferowaną wskazało pracę grupową, która ma szczególne znaczenie w realizacji nie tylko celów kształcenia, ale także i wychowania. Sprzyja ona osiągnięciu celów społeczno-wychowawczych, wdraża do poczucia odpowiedzialności, umiejętności podporządkowania się, gotowości udzielania pomocy innym oraz partnerstwa i kompromisu. Ponadto rozwija aktywność poznawczą oraz samodzielność dzieci. Zwiększa również ich wiarę we własne siły, obiektywizuje proces samooceny i sprzyja obiektywizmowi w ocenianiu innych. Jako zdecydowanie najrzadziej wykorzystywaną większość badanych nauczycieli (58,6%) wymieniła pracę zespołową²¹⁸.

²¹⁶ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

²¹⁷ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$ staż pracy $p = 0,686$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,925$

²¹⁸ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Z analizy statystycznej wynika, że dobór stosowanych form pracy edukacyjnej nie jest różnicowany przez staż pracy nauczyciela ani posiadane kwalifikacje dodatkowe²¹⁹.

4. Praca z dzieckiem z uzdolnieniami matematycznymi w przedszkolu Montessori i tradycyjnym

Zdecydowana większość badanych nauczycieli zarówno z przedszkoli Montessori (80,0%), jak i przedszkoli tradycyjnych (77,1%)²²⁰ dostrzegła, że w prowadzonych przez siebie grupach są dzieci uzdolnione matematycznie.

Potwierdzają to badania E. Gruszczyk-Kolczyńskiej (2012a), które wykazały zarysowujące się uzdolnienia matematyczne u 2/3 badanych dzieci przedszkolnych. Podobne wnioski wypływają z badań olsztyńskich zrealizowanych w ramach projektu „Matematycznie uzdolnione przedszkolaki w Olsztynie” przez E. Zielińską, J. Jastrzębską i Cz. Polakowską (2012).

Obecność dzieci z uzdolnieniami matematycznymi implikuje podejmowanie przez nauczycieli dodatkowych działań ukierunkowanych na rozwijanie i poszerzanie predyspozycji dzieci. E. Stucki (1978) wyjaśnia bowiem, że w procesie rozwoju zdolności matematycznych, a zwłaszcza przyspieszaniu tego rozwoju nie wystarcza naturalna aktywność dziecka. „Potrzebne jest stymulowanie w sposób optymalny rozwojem tych zdolności poprzez właściwe organizowanie procesu dydaktycznego, uwzględniającego strukturę zdolności matematycznych i wszystkie czynniki determinujące ich rozwój” (Stucki, 1978, s.166).

Działania badanych nauczycieli podejmowane w pracy z dzieckiem uzdolnionym matematycznie przedstawiono w tabeli nr 51.

²¹⁹Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$ staż pracy $p = 0,398$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,288$

²²⁰ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Tabela nr 51 Działania edukacyjne stosowane w pracy z dzieckiem uzdolnionym matematycznie (wybrano dominujące formy)²²¹

Częstotliwość podejmowanych działań	Nauczyciele z przedszkoli Montessori	Nauczyciele z przedszkoli tradycyjnych
najczęściej	stosowanie dodatkowych zadań o podwyższonym stopniu trudności – 38,6%	stosowanie dodatkowych zadań o podwyższonym stopniu trudności – 62,9%
bardzo często	wspólne rozwiązywanie rebusów, łamigłówek matematycznych wraz ze stymulowaniem dziecka do wyjaśniania, uzasadniania swoich rozwiązań - 25,7%	wspólne rozwiązywanie rebusów, łamigłówek matematycznych wraz ze stymulowaniem dziecka do wyjaśniania, uzasadniania swoich rozwiązań – 31,4% organizowanie sytuacji problemowych wymagających rozwiązania różnorodnych problemów matematycznych - 22,9%
dość często	wprowadzanie i wyjaśniania podstawowych pojęć matematycznych w zabawach – 25,7%	tworzenie gier z ustalaniem reguł - 25,7% stosowanie zabaw logicznych – 21,4
Często	stosowanie zabaw logicznych – 35,7% stosowanie dodatkowych zadań o podwyższonym stopniu trudności – 25,7%	stosowanie zabaw logicznych – 28,6% wprowadzanie i wyjaśniania podstawowych pojęć matematycznych w zabawach - 22,9%

Zebrane wyniki wskazują, że nauczyciele niezależnie od rodzaju placówki, w jakiej pracują podejmują zbieżne oddziaływania edukacyjne wobec dzieci uzdolnionych matematycznie.

Jako stosowane najczęściej wskazano przede wszystkim: wykorzystywanie dodatkowych zadań o podwyższonym stopniu trudności (62,9% przedszkole tradycyjne i 38,6% przedszkole Montessori). Natomiast bardzo często stosowane jest wspólne rozwiązywanie rebusów, łamigłówek matematycznych wraz ze stymulowaniem dziecka do wyjaśniania, uzasadniania swoich rozwiązań (31,4% przedszkole tradycyjne i 25,7% przedszkole Montessori).

Nieco większe bogactwo i urozmaicenie stosowanych działań prezentują nauczyciele z przedszkoli tradycyjnych, którzy wymienili jeszcze organizowanie sytuacji problemowych wymagających rozwiązania różnorodnych problemów matematycznych oraz tworzenie gier z ustalaniem reguł.

²²¹ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

W przedszkolach Montessori rozwój indywidualnych uzdolnień dzieci – oprócz oddziaływań nauczyciela zapewnia ogromne bogactwo materiałów matematycznych zgromadzonych w sali, które różnią się poziomem stopnia trudności. W tej sytuacji zdolne dziecko przedszkolne zgodnie ze swoimi możliwościami może pracować z materiałem, który wyraźnie wykracza ponad treści zawarte w Podstawie Programowej Wychowania Przedszkolnego.

Na zakończenie należy zauważyć, że spośród podanych propozycji działań edukacyjnych stosowanych w pracy z dzieckiem uzdolnionym matematycznie tylko pojedyncze wskazania dotyczyły wprowadzania wyliczanek oraz opracowywania specjalnych planów pracy z dzieckiem zdolnym.

Z analizy statystycznej wynika, że rodzaje działań edukacyjne podejmowanych w pracy z dzieckiem uzdolnionym matematycznie przez nauczycieli w przedszkolu tradycyjnym są różnicowane przez staż pracy zawodowej²²². Jest to zależność proporcjonalna o słabej sile²²³. Nauczyciele o dłuższym stażu wykazali większą pomysłowość i bogatszy repertuar (wynikające zapewne z doświadczenia w pracy zawodowej) w organizowaniu pracy z uczniem zdolnym.

Natomiast staż pracy oraz posiadane dodatkowe kwalifikacje zawodowe nie różnicują oddziaływań edukacyjnych wobec dziecka z uzdolnieniami podejmowanych przez nauczycieli montessoriańskich²²⁴.

5. Praca z dzieckiem z trudnościami w edukacji matematycznej w przedszkolu Montessori i tradycyjnym

Każde dziecko w wieku przedszkolnym prezentuje sobie tylko właściwe tempo i rytm rozwoju i związane z tym osiągnięcia rozwojowe w zakresie funkcji psychoruchowych, odzwierciedlające się w wykonywanych czynnościach. Stąd też w grupie przedszkolnej są dzieci, które wykazują wyjątkowo wysokie umiejętności matematyczne (była o tym mowa powyżej), jak również takie, które doświadczają pierwszych niepowodzeń związanych z matematyką. W tej sytuacji bardzo ważne jest wczesne zdiagnozowanie trudności edukacyjnych, gdyż edukacja przedszkolna stanowi fundament sukcesów w dalszej nauce,

²²² Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,050$

²²³ Wskaźnik korelacji r Pearsona $0,235$

²²⁴ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$ staż pracy $p = 0,454$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,333$

a model podejścia dydaktyczno-wychowawczego do dziecka w wieku przedszkolnym odbija się na całym jego życiu.

Zdecydowana większość badanych nauczycieli z obu placówek zauważa, że w prowadzonej przez siebie grupie są dzieci z trudnościami w edukacji matematycznej (przedszkola tradycyjne 91,4% ankietowanych; przedszkola Montessori – 81,4%)²²⁵.

Jednakże obserwowane trudności zdaniem nauczycieli występują sporadycznie (90,0% - przedszkola Montessori; 77,1% - przedszkola tradycyjne). Tylko jeden z badanych (0,7%) uważa, że są one bardzo częste²²⁶.

Z analizy statystycznej wynika, że dostrzegana przez nauczycieli częstotliwość występowania trudności w edukacji matematycznej w obu typach placówek nie jest różnicowana przez staż pracy i posiadane kwalifikacje dodatkowe²²⁷.

W wyniku przeprowadzonych badań ustalono rodzaje trudności, jakich doświadczają w uczeniu się matematyki dzieci kończące edukację przedszkolną oraz ich nasilenie. Przedstawia to tabela nr 52.

²²⁵ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

²²⁶ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

²²⁷ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; przedszkole Montessori staż pracy $p = 0,848$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,806$; przedszkole tradycyjne staż pracy $p = 0,586$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,102$

Tabela nr 52 Trudności w edukacji matematycznej i częstotliwość ich występowania w opinii nauczycieli²²⁸

Rodzaj trudności	nie występuje		rzadko		często		bardzo często	
	PM	PT	PM	PT	PM	PT	PM	PT
podwójne liczenie tego samego przedmiotu	72,9	37,1	24,3	40,0	2,9	20,0	-	2,9
„przeskakiwanie”, pomijanie przedmiotów w trakcie liczenia	40,0	32,9	34,3	27,1	15,7	32,9	10,0	7,1
błędy w rozpoznawaniu brakującej liczby w ciągu liczbowym jako miary umiejętności przeliczania sekwencyjnego liczenia	31,4	41,4	60,0	25,7	8,6	30,0	-	2,9
mylenie liczebników głównych	25,7	50,0	60,0	41,4	14,3	7,1	-	1,4
błędne rozpoznawanie cyfr i liczb oraz ich nazywanie	17,1	37,7	55,7	39,1	22,9	17,4	4,3	5,8
trudności w liczeniu wspak jako miary pamięci operacyjnej	30,0	31,4	51,4	27,1	15,7	32,9	2,9	8,6
mylenie dodawania i odejmowania	32,9	40,0	55,7	44,3	10,0	14,3	1,4	1,4
brak rozumienia dodawania jako powiększania i odejmowania jako pomniejszania	30,0	48,6	25,7	40,0	27,1	8,6	17,1	2,9
brak umiejętności wykonywania działań w pamięci	17,1	25,7	28,6	14,3	32,9	37,1	21,4	22,9
mylenie liczebników porządkowych	35,7	34,3	54,3	37,1	8,6	21,4	1,4	7,1
błędy w ustalaniu zbiorów równolicznych	44,3	45,7	51,4	48,6	4,3	5,7	-	-
błędy podczas tworzenia zbiorów równolicznych	45,7	50,0	52,9	48,6	1,4	1,4	-	-

²²⁸ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

trudności w porównywaniu liczebności zbiorów	28,6	50,7	60,0	43,5	11,4	5,8	-	-
błędy w rozróżnianiu prawej i lewej strony	7,1	18,6	32,9	30,0	45,7	35,7	14,3	15,7
trudności w ustalaniu położenia przedmiotów w sytuacjach rzeczywistych	27,1	48,6	60,0	42,9	8,6	7,1	4,3	1,4
trudności w ustalaniu położenia przedmiotów na kartce papieru	20,0	44,3	58,6	40,0	15,7	11,4	5,7	4,3
trudności w porządkowaniu elementów zgodnie z gradacją danej cechy wielkościowej	43,5	48,6	52,2	41,4	2,9	8,6	1,4	1,4
trudności w mierzeniu prostymi sposobami (krokami, dłonią, stopą)	31,4	51,4	41,4	25,7	27,1	21,4	-	1,4
trudności w posługiwaniu się linijką	32,9	44,3	35,7	18,6	27,1	30,0	4,3	7,1
trudności w porządkowaniu chronologicznym pór dnia, dni tygodnia, miesięcy oraz pór roku	25,7	38,6	38,6	30,0	25,7	22,9	10,0	8,6
błędne rozumienie terminów opisujących podstawowe pory dnia	54,3	52,9	31,4	37,1	14,3	8,6	-	1,4
trudności w rozpoznawaniu pór roku	67,1	60,0	27,1	40,0	5,7	-	-	-
trudności w ustalaniu kolejności wydarzeń (np. w historyjce obrazkowej)	38,6	48,6	51,4	42,9	5,7	5,7	4,3	2,9
inne	-	-	-	-	-	-	-	-

PM – przedszkole Montessori PT – przedszkole tradycyjne

Ankietowani nauczyciele z przedszkoli Montessori uważają, że trudnościami w edukacji matematycznej, które występują bardzo często w grupach dzieci kończących edukację przedszkolną są przede wszystkim: brak rozumienia dodawania jako powiększania i odejmowania jako pomniejszania, brak umiejętności wykonywania działań w pamięci oraz błędy w rozróżnianiu prawej i lewej strony.

Natomiast badani nie dostrzegają większych kłopotów dzieci dotyczących podwójnego liczenia tego samego przedmiotu, rozpoznawania pór roku oraz rozumienia terminów opisujących podstawowe pory dnia.

Pedagodzy pracujący w przedszkolach tradycyjnych jako trudności bardzo często występujące w edukacji matematycznej wskazali – podobnie jak nauczyciele montessoriańscy brak umiejętności wykonywania działań w pamięci oraz błędy w rozróżnianiu prawej i lewej strony.

Zdaniem badanych nauczycieli dzieci kończące edukację przedszkolną nie mają natomiast problemów z: liczebnikami głównymi, tworzeniem zbiorów równolicznych, porównywaniem liczebności zbiorów, rozumieniem terminów opisujących podstawowe pory dnia oraz rozpoznawaniem pór roku.

Dość zaskakujące natomiast jest (w kontekście wyników uzyskanych z testu dla dzieci), że zdaniem 51,4% badanych nauczycieli dzieci kończące edukację przedszkolną nie mają trudności z mierzeniem długości.

Ankietowani nauczyciele z przedszkoli tradycyjnych w pytaniu otwartym wskazali jeszcze takie (niewymienione w ankiecie) problemy obserwowane u dzieci, jak trudności w rozwiązywaniu zadań z treścią, brak zrozumienia pojęcia liczby, mylenie dodawania i odejmowania w zapisie symbolicznym, liczenie powyżej 10, trudności z odwzorowywaniem figur geometrycznych, zaburzenia koordynacji wzrokowo- ruchowej, sprawności manualnej, percepcji wzrokowej, niski poziom rozumowania przyczynowo- skutkowego, słaba koncentracja uwagi oraz niska odporność emocjonalna. Należy jednocześnie zauważyć, że większość badanych (68,6%) nie udzieliła odpowiedzi na to pytanie.

Natomiast nauczyciele z przedszkoli Montessori dostrzegają jeszcze takie trudności w edukacji matematycznej dzieci, jak: brak rozumienia pojęć „jutro”, „wczoraj”, mylenie znaków cyfr 6 i 9 (odbicia lustrzane), trudności w kojarzeniu symbolicznego i kardynalnego aspektu liczby, stosowanie znaków równości i nierówności, trudności w rozumieniu upływu czasu oraz jego rytmiczności, mylenie znaków działań arytmetycznych, rozwiązywanie zadań tekstowych, zbyt wolne tempo pracy oraz brak odporności emocjonalnej.

Z analizy statystycznej wynika, że dostrzeganie przez nauczycieli rodzajów trudności w edukacji matematycznej dzieci kończących edukację przedszkolną w obu typach placówek nie jest różnicowane przez staż pracy nauczyciela ani posiadane kwalifikacje dodatkowe²²⁹.

Wszyscy badani nauczyciele zadeklarowali, że podejmują działania edukacyjne ukierunkowane na pomoc dzieciom, które mają trudności w uczeniu się matematyki.

Tabela nr 53 Działania edukacyjne stosowane w pracy z dzieckiem z trudnościami w uczeniu się matematyki (wybrano dominujące formy)²³⁰

Częstotliwość podejmowanych działań	Nauczyciele z przedszkoli Montessori	Nauczyciele z przedszkoli tradycyjnych
najczęściej	uatrakcyjnianie zajęć ciekawymi pomocami - 24,3%; stosowanie konkretów w liczeniu zgodnie z potrzebami dziecka – 20,0%	zróżnicowanie poziomu trudności zadań – 35,7% dodatkowe objaśnienia do pracy – 17,1%
bardzo często	intensyfikacja sytuacji praktycznych związanych z liczeniem, rozwijających intuicje matematyczne – 27,1%; zróżnicowanie poziomu trudności zadań – 20,0%.	stosowanie konkretów w liczeniu zgodnie z potrzebami dziecka – 15,7%; dodatkowe objaśnienia do pracy – 12,9%; uatrakcyjnianie zajęć ciekawymi pomocami- 12,9%.
dość często	dodatkowe objaśnienia do pracy – 34,3%; rozwijanie myślenia operacyjnego dzieci – 15,7%; uatrakcyjnianie zajęć ciekawymi pomocami – 15,7%.	dodatkowe ćwiczenia wyrównujące - 22,9%; zapewnienie dzieciom dłuższego czasu pracy – 20,0%; rozwijanie myślenia operacyjnego dzieci - 11,4%
często	wskazówki do pracy w domu dla rodziców – 30,0; zróżnicowanie poziomu trudności zadań – 20,0% zapewnienie dzieciom dłuższego czasu pracy – 15,7%	zróżnicowanie poziomu trudności zadań – 18,6% wskazówki do pracy w domu dla rodziców – 18,6% dodatkowe objaśnienia do pracy – 15,7% ²³¹ .

²²⁹ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; przedszkole Montessori staż pracy $p = 0,447$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,528$; przedszkole tradycyjne staż pracy $p = 0,425$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,840$

²³⁰ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

²³¹ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Najbardziej powszechnymi deklarowanymi działaniami wspierającymi w przedszkolach montessoriańskich są: uatrakcyjnianie zajęć ciekawymi pomocami oraz stosowanie konkretów w liczeniu zgodnie z potrzebami dziecka, co zapewnia bogactwo materiałów rozwojowych. Ponadto bardzo często nauczyciele różnicują poziom trudności zadań, co koresponduje z jedną z najważniejszych zasad pedagogiczno – wychowawczych w systemie Montessori, czyli zasadą indywidualizacji.

Natomiast bardzo rzadko (tylko w pojedynczych wskazaniach) zdiagnozowano stosowanie przez badanych nauczycieli montessoriańskich takich form, jak dodatkowe zorganizowane zajęcia wyrównawcze, stosowanie ćwiczeń doskonalących spostrzeganie wzrokowe oraz rozwijających sprawność manualną.

Wśród deklarowanych działań nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych przeważają: zróżnicowanie poziomu trudności zadań oraz dodatkowe objaśnienia do pracy. Uzyskane wyniki badań dowodzą, że nauczyciele mają świadomość, iż zadania zbyt trudne mogą zniechęcać dzieci do dalszego działania. Przyczyną trudności może być także niezrozumiałe, zbyt skomplikowane polecenie. Dlatego tak istotne jest stosowanie uzupełniających wyjaśnień podawanych w prostszej formie, stawianie jasno sformułowanych pytań, unikanie trudnych, czy bardziej abstrakcyjnych pojęć.

Badani nauczyciele z przedszkoli tradycyjnych bardzo rzadko natomiast (tylko w pojedynczych wskazaniach) wymienili takie działania jak: stosowanie ćwiczeń doskonalących spostrzeganie wzrokowe, ukierunkowanych na doskonalenie koordynacji wzrokowo - ruchowej i sprawność manualną.

Z analizy statystycznej wynika, że w obu typach placówek rodzaje działań podejmowanych w celu pomocy dzieciom z trudnościami w nauce matematyki nie są różnicowane przez staż pracy ani przez posiadane kwalifikacje dodatkowe²³².

Uzyskane wyniki badań świadczą, że nauczyciele w obu typach przedszkoli stosują podobne, powszechnie opisywane sposoby wspierania dzieci z trudnościami w uczeniu się matematyki. Korespondują one m.in. z wnioskami B. Dudel (2012) dotyczącymi pracy z uczniami klas 1-3, którzy doświadczają niepowodzeń w edukacji matematycznej.

²³² Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; przedszkole Montessori staż pracy $p = 0,778$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,464$; przedszkole tradycyjne staż pracy $p = 0,619$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,222$

6. Działania edukacyjne nauczycieli podejmowane w celu podnoszenia poziomu kompetencji matematycznych dzieci

Kompetencje matematyczne dzieci kończących edukację przedszkolną są ważnym elementem ich gotowości do nauki w szkole. Stąd też Podstawa Programowa Wychowania Przedszkolnego nakłada na nauczyciela obowiązek wspomagania rozwoju intelektualnego dziecka wraz z edukacją matematyczną.

Wszyscy ankietowani nauczyciele z obu rodzajów placówek odpowiedzieli, że stosują działania edukacyjne podnoszące poziom kompetencji matematycznych dzieci. Rodzaje podejmowanych działań przedstawiono w tabeli nr 54.

Tabela nr 54 Działania edukacyjne podnoszące poziom kompetencji matematycznych dzieci (wybrano dominujące formy)²³³

Częstotliwość działań	nauczyciele z przedszkoli Montessori	nauczyciele z przedszkoli tradycyjnych
najczęściej	wykorzystywanie umiejętności matematycznych w sytuacjach dnia codziennego (praktyce życiowej) – 38,6% nieograniczanie etapu liczenia na palcach – 14,3% stosowanie indywidualnych zadań dodatkowych (zarówno dla dzieci z trudnościami w nauce matematyki, jak i uzdolnionych matematycznie) – 14,3%	wykorzystywanie umiejętności matematycznych w sytuacjach dnia codziennego (praktyce życiowej) – 35,7%, nieograniczanie etapu liczenia na palcach – 17,1%, stosowanie indywidualnych zadań dodatkowych (zarówno dla dzieci z trudnościami w nauce matematyki, jak i uzdolnionych matematycznie) – 15,7%
bardzo często	łączenie aktywności ruchowej z doświadczeniami matematycznymi – 18,6%, wykorzystywanie umiejętności matematycznych w sytuacjach dnia codziennego (praktyce życiowej) – 17,1% stosowanie metod nauczania zgodnie z preferencjami sensorycznymi dzieci (wzrokowcy, słuchowcy, kinestetycy) – 15,7%	wykorzystywanie umiejętności matematycznych w sytuacjach dnia codziennego (praktyce życiowej) – 25,7%, nieograniczanie etapu liczenia na palcach – 18,6%, stosowanie gier dydaktycznych – 15,7%

²³³ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

dość często	łączenie aktywności ruchowej z doświadczeniami matematycznymi – 30,0% stosowanie metod nauczania zgodnie z preferencjami sensorycznymi dzieci (wzrokowcy, słuchowcy, kinestetycy) -15,7%, wykorzystywanie umiejętności matematycznych w sytuacjach dnia codziennego (praktyce życiowej) – 14,3%	nieograniczanie etapu liczenia na palcach – 24,3%, łączenie aktywności ruchowej z doświadczeniami matematycznymi – 15,7%, stosowanie metod nauczania zgodnie z preferencjami sensorycznymi dzieci (wzrokowcy, słuchowcy, kinestetycy) – 15,7%
często	stosowanie metod nauczania zgodnie z preferencjami sensorycznymi dzieci (wzrokowcy, słuchowcy, kinestetycy) – 20,0% stosowanie pozytywnej motywacji, zachęty – 18,9%	łączenie aktywności ruchowej z doświadczeniami matematycznymi – 28,6%, prowadzenie zajęć korekcyjno- wyrównawczych – 15,7%

Najbardziej powszechnymi działaniami edukacyjnymi nauczycieli montessoriańskich, które mają podnosić poziom kompetencji matematycznych dzieci są zatem: wykorzystywanie umiejętności matematycznych w sytuacjach dnia codziennego (praktyce życiowej), stosowanie metod nauczania zgodnie z preferencjami sensorycznymi dzieci oraz łączenie aktywności ruchowej z doświadczeniami matematycznymi.

Tylko w pojedynczych wskazaniach zdiagnozowano prowadzenie przez badanych nauczycieli montessoriańskich takich działań edukacyjnych jak: stosowanie gier dydaktycznych, organizowanie zajęć korekcyjno-wyrównawczych oraz łączenie aktywności plastycznej i muzycznej z doświadczeniami matematycznymi.

W pytaniu otwartym nieliczni badani nauczyciele (28,6%) przedstawili jeszcze kilka innych propozycji działań, które służą podnoszeniu poziomu kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną. Należą do nich: częste rozwiązywanie zadań logicznych, rozwijanie myślenia operacyjnego i abstrakcyjnego, współpraca z rodzicami dzieci, rozwijanie zainteresowań matematycznych oraz stosowanie ćwiczeń doskonalących spostrzeganie wzrokowe oraz jak najwcześniejsze rozpoczynanie edukacji matematycznej. Ciekawą, choć pojedynczą propozycją było realizowanie zajęć czy prezentacji z zakresu matematyki prowadzonych przez dzieci dla dzieci.

Bardzo istotnym wydaje się być respektowanie przez nauczycieli montessoriańskich kanałów uczenia się dzieci, na co kładzie nacisk współczesna dydaktyka. Należy bowiem mieć na uwadze, że w każdej grupie dzieci są wzrokowcy, słuchowcy i czuciowcy (kinestetycy). Każde z nich ma tylko sobie właściwy sposób reagowania na informacje i każde preferuje

podświadomie jeden, czasami dwa, rzadziej trzy kanały sensoryczne w celu przetwarzania informacji z otaczającego świata.

Wyniki badań przedstawione w tabeli nr 54 wskazują, że - zgodnie z deklaracjami nauczycieli - najbardziej powszechnymi działaniami edukacyjnymi podnoszącymi poziom kompetencji matematycznych dzieci stosowanymi w przedszkolach tradycyjnych są: nieograniczanie etapu liczenia na palcach, wykorzystywanie umiejętności matematycznych w sytuacjach dnia codziennego (praktyce życiowej) oraz łączenie aktywności ruchowej z doświadczeniami matematycznymi.

Tylko w pojedynczych wskazaniach zdiagnozowano łączenie aktywności plastycznej i muzycznej z doświadczeniami matematycznymi.

W pytaniu otwartym badani nauczyciele z przedszkoli tradycyjnych przedstawili jeszcze wiele innych propozycji działań, które służą - ich zdaniem podnoszeniu poziomu kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną. Należą do nich: stosowanie Metody Wspomagania Rozwoju Umysłowego Dzieci, regularnie ćwiczenie koncentracji uwagi, myślenia logicznego oraz przyczynowo-skutkowego, doskonalenie percepcji wzrokowej, włączanie treści matematycznych do wszystkich innych działań edukacyjnych (transfer), angażowanie rodziców w pomoc dzieciom z trudnościami, systematyczne powtarzanie i utrwalanie omówionych zagadnień (zasada systematyczności).

Wielu nauczycieli podkreśliło konieczność indywidualizowania zadań zgodnie z aktualnymi możliwościami dzieci, zaznaczając jednocześnie, że w bardzo licznych grupach, z którymi pracują jest to niezwykle utrudnione.

Ciekawą, choć pojedynczą propozycją było wprowadzenie obowiązkowych zajęć z szachów.

Przeprowadzone badania pozwalają na sformułowanie optymistycznego wniosku, że nauczyciele w obu rodzajach placówek przedszkolnych deklarują stosowanie wiele różnorodnych i intensywnych działań w celu podnoszenia poziomu kompetencji matematycznych dzieci.

Jako podsumowanie można przytoczyć dwie wypowiedzi badanych nauczycieli. „Matematyka powinna mieć charakter zabawowy, „dziać się” w przestrzeni i na obiektach bliskich, lubianych przez dzieci. Powinna cechować się użytecznością dostrzeganą przez najmłodszych – najważniejsze jest czerpanie radości z zabawy – pracy – nauki” (wypowiedź nauczyciela z przedszkola nr 102 w Poznaniu).

I druga wypowiedź: „Nauka matematyki powinna być bliska życiu i najbliższemu otoczeniu dziecka, powinna być użyteczna, by pozwolić mu rozwiązywać problemy życiowe np. jak

w przyszłości policzyć ilość farby do pomalowania jednego pokoju”(wypowiedź nauczyciela z przedszkola Montessori nr 4 w Oleśnicy).

O skuteczności podejmowanych oddziaływań edukacyjnych świadczy wysoki poziom kompetencji matematycznych, jaki wykazały dzieci kończące edukację przedszkolną wykonując zadania z testu (analiza w rozdziale VI).

Z analizy statystycznej wynika, że w obu typach placówek rodzaje deklarowanych przez nauczycieli działań edukacyjnych mających na celu podnoszenie poziomu kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną nie są różnicowane przez staż pracy ani przez posiadane kwalifikacje dodatkowe²³⁴.

7. Działania nauczycieli dotyczące rozwijania własnych kompetencji w zakresie prowadzenia zajęć matematycznych z dziećmi

Ostatnia części ankiety dotyczyła podejmowanego przez nauczycieli doskonalenia zawodowego. D. Waloszek uważa, że potrzeby doskonalenia zawodowego „wynikają z postaw nauczycieli wobec przemian w świecie, w Polsce, w różnych dziedzinach życia” (Waloszek, 1998, s.43). Ponadto badaczka wyraźnie przestrzega, że „respektowanie programu rozwojowego dzieci nie pozwala na stosowanie wypróbowanych, „dobrych”, niezmiennych sposobów, form, środków realizacji edukacyjnych zamierzeń (wartości) przez wiele lat” (Waloszek, 1998, s.43).

W tym kontekście skierowano do ankietowanych nauczycieli pytanie dotyczące dostrzegania potrzeby podnoszenia własnych kompetencji dotyczących realizowania z dziećmi treści matematycznych.

Rozkład uzyskanych odpowiedzi przedstawiono w tabeli nr 55.

²³⁴ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; przedszkole Montessori staż pracy $p = 0,286$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,866$; przedszkole tradycyjne staż pracy $p = 0,632$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,161$

Tabela nr 55 Dostrzeganie przez nauczycieli potrzeby podnoszenia własnych kompetencji dotyczących realizowania z dziećmi treści matematycznych (zestawienie procentowe)²³⁵

	Czy dostrzega Pani / Pan potrzebę podnoszenia własnych kompetencji dotyczących realizowania z dziećmi treści matematycznych?	
	nauczyciele z przedszkoli Montessori	nauczyciele z przedszkoli tradycyjnych
zdecydowanie tak	30,0	44,3
raczej tak	54,3	50,0
raczej nie	14,3	5,7
zdecydowanie nie	1,4	-

Zdecydowana większość badanych nauczycieli z obu rodzajów placówek uświadamia sobie konieczność poszerzania i uzupełniania własnych umiejętności, aby jeszcze skuteczniej realizować z dziećmi przedszkolną edukację matematyczną.

Niezależnie od własnych potrzeb 84,3% nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych i 92,9% z przedszkoli Montessori deklaruje, że uczestniczy w różnych strukturach doskonalenia zawodowego odnośnie prowadzenia zajęć matematycznych.

Wśród form podejmowanych przez nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych przeważają:

- korzystanie z witryn internetowych – 77,1%;
- warsztaty – 74,3%;
- czytanie literatury – 71,4%;
- szkolenia - 61,4%
- kursy doskonalące – 57,1%

Ankietowani nauczyciele nie podejmują natomiast podyplomowych studiów kwalifikacyjnych i doskonalących. Małą popularnością cieszy się także edukacja na odległość (2,9%), inicjatywy organizatorskie (4,3%), odczyty (4,3%) oraz autorskie programy dydaktyczne (5,7%)²³⁶.

W grupie nauczycieli montessoriańskich najbardziej powszechnymi formami doskonalenia zawodowego okazały się

- czytanie literatury – 71,4%;
- korzystanie z witryn internetowych – 54,3%;
- warsztaty – 55,7%.

²³⁵ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

²³⁶ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

Należy zaznaczyć, że 15,7% pedagogów z analizowanego typu przedszkoli podejmuje studia podyplomowe kwalifikacyjne, co zapewne jest spowodowane koniecznością uzyskania dodatkowych uprawnień do pracy metodą Montessori. Mniejszą popularnością cieszą się natomiast studia podyplomowe doskonalące (1,4%), a także referaty (1,4%), odczyty (1,4%), inicjatywy organizatorskie (1,4%) oraz edukacja na odległość (2,9%)²³⁷.

Z analizy statystycznej wynika, że aktywność nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych odnośnie podejmowania doskonalenia zawodowego nie jest różnicowana przez staż pracy oraz posiadane kwalifikacje dodatkowe²³⁸.

Natomiast odnośnie nauczycieli montessoriańskich stwierdzono różnicowanie udziału w doskonaleniu zawodowym przez staż pracy²³⁹. Jest to zależność przeciwnoproporcjonalna o słabej sile²⁴⁰. Nauczyciele z krótszym stażem (0-5 lat) wykazali się mniejszą gotowością do uzupełniania i poszerzania swoich kwalifikacji zawodowych.

Uzyskane wyniki korespondują z badaniami J. Seidel i M. Sobieszczyk, które dotyczyły studentów Kształcenia Zintegrowanego. Autorki z niepokojem i zaskoczeniem stwierdzają, że „studenci nie dostrzegają potrzeby uzupełniania swojej wiedzy matematycznej, szczególnie wobec niskiego jej poziomu wyniesionego ze szkoły średniej. Zauważalna jest też niechęć studentów do działań wymagających ich samodzielnego, indywidualnego wysiłku poznawczego. Raczej chcą korzystać z opracowań gotowych, sprawdzonych i z doświadczeń z praktyki szkolnej od nauczyciela-instruktora” (Seidel i Sobieszczyk, 2007, s.290).

Zdiagnozowany problem dostrzega również D. Waloszek, która wnioskuje o „redefinicję kształcenia z procesu nastawiającego młodych ludzi na uzyskanie pewności, nieomyślności (pewności strategii edukacyjnej) na proces zapoczątkowujący poszukiwanie, przyjmowanie zmiany, krytyczną postawę wobec siebie i innych” (Waloszek, 1998, s.44).

Podsumowując należy jednak pozytywnie ocenić dużą (deklarowaną) aktywność większości badanych nauczycieli z obu typów przedszkoli w zakresie podejmowania różnorodnych form doskonalenia zawodowego dotyczących realizowania z dziećmi treści matematycznych.

²³⁷ Na podstawie tabeli częstości (rozkładu liczebności)

²³⁸ Wskaźniki istotności statystycznej $p > 0,05$; staż pracy $p = 0,530$; kwalifikacje dodatkowe $p = 0,671$

²³⁹ Wskaźnik istotności statystycznej $p = 0,001$

²⁴⁰ Wskaźnik korelacji r Pearsona $-0,180$

Tak postawa może zapobiec bardzo niepokojącym wynikom badań, które uzyskały wspomniane J. Seidel i M. Sobieszczyk (2007). Wynika z nich, że studenci III roku Kształcenia Zintegrowanego po odbytych Kursie z zakresu Edukacji matematycznej z metodyką „dokonując samooceny swojej wiedzy zadeklarowali głównie „mierne” umiejętności matematyczne (75% badanych), a po tyle samo (jedynie po 12,5% badanych) określiło swoje umiejętności na poziomie wysokim lub niskim” (Seidel i Sobieszczyk, 2007, s.288). Ponadto 31,9% z nich stwierdziło, że nie lubi matematyki, a po dwutygodniowej praktyce określając poziom łatwości prowadzenia zajęć dopiero na trzecim miejscu wymieniło obszar edukacji matematycznej.

Zdiagnozowana duża deklarowana aktywność badanych nauczycieli w zakresie podejmowania różnorodnych form doskonalenia zawodowego budzi również optymizm w kontekście badań przeprowadzonych przez Kuratorium Oświaty w Warszawie, z których bardzo niepokojąco wynika, że nauczyciele wychowania przedszkolnego i edukacji wczesnoszkolnej „posiadają jedynie umiejętności pozwalające na stawianie odpowiedniej diagnozy dotyczącej postępów w rozwoju umiejętności dzieci. Brak im natomiast zdolności wyciągania wniosków na podstawie zebranych danych i tworzenia programów pomocy dostosowanych do potrzeb uczniów (..), są oni nieprzygotowani do wymagań współczesnej edukacji”(Wrzochul-Stawinoga, 2013,s.4).

ZAKOŃCZENIE

Od roku szkolnego 2014/2015 istnieje prawny obowiązek uczęszczania dzieci sześciolatków do pierwszej klasy szkoły podstawowej. W okresie przejściowym obowiązkiem szkolnym zostały objęte najpierw dzieci urodzone w pierwszej połowie 2008 roku („starsze” sześciolatki z pierwszego półrocza). Na wniosek rodziców naukę w szkole mogło rozpocząć również dziecko, które w danym roku kalendarzowym (ale w drugiej połowie) kończy sześć lat („młodsze” sześciolatki z drugiego półrocza). Natomiast w roku szkolnym 2015/2016 obowiązkiem szkolnym zostały objęte dzieci urodzone w drugiej połowie 2008 r. (pozostałe siedmiolatki) oraz wszystkie dzieci urodzone w 2009 r. (sześciolatki).

W indywidualnych przypadkach, które zostaną udokumentowane opinią z poradni psychologiczno-pedagogicznej, rozpoczęcie nauki w klasie pierwszej może zostać odroczone.

Dyskusje o obniżeniu wieku szkolnego toczą się w Polsce od kilku lat.

Ministerstwo Edukacji Narodowej przekonuje, że dzieci przed szkołą nie trzeba ratować, a raczej do niej posłać, wykorzystując najlepszy okres w ich rozwoju. Inne argumenty przemawiające za wcześniejszym rozpoczęciem nauki są związane z wyrównywaniem szans edukacyjnych oraz dostępem do lepszej infrastruktury naukowej, sportowej i informatycznej. Z pewnością ważnym czynnikiem upowszechniającym edukację dzieci sześciolatków jest również fakt, że spośród 202 państw w 134 z nich obowiązek szkolny dotyczy właśnie tej grupy wiekowej (Szewczuk 2014).

Odmienne zdanie na temat wcześniejszego przekroczenia progu szkoły prezentują natomiast rodzice, nauczyciele, a także psycholodzy i pedagodzy. Zwracają oni uwagę na braki w przygotowaniu szkół pod względem prawnym, kadrowym i organizacyjnym np. rozwiązanie całodziennego nadzoru wykraczającego poza plan zajęć, regulacje dotyczące okresu wakacji szkolnych czy terenów zabaw.

Zarzuty dotyczą również nauczycieli, którzy nie są profesjonalnie przygotowani do opieki nad dzieckiem sześciolatką. Oczywiście jest, że nauczyciele zawsze opiekują się, wychowują i kształcą dzieci zróżnicowane pod względem rozwoju fizycznego, społeczno-emocjonalnego, a także poznawczego. Jednakże do już istniejących czynników, które powodują ową różnorodność (takich jak wyposażenie genetyczne, środowisko rodzinne, odmienne doświadczenia życiowe) obecnie dochodzi również wiek dzieci. Praca z tak niehomogeniczną grupą uczniów jest z pewnością dla większości nauczycieli poważnym wyzwaniem.

Warunkiem koniecznym dobrego startu w szkole wydaje się być potrzeba obniżenia wymagań szkolnych i dostosowanie ich do możliwości rozwojowych dziecka sześciolatka,

które nadal uczy się głównie przez zabawę, ma potrzebę ruchu i własnej aktywności. Tylko po uwzględnieniu tych okoliczności młodsze dziecko będzie mogło osiągnąć sukces w edukacji szkolnej.

W kontekście opisanej wyżej sytuacji edukacyjnej szczególnego znaczenia nabiera diagnoza dojrzałości szkolnej. Obrazuje ona bowiem możliwości i predyspozycje dziecka, ale ukazuje także jego ograniczenia i braki. Jej nadrzędnym celem jest opracowanie indywidualnego planu pracy z dzieckiem w celu zapewnienia i umożliwienia wszystkim przyszłym uczniom względnie równego startu w szkole.

Jak zauważa A. Jagła (2013) nauczycielowi w szkole niezwykle potrzebna, wręcz konieczna jest wiedza na temat dojrzałości szkolnej uczniów, gdyż bardzo możliwa jest różnica „między poziomem rozwoju dojrzałego siedmiolatka a niedojrzałego sześciolatka. Obecność w klasie dziecka młodszego i zarazem nie w pełni gotowego do podjęcia nauki w szkole wymaga zmiany form i metod pracy, a także obniżenia wymagań”(Jagła, 2013, s.4). Podobną opinię wyraża B. Surma (2013).

Jednym z elementów gotowości szkolnej jest prawidłowe przygotowanie dzieci do uczenia się matematyki, co gwarantuje sukces w tym zakresie edukacji, mobilizuje do wysiłku, zachęca do przewyżczania trudności, a przede wszystkim wiąże się z odczuciem radości i zadowolenia z własnych wysiłków.

Z drugiej zaś strony brak odpowiedniego przygotowania do edukacji szkolnej, szczególnie w aspekcie rozumowania operacyjnego na poziomie konkretnym, rodzi pierwsze niepowodzenia i poczucie porażki. Bardzo szybko dochodzi do powstawania blokad emocjonalnych, które skutecznie uniemożliwiają prawidłowe przyswajanie treści matematycznych. Nauka matematyki w szkole z czasem staje się przyczyną stresów i lęków.

Skomplikowaną i dość niepokojącą kondycję szkolnej edukacji matematycznej ilustrują także rezultaty opublikowanych w listopadzie 2011 roku badań przeprowadzonych przez Eurydice (unijną agendę badającą systemy edukacyjne), z których wynika, że „co piąty polski uczeń osiąga słabe wyniki w matematyce” (za: Fechner-Sędzicka, Ochmańska, Odrobina, 2012, s.5)

W tej sytuacji istotnym wydaje się być podjęcie badań dotyczących poziomu kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w dwóch rodzajach placówek: w przedszkolach Montessori i w przedszkolach tradycyjnych.

Wykonane badania empiryczne dowiodły, że dzieci kończące edukację przedszkolną prezentują zróżnicowany poziom kompetencji matematycznych wskazanych w Podstawie Programowej Wychowania Przedszkolnego. Jednakże wyniki uzyskane na podstawie przeprowadzonego testu dla dzieci (średni wynik - 85,5 czyli 79,16% maksymalnej punktacji) pozwalają na sformułowanie wniosku ogólnego, że większość dzieci, które kończą edukację przedszkolną zarówno w systemie tradycyjnym, jak i systemie Montessori osiąga wysoki poziom kompetencji matematycznych.

Zdecydowanie najlepsze wyniki uzyskały badane dzieci z obu rodzajów placówek w zakresie następujących kompetencji: liczenie obiektów i rozróżnianie błędnego liczenia od poprawnego, ustalanie równoliczności dwóch zbiorów i posługiwanie się liczebnikami porządkowymi oraz w zakresie orientacji przestrzennej obejmującej - rozróżnianie lewej i prawej strony, określanie kierunków i ustalanie położenia obiektów.

Natomiast najwięcej trudności wszystkim badanym dzieciom sprawiły zadania dotyczące orientacji w czasie.

Uzyskane wyniki z testu dla dzieci korespondują z ocenami poziomu kompetencji matematycznych, jakich dokonali nauczyciele.

W ocenie indywidualnej i globalnej nauczyciele z przedszkoli Montessori najwyżej ocenili kompetencje dzieci w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego. Natomiast najslabiej zdaniem ankietowanych nauczycieli montessoriańskich opanowane są umiejętności dzieci w zakresie rozróżniania lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia przedmiotów oraz pomiaru długości.

W ocenach nauczycieli z przedszkoli tradycyjnych za najlepiej opanowaną kompetencję matematyczną dzieci kończących edukację przedszkolną również wskazano liczenie obiektów i rozróżnianie błędnego liczenia od poprawnego, a także rozróżnianie prawej i lewej strony, określanie kierunków oraz ustalanie położenia przedmiotów. Nieco zaskakujące są natomiast oceny indywidualne nauczycieli z placówek tradycyjnych, którzy najwyżej ocenili również kompetencje przedszkolaków w zakresie orientacji w czasie, mimo relatywnie niskich wyników uzyskanych w teście dla dzieci.

Jako najslabiej opanowane umiejętności dzieci nauczyciele z przedszkoli tradycyjnych wskazywali dokonywanie pomiarów długości i znajomość prostych sposobów mierzenia oraz ustalanie równoliczności zbiorów i posługiwanie się liczebnikami porządkowymi.

Konstruktywnym jest fakt, że badani nauczyciele dostrzegli grupy dzieci, których poziom umiejętności matematycznych określono jako niski lub bardzo niski. Można

przewidzieć, że będą one miały poważne trudności w nauce szkolnej i będą wymagały zindywidualizowanej pomocy pedagogicznej.

Badani nauczyciele już na etapie edukacji przedszkolnej podejmują działania wspierające rozwój nie tylko tych dzieci, którym nauka matematyki sprawia więcej trudności, ale także tych uzdolnionych matematycznie.

Zbieżne wyniki badań uzyskała B. Dudel, która analizując przebieg edukacji matematycznej na pierwszym etapie edukacyjnym stwierdza, że „niezależnie od stopnia awansu zawodowego czy rodzaju szkoły, w której pracują badane nauczycielki rozwój zdolności matematycznych podopiecznych nie jest im obojętny. Wykorzystują dostępne im możliwości oddziaływania, dostrzegają także bariery na drodze rozwoju dzieci o specyficznych potrzebach edukacyjnych” (Dudel, 2012, s.258).

Ponadto większość badanych nauczycieli z obu typów przedszkoli zadeklarowało dużą aktywność w zakresie podejmowania różnorodnych form doskonalenia zawodowego dotyczących realizowania z dziećmi treści matematycznych. Koniecznym jednak wydaje się być przeprowadzenie kolejnych badań opartych na obserwacji rzeczywistych działań nauczycieli w tym zakresie.

Uzyskane wyniki badań potwierdziły zasygnalizowane wcześniej obawy nauczycieli związane z obniżeniem wieku szkolnego. Zarówno w ocenie indywidualnej, jak i globalnej ankietowani nauczyciele z obu rodzajów placówek przedszkolnych wyżej ocenili kompetencje matematyczne dzieci siedmioletnich w porównaniu z ich młodszymi kolegami i koleżankami.

Jednakże zdiagnozowany z jednej strony wysoki poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną oraz deklarowane przez nauczycieli intensywne podejmowanie działań edukacyjnych ukierunkowanych na jego ciągle podnoszenie z drugiej, pozwala z optymizmem stwierdzić, że edukacja matematyczna na poziomie przedszkola jest skuteczna.

Pojawia się zatem pytanie o przyczyny niezadawalających wyników edukacji matematycznej na poziomie szkolnym. Z komunikatu CKE wynika, że w 2015 roku uczniowie kończący gimnazjum średnio uzyskali zaledwie 48% możliwych punktów za arkusz z matematyki, a 76,0% maturzystów zdało egzamin z matematyki²⁴¹. Jest wiele powodów takiego stanu rzeczy. Trudności wynikają z pewnością ze specyfiki tego przedmiotu. Język matematyczny

²⁴¹ Na podstawie komunikatu CKE z dnia 19 czerwca 2015 r.

jest trudny. Konieczna jest umiejętność syntezy, analizy i abstrahowania. Ponadto kalkulatory zastępują konieczność liczenia. Uczniowie nie potrafią utrzymać koncentracji uwagi, nie dostrzegają przydatności (czy wręcz nieodzowności) wiedzy matematycznej w życiu codziennym, a niektórzy po prostu boją się tego przedmiotu, co prowadzi do blokady w uczeniu się matematyki. W psychologii znany jest nawet stan nazwany syndromem „zeszytu w kratkę”, kiedy uczeń na sam jego widok odczuwa ból głowy, brzucha czy dostaje ataku hysterii (Zajdel, 2005). Kwestia sposobu nauczania także pozostawia wiele do życzenia. Nieodpowiedni dobór metod, form i środków pracy dydaktycznej dokonany przez nauczyciela dla przekazywania wiedzy matematycznej, a także źle dobrane treści matematyczne w stosunku do możliwości ucznia przyczyniają się do niepowodzeń edukacyjnych. Zasygnalizowane problemy wymagają dalszych prac badawczych.

Zebrane wyniki empiryczne i ich analiza mogą być także inspiracją do rekonstruowania myślenia o dydaktycznych aspektach uczenia się matematyki przez najmłodsze dzieci oraz bodźcem do dalszych poszukiwań badawczych.

BIBLIOGRAFIA

1. Albinoska A., Czekalska R., Gaj A., Lauba B., Matczak J., Piecusiak A., Sosnowska J. (2008), *Odkryjmy Montessori raz jeszcze*, Oficyna Wydawnicza Impuls”, Kraków.
2. Andrzejewska J. (2011), *Kompetencje poznawcze dzieci pięcioletnich W: Dziecko w szkolnej rzeczywistości. Założony a rzeczywisty obraz edukacji elementarnej* red. Sowińska H., Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.
3. Badura-Strzelczyk G. (2008), *Pomóż mi to policzyć samemu. Matematyka w ujęciu Marii Montessori od lat trzech do klasy trzeciej*, Wydawnictwo NOWIK, Opole.
4. Bajorek A. (2007), *Rola nauczyciela we wspomaganiu rozwoju dziecka w wieku przedszkolnym W: Nauczyciel wobec wczesnej edukacji dzieci* red. Laska E.I., Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów.
5. Bałachowicz J. (2011), *Indywidualizacja jako postulat i konieczność współczesnej edukacji początkowej*, W: *Dziecko- uczeń a wczesna edukacja*, red. Adamek I., Zbróg Z., Wydawnictwo LIBRON – Filip Lohner, Kraków.
6. Bartmiński F. (1991), *Przygotowanie dzieci sześciu- i siedmioletnich do uczenia się matematyki W: Wychowanie w przedszkolu. Warunki funkcjonowania oraz efekty kształcenia. Tom II*, red. Guz S., Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin.
7. Bednarczuk B. (2002), *Ocena pracy dziecka według Montessori*, Edukacja i Dialog nr 7.
8. Bednarczuk B. (2003), *Jak upływa czas?*, Wychowanie w Przedszkolu nr 1.
9. Bednarczuk B. (2007), *Dziecko w klasie Montessori*, Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin.
10. Bereźnicki F. (1975), *Prace magisterskie z pedagogiki*, WOM, Gorzów Wielkopolski.
11. Białołęcka H., Jakubowska M., Wróbel M. (1975), *Treści wychowania W: Zarys pedagogiki dla nauczycieli przedszkoli* red. Krzysztozek Z., WSiP, Warszawa.
12. Borowska A. (2009), *Czy moje dziecko jest zdolne?*, Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP Spółka z o.o, Kielce.
13. Bruner J. S. (1978), *Poza dostarczone informacje*, PWN, Warszawa.
14. Brzezińska A. (1987), *Gotowość dzieci w wieku przedszkolnym do czytania i pisanie*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Poznań.
15. Brzezińska A. (1992a), *Aktywność zabawowa i jej znaczenie dla rozwoju dziecka w wieku przedszkolnym W: Psychopedagogiczne problemy edukacji przedszkolnej* Brzezińska

A., Burtowy M., Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Poznań.

16. Brzezińska A. (1992b), *Gotowość dziecka do czytania i pisania* W: *Psychopedagogiczne problemy edukacji przedszkolnej* Brzezińska A., Burtowy M., Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Poznań.

17. Brzezińska A. (1992c) *Procesy dojrzewania i uczenia się a rozwój dziecka* W: *Psychopedagogiczne problemy edukacji przedszkolnej* Brzezińska A., Burtowy M., Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Poznań.

18. Brzeziński J. (1984), *Elementy metodologii badań psychologicznych*, PWN, Warszawa.

19. Butterworth B. (1999), *The Mathematical Brain*, Macmillan, London.

20. Butterworth B. (2005), *The development of arithmetical abilities*, Journal of Child Psychology and Psychiatry.

21. Burtowy M. (1992a), *Psychopedagogiczne podstawy ciągłości kształtowania podstawowych pojęć matematycznych w przedszkolu i w klasie I szkoły podstawowej* W: *Psychopedagogiczne problemy edukacji przedszkolnej* Brzezińska A., Burtowy M., Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Poznań.

22. Burtowy M. (1992b), *Założenia i treści reform nauczania matematyki* W: *Psychopedagogiczne problemy edukacji przedszkolnej* Brzezińska A., Burtowy M., Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Poznań.

23. Chattin-McNichols J. (1992), *The Montessori Controversy*, Delmar Publisshers Inc.

24. Chojak M. (2010), *Edukacyjne wsparcie rodziców a poziom gotowości szkolnej dziecka* W: *O pomyślny start szkolny dziecka* red. Guz S., Zwierzchowska I., Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej TWP w Warszawie, Warszawa.

25. Cieślukowska J. (2013), *Czy w polskim systemie oświaty potrzebni są pedagodzy zdolności?* W: *Zdolni w szkole, czyli o zagrożeniach i możliwościach rozwojowych uczniów zdolnych. Poradnik dla nauczycieli i wychowawców*, red. Limont W., Cieślukowska J., Jastrzębska D., Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa.

26. Czerepaniak-Walczak M. (1997), *Aspekty i źródła profesjonalnej refleksji nauczyciela*, Wydawnictwo Edytor, Toruń.

27. Darowna M. (2005), *Pora czy nie pora na matematykę?*, Edukacja i Dialog, nr 9.

28. Dąbek A. (1984), *Psychologiczna analiza zdolności matematycznych uczniów. Struktura i kształcenie*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Zielonej Górze,

Zielona Góra.

29. Dewey J. (2005), *Moje pedagogiczne credo*, Wydawnictwo Akademickie Żak, Warszawa.
30. Dmochowska M. (1985), *Zasady i metody wychowania umysłowego w przedszkolu* W: *Podstawy pedagogiki przedszkolnej*, red. Kwiatowska M., Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
31. Dominek R., Pełka-Woszko A. (2004), *Dziecko w krainie matematyki*, Oficyna Wydawnicza G&P, Poznań.
32. DSM- IV (1994), *Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders*. American Psychiatric Association, Washington DC, s. 48- 55, 83-84.
33. Dudel B. (2012), *O wybranych problemach edukacji matematycznej w klasach młodszych*, W: *Edukacja elementarna w teorii i praktyce* red. Uszyńska-Jarmoc J., Cichocki A., Trans Humana, Białystok.
34. Dudel B. (2013), *Istota i rodzaje kompetencji kluczowych* W: *Rozwijanie kompetencji kluczowych uczniów w procesie edukacji wczesnoszkolnej* red., Dudel B., Głowska-Sołdatow M., Wydawnictwo Impuls, Kraków – Białystok.
35. Dudel B., Szada-Borzyszkowska J. (2013), *Kompetencje matematyczne i podstawowe kompetencje naukowo- techniczne uczniów klas młodszych* W: *Rozwijanie kompetencji kluczowych uczniów w procesie edukacji wczesnoszkolnej* red. Uszyńska-Jarmoc J., Dudel B., Głowska-Sołdatow M., Wydawnictwo Impuls, Kraków – Białystok.
36. Dudzińska I. (1983), *Przygotowanie dzieci do nauki w szkole* W: *Wychowanie i nauczanie w przedszkolu* red. Dudzińska I., Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
37. Dyrda B., Gierczyk M. (2013), *Indywidualizacja pracy z uczniem uzdolnionym matematycznie – przykłady dobrej praktyki w szkolnictwie brytyjskim* W: *Wczesnoszkolna edukacja matematyczna – ograniczenia i ich przełamywanie* red. Kalinowska A., Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko- Mazurskiego w Olsztynie, Olsztyn.
38. Dziennik Ustaw z dnia 15 stycznia 2009 r. Nr 4, poz. 17.
39. Epstein P. (2012), *Odkryć każde z dzieci (Edukacja Montessori)*, Bliżej przedszkola nr 6.
40. Epstein P. (2014), *Z notatek obserwatora Montessori w praktyce* Wydawnictwo Impuls, Kraków.

41. Fechner-Sędzicka I., Ochmańska B, Odrobina W.,(2012) *Rozwijanie zainteresowań i zdolności matematycznych uczniów klas I – III szkoły podstawowej. Poradnik dla nauczyciela*, Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa.
42. Fiedler M. (1977), *Matematyka już w przedszkolu*, WSiP, Warszawa.
43. Fiedler M. (1983), *Kształtowanie pojęć matematycznych W: Wychowanie i nauczanie w przedszkolu* red. Dudzińska I., Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
44. Filip J., Rams T. (2000), *Dziecko w świecie matematyki*, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.
45. Gawda B., (1996), *Elementy postawy twórczej u młodzieży o zróżnicowanych uzdolnieniach matematycznych*, W: *Zdolności i uzdolnienia jako osobowościowe właściwości człowieka*, red. Popek S., Wydawnictwo UMCS, Lublin.
46. Gersten R., Jordan N., Flojo J. (2005), *Early Identification and Interventions for Students with Mathematics Difficulties*, Journal of Learning Disabilities.
47. Gnitecki J. (1993), *Zarys metodologii badań w pedagogice empirycznej*, Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Zielona Góra.
48. Gołębiak B. (2005), *Konstruktywizm – moda, „nowa religia”, czy tylko/aż interesująca perspektywa poznawcza i dydaktyczna*, Problemy Wczesnej Edukacji, nr 1.
49. Gołkiewicz-Kawa A., Oszwa U. (2008), *Posługiwanie się liczbami przez dzieci z trudnościami w matematyce W: Psychologia trudności arytmetycznych dzieci. Doniesienia z badań* red. Oszwa U., Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków.
50. Gruszczyk-Kolczyńska E. (1989), *Dlaczego dzieci nie potrafią uczyć się matematyki?*, Instytut Wydawniczy Związków Zawodowych, Warszawa.
51. Gruszczyk-Kolczyńska E. (1992), *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki. Przyczyny, diagnoza, zajęcia korekcyjno- wyrównawcze*, WSiP, Warszawa.
52. Gruszczyk-Kolczyńska E. (2009a), *Czas: dni i noc, pory roku, dni w tygodniu, miesiące w roku. Pomaganie dzieciom w zorientowaniu się w rytmicznej organizacji czasu. Obliczenia kalendarzowe i zegarowe W: Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku edukacji szkolnej* red. Gruszczyk-Kolczyńska E., Wydawnictwo Edukacja Polska Sp. z o. o, Warszawa.
53. Gruszczyk-Kolczyńska E. (2009b), *Wspomaganie dzieci w rozwoju operacyjnego rozumowania. Zakres potrzebny do kształtowania aspektu porządkowego pojęcia liczby naturalnej W: Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci*

w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku edukacji szkolnej, red. Gruszczyk-Kolczyńska E., Wydawnictwo Edukacja Polska Sp. z o. o, Warszawa.

54. Gruszczyk – Kolczyńska E. (2009c), *Wstęp W: Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku edukacji szkolnej* red. Gruszczyk-Kolczyńska E., Wydawnictwo Edukacja Polska Sp. z o.o, Warszawa.

55. Gruszczyk-Kolczyńska E. (2011), *Nauczycielska diagnoza gotowości do podjęcia nauki szkolnej*, Centrum Edukacyjne BLIŻEJ PRZEDSZKOLA, Kraków.

56. Gruszczyk-Kolczyńska E. (2012a), *Charakterystyka wiadomości i umiejętności matematycznych dzieci. Wnioskowanie o ich uzdolnieniach matematycznych. Wyniki badań, interpretacje i wnioski. W: O dzieciach matematycznie uzdolnionych: książka dla rodziców i nauczycieli*, red. Gruszczyk-Kolczyńska E., Nowa Era, Warszawa.

57. Gruszczyk-Kolczyńska E. (2012b), *Orientacja w otoczeniu precyzyjne porozumiewanie się: od wytyczania kierunków i położenia obiektów, przez odnajdywanie informacji na kartce do posługiwania się uproszczonymi rysunkami. W: O dzieciach matematycznie uzdolnionych: książka dla rodziców i nauczycieli*, red. Gruszczyk-Kolczyńska E., Nowa Era, Warszawa.

58. Gruszczyk-Kolczyńska E. (2012c), *W jakim zakresie model uzdolnień matematycznych W.A. Krutieckiego odnosi się do starszych przedszkolaków i małych uczniów W: O dzieciach matematycznie uzdolnionych: książka dla rodziców i nauczycieli*, red. Gruszczyk-Kolczyńska E., Nowa Era, Warszawa.

59. Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E. (1997), *Dziecięca matematyka. Książka dla rodziców i nauczycieli*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

60. Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E. (2004), *Wspomaganie rozwoju umysłowego czterolatków i pięciolatków*, WSiP, Warszawa.

61. Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E. (2009a), *Główne grzechy przedszkolnej i szkolnej edukacji matematycznej. Czyli, o tym, co utrudnia dzieciom nabywanie wiadomości umiejętności matematycznych W: Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku edukacji szkolnej* red. Gruszczyk-Kolczyńska E., Wydawnictwo Edukacja Polska Sp. z o.o, Warszawa.

62. Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E. (2009b), *Kształtowanie umiejętności dodawania i odejmowania od poziomu manipulacji przedmiotami przez liczenie na zbiorach*

zastępczych, aż do rachowania w pamięci. W: *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku edukacji szkolnej* red. Gruszczyk-Kolczyńska E., Wydawnictwo Edukacja Polska Sp. z o.o, Warszawa.

63. Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E. (2009c), *Liczenie. Wspomaganie dzieci w ustalaniu prawidłowości, które są stosowane w liczeniu obiektów. Kształtowanie umiejętności liczenia* W: *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku edukacji szkolnej* red. Gruszczyk-Kolczyńska E., Wydawnictwo Edukacja Polska Sp. z o.o, Warszawa.

64. Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E. (2009d), *Wspomaganie dzieci w rozwijaniu operacyjnego rozumowania w zakresie potrzebnym do rozumienia pomiaru długości. Kształtowanie tych umiejętności i stosowanie ich w rozwiązywaniu zadań oraz w sytuacjach życiowych* W: *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku edukacji szkolnej* red. Gruszczyk-Kolczyńska E., Wydawnictwo Edukacja Polska Sp. z o.o, Warszawa.

65. Guz S. (1998), *Edukacja w systemie Montessori t.1 i 2*, Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin.

66. Guz S. (2006), *Metoda Montessori w przedszkolu i szkole. Kształcenie i osiągnięcia dzieci*, Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin.

67. Guz S. (2008), *Wyzwalanie aktywności poznawczej dzieci w edukacji Montessori* W: *Aktywność dzieci i młodzieży* red. Guz S., Sokołowska- Dzioba T., Pielecki A., Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej TWP, Warszawa.

68. Hanisz J. (2006), *Wielozmysłowe nabywanie przez dzieci orientacji w przestrzeni* W: *Edukacja przedszkolna w teorii i praktyce*, red. Włoch S., Wydawnictwo Uniwersytetu Opolskiego, Opole.

69. Hłobił A. (2010), *Działalność szkoły we wspomaganie rozwoju ucznia zdolnego*, Wydawnictwo Impuls, Kraków.

70. Holtstiege H. (1987), *Maria Montessoris Neue Pädagogik. Prinzip Freiheit – Freie Arbeit.*, Freiburg im Breisgau, Herder.

71. Holtstiege H. (1991), *Modell Montessori: Grundsätze und aktuelle Geltung der Montessori – Pädagogik*, Herder, Freiburg – Basel – Wien.

72. Hurlock E. (1985), *Rozwój dziecka*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

73. ICD- 10 (2000), *Międzynarodowa Statystyczna klasyfikacja chorób i problemów zdrowotnych. Rewizja dziesiąta. Tłumaczenie polskie pt. Klasyfikacja zaburzeń psychicznych i zaburzeń zachowania w ICD-10. Opisy kliniczne i wskazówki diagnostyczne*, Uniwersyteckie Wydawnictwo Medyczne „Vesalius”, Instytut Psychiatrii i Neurologii, Warszawa.
74. Jacewicz A. (2007), *Diagnoza umiejętności arytmetycznych dzieci 6-7-letnich* W: *Dziecko: sukcesy i porażki* red. Piwowarski R., Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa.
75. Jagła A. (2013), *Gotowość szkolna sześciolatka*, Życie Szkoły nr 7.
76. Kamińska K (2012), *Edukacja matematyczna przedszkolaków*, Wychowanie w Przedszkolu, nr1.
77. Kamińska-Juckiewicz M. (2011), *Zmiany programowe w edukacji przedszkolnej-tendencje i oczekiwania*, W: *Pedagogika przedszkolna i wczesnoszkolna. Badania, opinie, inspiracje*, red. Karwowska-Struczyk M., Sobierańska D., Szpotowicz M., Wydawnictwo Akademickie ŻAK, Warszawa.
78. Kamiński A. (1974), *Metoda, technika, procedura badawcza w pedagogice empirycznej* W: *Metodologia pedagogiki społecznej* red. Wroczyński R., Pilch T., Ossolineum, Wrocław.
79. Kameduła E. (1998), *Ewaluacja metod kształcenia*, W: *Tendencje w dydaktyce współczesnej*, red. Denek K, Bereźnicki F., Wydawnictwo Adam Marszałek, Toruń.
80. Kalinowska A. (2005), *Rozwijanie kompetencji myślenia matematycznego*, Edukacja i Dialog nr 9.
81. Kalinowska A. (2006), *Rozwiązywanie problemów matematycznych przez młodszych uczniów – prorozwojowa szansa czy fikcja edukacyjna* W: *Wczesna edukacja. Między schematem a poszukiwaniem nowych ujęć teoretyczno- badawczych*, red. Klus-Stańska D., Szatan E., Bronk D., Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk.
82. Kapica G. (2006), *Zabawa. Jest w niej ukryty skarb. Aktualne konteksty edukacyjne* W: *Edukacja przedszkolna w teorii i praktyce*, red. Włoch S., Wydawnictwo Uniwersytetu Opolskiego, Opole.
83. Karbowniczek J. (2011), *Założenia metodyczne w pracy pedagogicznej w przedszkolu*, W: *Podstawy pedagogiki przedszkolnej z metodyką* red. Karbowniczek J., Kwaśniewska M., Surma B, Wydawnictwo WAM, Kraków.
84. Kawczyńska E. (2004), *Dla kogo trudna matematyka*, Życie Szkoły nr 1.
85. Kierstein Z. (2006), *Aktywne metody w kształceniu matematycznym*, Wydawnictwo NOWIK, Sp.j., Opole.

86. Klim-Klimaszewska A. (2005), *Pedagogika przedszkolna*, Polski Instytut Wydawniczy, Warszawa.
87. Klim-Klimaszewska A. (2011), *Pedagogika przedszkolna. Nowa podstawa programowa*, Instytut Wydawniczy ERICA, Warszawa.
88. Kłysiewicz J. (2008), *Zakres i aspekty umiejętności matematycznych dzieci sześciolletnich – przegląd aspektów rozumowania*, W: *Wczesna diagnoza dziecięcych trudności w liczeniu. Wybrane zagadnienia*, red. Osza U., Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków.
89. Kołacz-Kordzińska Z. (2013), *Praca z uczniem zdolnym. Poradnik dla nauczycieli i dyrektorów*, Wydawnictwo Verlag Dashofer Sp. z o.o, Warszawa.
90. Komorowska H. (1982), *Metody badań empirycznych w Glottodydaktyce*, PWN, Warszawa.
91. Konarzewski K. (2000), *Jak uprawiać badania oświatowe: metodologia praktyczna*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
92. Kopciwicz L. (2011), *Matematyka a problem genger* W: *Pedagogika wczesnej edukacji. Dyskursy, problemy, otwarcia* red. Klus – Stańska D., Bronk D., Malenda A., Wydawnictwo Akademickie Żak, Warszawa.
93. Kopciwicz L. (2013), *Matematyczne niepowodzenia dziewcząt i mniejszości etnicznych. Przyczyny, wyjaśnienia, środki zaradcze w świetle ideologii edukacyjnych* W: *Wczesnoszkolna edukacja matematyczna – ograniczenia i ich przełamywanie* red. Kalinowska A., Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko- Mazurskiego w Olsztynie, Olsztyn.
94. Kopik A. (1996), *Akceleracja rozwoju dzieci siedmioletnich rozpoczynających naukę szkolną*, WSP, Kielce.
95. Kość L. (1974), *Developmental Dyscalculia*, Journal of Learning Disabilities, nr 7.
96. Kość L. (1982), *Psychologia i patopsychologia zdolności matematycznych*, COM PWZMOiW, Warszawa.
97. Kotlarski K. (1990), *Czynniki oddziałujące na poziom uzdolnień (Na przykładzie uzdolnień matematycznych)*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Poznań.
98. Kowalik-Olubińska M. (2008), *Mali naukowcy, czyli o wspieraniu aktywności badawczej dzieci w przedszkolu* W: *Aktywność dzieci i młodzieży* red. Guz S., Sokołowska-Dzioba T., Pielecki A., Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej TWP, Warszawa.

99. Kozak-Czyżewska E. (1987), *Błędy uczniów klas początkowych w trakcie opanowywania wybranych pojęć matematycznych*, Życie Szkoły nr 10.
100. Krauze-Sikorska H. (2011), *Praca z dziećmi o specjalnych potrzebach edukacyjnych i jej implikacje dla ich rozwoju* W: *Dziecko w szkolnej rzeczywistości. Założony a rzeczywisty obraz edukacji elementarnej* red. Sowińska H., Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.
101. Kruk J. (2011), *W poszukiwaniu źródeł dydaktyki interaktywnej* W: *Pedagogika wczesnej edukacji. Dyskursy, problemy, otwarcia* red. Klus-Stańska D., Bronk D., Malenda A., Wydawnictwo Akademickie Żak, Warszawa.
102. Kruszewska A. (2011), *Dziecko 6-letnie na progu szkolnym- jego umiejętności społeczno- emocjonalne*, W: *Pedagogika przedszkolna i wczesnoszkolna, badania, opinie, inspiracje*, red. Karwowska-Struczyk M, Sobierańska D, Szpotowicz M, Wydawnictwo Akademickie Żak, Warszawa.
103. Krutiecki W.A. (1968), *Psichologija matematiczieskich sposobnostiej szkolnikow*, „Proswieszczenije”, Moskwa.
104. Krutiecki W.A., (1971), *Zagadnienia ogólne dotyczące struktury zdolności matematycznych*, W: *Zagadnienia psychologii różnic indywidualnych: prace psychologów radzieckich*, red. Strelau J., PWN, Warszawa.
105. Krygowska Z. (1979), *Zarys dydaktyki matematyki*, WSiP, Warszawa.
106. Kupisiewicz Cz. (1988), *Podstawy dydaktyki ogólnej*, PWN, Warszawa.
107. Kurant M. (2008), *Rozwiązywanie zadań tekstowych przez dzieci z dyskalkulią* W: *Psychologia trudności arytmetycznych dzieci. Doniesienia z badań* red. Oszwa U., Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków.
108. Kuszak K. (2011), *Zmiany w edukacji przedszkolnej jako warunek podniesienia jakości życia* W: *Dziecko w szkolnej rzeczywistości. Założony a rzeczywisty obraz edukacji elementarnej* red. Sowińska H., Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.
109. van Kuyk J.J (1995), *From schooreadines to early help in kindergarten*, Scientia Paedagogica Experimentalis XXXII.
110. Kwaśniewska M. (2011) *Aktualny stan wychowania przedszkolnego w Polsce* W: *Podstawy pedagogiki przedszkolnej z metodyką* red. Karbowniczek J., Kwaśniewska M., Surma B, Wydawnictwo WAM, Kraków.

111. Kwiatowska M. (1985), *Pedagogika przedszkolna jako wiedza o kierowaniu rozwojem dzieci w instytucjach przedszkolnych*, W: *Podstawy pedagogiki przedszkolnej*, red. Kwiatowska M., Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
112. Lewowicki T. (1986), *Kształcenie uczniów zdolnych*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
113. Lillard A. (2006), *Montessori Education Provides Better Outcomes Than Traditional Methods*, Study Finds Science, Journal Article 29 września 2006.
114. Lipina S.(1984), *Kształtowanie pojęć dzieci w wieku przedszkolnym*, WSiP, Warszawa.
115. Loeffler M.H. (1992), *Montessori and constructivism* W: *Montessori in Contemporary American Culture*, ed. Loeffler M.H, Heineman Portsmouth.
116. Lubomirska K. (1997), *Przedszkole. Rzeczywistość i szansa*, Wydawnictwo Żak, Warszawa.
117. Łobocki M. (1984), *Metody badań pedagogicznych*, PWN, Warszawa.
118. Magda-Adamowicz M. (2010), *Gotowość współczesnej polskiej szkoły do przyjęcia sześciolatków* W: *O pomyślny start szkolny dziecka* red. Guz S., Zwierzchowska I., Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej TWP W Warszawie, Warszawa.
119. Małkińska J. (2005) *Po co nam matematyka?*, Edukacja i Dialog, nr 9.
120. Marek E., Nadrowska K. (2010), *Diagnoza gotowości dziecka do podjęcia nauki szkolnej. Przewodnik metodyczny*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
121. Matczak A. (1987), *Podstawowe osiągnięcia rozwojowe w poszczególnych okresach* W: *Wprowadzenie do psychologii* Włodarski Z., Matczak A., WSiP, Warszawa.
122. *Mathematics Education In Europe: Common Challenges and National Policies*, European Commission, Euridice, listopad 2011.
123. Męczkowska A. (2002), *Od świadomości nauczyciela do konstrukcji świata społecznego. Nauczycielskie kompetencje wymagań dydaktycznych a problem rekonstrukcji kompetencji ucznia*, OW Impuls, Kraków.
124. Michalak R. (2011), *Poznanie świata przyrody jako kontekst rozwoju kompetencji poznawczych życia* W: *Dziecko w szkolnej rzeczywistości. Założony a rzeczywisty obraz edukacji elementarnej* red. Sowińska H., Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.
125. Miksza M. (1994), *Koncepcja wychowawcy – nauczyciela w poglądach Marii Montessori*, Wychowanie w Przedszkolu, nr 5.

126. Misiorna E. (2009), *Start szkolny dziecka jako sytuacja trudna* W: *Sytuacje trudne w życiu dziecka* red. Cywińska M., Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.
127. Montessori M.(1913) *Domy dziecięce. Metoda pedagogii naukowej, stosowana w wychowaniu najmłodszych dzieci*, Drukarnia Naukowa Warszawa.
128. Montessori M.(1923/ 1979), *The children In the family*. Avon Books, New York.
129. Montessori M. (1949/ 1994), *The absorbent mind*, Clio Press, Oxford, England.
130. Morawska Z. (1985), *Rozwijanie pojęć matematycznych*, W: *Podstawy pedagogiki przedszkolnej*, red. Kwiatowska M., Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
131. Moroz H. (1981), *Badania nad wiedzą matematyczną dzieci wstępujących do szkoły*, Kwartalnik Pedagogiczny, nr 1.
132. Moroz H. (1982), *Rozwijanie pojęć matematycznych u dzieci w wieku przedszkolnym*, WSiP, Warszawa.
133. Muszyński H. (1971), *Wstęp do metodologii pedagogiki*, PWN, Warszawa.
134. Nowak S. (1970), *Metodologia badań socjologicznych. Zagadnienia ogólne*, PWN, Warszawa.
135. Okoń W. (1964), *Ogólna charakterystyka badań empirycznych w Polsce*, Ruch Pedagogiczny, nr 2.
136. Okoń W. (1987), *Słownik pedagogiczny*, PWN, Warszawa.
137. Okoń W. (1995), *Nowy słownik pedagogiczny*, Wydawnictwo Akademickie „Żak”, Warszawa.
138. Okoń W. (2003), *Wprowadzenie do dydaktyki ogólnej*, Wydawnictwo Akademickie Żak, Warszawa.
139. Oswald P., Schlutz-Benesch G. (1990), *Grundgedanken der Montessori- Pädagogik*, Herder – Freiburg – Basel – Wien.
140. Oszwa U. (2006), *Rozwój i ocena umiejętności matematycznych dzieci sześciolletnich*, Centrum Metodyczne Pomocy Psychologiczno- Pedagogicznej, Warszawa.
141. Oszwa U. (2007), *Dziecko z zaburzeniami rozwoju i zachowania w klasie szkolnej. Vademecum nauczycieli i rodziców*, Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków.
142. Oszwa U. (2008a), *Analiza wskaźników ryzyka rozwojowych trudności arytmetycznych*, W: *Wczesna diagnoza dziecięcych trudności w liczeniu. Wybrane zagadnienia*, red. Oszwa U., Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków.
143. Oszwa U. (2008b), *Zaburzenia rozwoju umiejętności arytmetycznych. Problem diagnozy i terapii*, Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków.

144. Oszwa U. (2008c) *Zamiast wstępu, czyli o gotowości szkolnej do uczenia się matematyki*, W: *Wczesna diagnoza dziecięcych trudności w liczeniu. Wybrane zagadnienia*, red. Oszwa U., Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków.
145. Oszwa U. (2009), *Psychologiczna analiza procesów operowania liczbami u dzieci z trudnościami w matematyce*, Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie- Skłodowskiej, Lublin.
146. Painter F. (1993), *Kim są wybitni?*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
147. Parczewska T. (2008), *Wycieczka w przedszkolu jako aktywizująca forma zapoznawania dzieci ze środowiskiem* W: *Aktywność dzieci i młodzieży* red. Guz S., Sokołowska-Dzioba T., Pielecki A., Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej TWP, Warszawa.
148. Pelcowa M. (1965), *Uspołecznianie dzieci rozpoczynających naukę szkolną*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.
149. Piaget J. (1977), *Dokąd zmierza edukacja?*, PWN, Warszawa.
150. Piaget J. (1979), *Nauczanie matematyki a rozwój dziecka*, Wiadomości Matematyczne XXII, nr 1.
151. Piaget J., Szemińska A. (1952), *The child's conception of numbers*, Routledge & Kegan Paul, London.
152. Piechal A. (2005), *Praca z uczniem zdolnym*, Edukacja i Dialog, nr 3.
153. Pieter J. (1975), *Zarys metodologii pracy naukowej*, PWN, Warszawa.
154. Pilch T. (1971), *Metodologia pedagogicznych badań środowiskowych*, Ossolineum, Warszawa.
155. Pilch T. (1998), *Zasady badań pedagogicznych*, Wydawnictwo Akademickie „Żak”, Warszawa.
156. Prokopiuk W. (2003), *Kariera kategorii „wychowanie jako rozwój” we współczesnej architekturze przestrzeni pedagogicznej*. W: *Edukacyjne problemy czasu globalizacji. W dialogu i perspektywie*. red. Karpińska A., Trans Humana, Białystok.
157. Puślecki W. (2006), *Inicjowanie nauki przez dziecko*, W: *Edukacja przedszkolna w teorii i praktyce*, red. Włoch S., Wydawnictwo Uniwersytetu Opolskiego, Opole.
158. Przetacznikowa M. (1973), *Podstawy rozwoju psychicznego dzieci i młodzieży*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.
159. Rambusch N., (1978), *Montessori teacher training: The calypso paradigm*, The constructive Triangle, s (3).

160. Reclik R. (2006), *Kompetencje matematyczne dziecka kończącego edukację przedszkolną a dojrzałość do uczenia się matematyki w warunkach szkolnych* W: *Edukacja przedszkolna w teorii i praktyce*, red. Włoch S., Wydawnictwo Uniwersytetu Opolskiego, Opole.
161. Reclik R. (2007), *Kompetencje matematyczne uczniów kończących pierwszy etap kształcenia – rzeczywistość a oczekiwania nauczycieli* W: *Dziecko- sukcesy i porażki* red. Piwowarski R., Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa.
162. Resek D., Rupley W.H., (1980), *Combatting mathophobia with a conceptual approach toward mathematics*, Educational Studies in Mathematics, nr4, s.423- 441.
163. Rudek I., Soroka-Fedorczuk A. (2010), *Wcześniejsza edukacja dzieci sześcioletnich w szkole w opiniach nauczycieli przedszkoli* W: *O pomyślny start szkolny dziecka* red. Guz S., Zwierzchowska I., Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej TWP w Warszawie, Warszawa.
164. Rura G., Klichowski M. (2011), *Kompetencje matematyczne założone sposoby kształtowania i dyskursy popkulturowe* W: *Dziecko w szkolnej rzeczywistości. Założony a rzeczywisty obraz edukacji elementarnej* red. Sowińska H., Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.
165. Schmutzler H.J. (1993), *Freiarbeit in der Montessori -pädagogik (Primarstufe)*, VBE-Medien-Service.
166. Schuberth E. (2013), *Matematyka w szkołach waldorfskich*, Impuls, Kraków.
167. Seidel J., Sobieszczyk M. (2007), „Kosz i walizeczka”, czyli o niektórych problemach edukacji matematycznej, W: *Efektywność kształcenia zintegrowanego. Implikacje dla teorii i praktyki*, red. Siwek H., Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej TWP, Warszawa.
168. i praktyki, red. Siwek H., Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej TWP, Warszawa.
169. Semadeni Z., Gruszczyk-Kolczyńska E., Treliński G., Bugajska-Jaszczołt B., Czajkowska M. (2015), *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka*, Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP Spółka z o.o, Kielce.
170. Siwek H. (1998), *Czynnościowe nauczanie matematyki*, WSiP, Warszawa.
171. Siwek H. (2005), *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa.
172. Skjöld Wennerström K., Bröderman Smeds M.(2007), *Pedagogika Montessori w przedszkolu i szkole*, Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków.

173. Skura M. (2009), *Kształtowanie pojęcia liczby naturalnej w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w klasie I. Liczby pierwszej dziesiątki* W: *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku edukacji szkolnej* red. Gruszczyk-Kolczyńska E., Wydawnictwo Edukacja Polska Sp. z o.o, Warszawa.
174. Skowrońska A. (2010), *Społeczno- emocjonalna gotowość dzieci sześcioletnich do podjęcia nauki (na podstawie badań własnych)* W: *O pomyślny start szkolny dziecka* red. Guz S., Zwierzchowska I., Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej TWP w Warszawie, Warszawa.
175. Sosnowska J. (2001), *Szanse i zagrożenia dla rozwoju uczniów zdolnych*, Edukacja i Dialog, nr 9-10.
176. Sowińska H. (2002), *Teoretyczne podstawy koncepcji integracji w nauczaniu* W: *Konteksty edukacji zintegrowanej* Sowińska H, Misiorna E., Michalak R., Wydawnictwo „Eruditus”, Poznań.
177. Sowińska H. (2011), *Wstęp* W: *Dziecko w szkolnej rzeczywistości. Założony a rzeczywisty obraz edukacji elementarnej* red. Sowińska H., Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.
178. Spionek H. (1973), *Zaburzenia rozwoju uczniów a niepowodzenia szkolne*, PWN, Warszawa.
179. Sporniak J. (2003), *Uczniowie uzdolnieni*, Życie szkoły, 2003, nr 4.
180. Steenberg U. (2004), *Pedagogika Marii Montessori w przedszkolu*, Wydawnictwo „Jedność”, Kielce.
181. Stein B. (2003), *Teoria i praktyka pedagogiki Marii Montessori w szkole podstawowej*, Wydawnictwo „Jedność”, Kielce.
182. Stucki E. (1978), *Rozwijanie zdolności matematycznych w nauczaniu początkowym*, Wydawnictwo Uczelniane WSP, Bydgoszcz.
183. Stucki E. (1986), *Sposoby zapobiegania trudnościom w uczeniu się matematyki uczniów klas niższych*, Nauczanie początkowe nr 4.
184. Surma B. (2008), *Pedagogika Montessori- podstawy teoretyczne i twórcze inspiracje*, Wydawnictwo Palatum, Łódź.
185. Surma B. (2011a) *Placówki wychowania przedszkolnego w Polsce* W: *Podstawy pedagogiki przedszkolnej z metodyką* red. Karbowniczek J., Kwaśniewska M., Surma B, Wydawnictwo WAM, Kraków.

186. Surma B. (2011b), *Uczestnicy (podmioty) procesu edukacyjnego w przedszkolu* W: *Podstawy pedagogiki przedszkolnej z metodyką* red. Karbowniczek J., Kwaśniewska M., Surma B, Wydawnictwo WAM, Kraków.
187. Surma B. (2013), *Gotowość szkolna do uczenia się matematyki dzieci sześcioletnich w przedszkolu Montessori – raport z badań*, Edukacja Elementarna w Teorii i Praktyce nr 28.
188. Swoboda E. (2007), *Kształcenie myślenia matematycznego dzieci w wieku przedszkolnym* W: *Nauczyciel wobec wczesnej edukacji dzieci* red. Laska E.I., Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów.
189. Szemińska A. (1972), *Dziecko u progu szkoły*, Nowa Szkoła, nr 7/8.
190. Szemińska A. (1981), *Rozwój pojęć matematycznych u dziecka* W: *Nauczanie początkowe matematyki* red. Semadeni Z., Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
191. Szewczuk K. (2014), *Gotowość szkolna dzieci 5-i 6-letnich w zakresie kompetencji matematycznych – analiza porównawcza*, Edukacja Elementarna w Teorii i Praktyce nr 33
192. Sztumski J. (2005), *Wstęp do metod i technik badań społecznych*, Śląsk, Katowice.
193. Świdrak M. (2007), *Gotowość szkolna dzieci rozpoczynających naukę w klasie pierwszej* W: *Nauczyciel wobec wczesnej edukacji dzieci* red. Laska E.I., Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów.
194. Topińska Z. (1985), *Organizacyjne formy procesu kierowania rozwojem dzieci*, W: *Podstawy pedagogiki przedszkolnej*, red. Kwiatowska M., Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
195. Trąd M. (1988), *Praca z uczniem uzdolnionym matematycznie podczas lekcji*, W: *Matematyka. Zeszyt 5. Materiały pomocnicze dla nauczycieli szkół podstawowych do pracy z uczniem uzdolnionym matematycznie*, red. Klorek F., Instytut Kształcenia Nauczycieli im. Wł. Spasowskiego, Zielona Góra.
196. Treliński G. (2005), *Stymulowanie aktywności – przeciwdziałanie bezradności matematycznej ucznia* W: *Uczeń we współczesnej szkole. Problemy reformy edukacji wczesnoszkolnej* red. Ratajek Z., Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej, Kielce.
197. Tuszyńska-Bogucka V. (1999), *Nauczyciel w percepcji dzieci 6-letnich w przedszkolu masowym oraz placówce Montessori – analiza porównawcza* W: *Szkoła i nauczyciel w percepcji uczniów* red. Gaś Z.B., Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa.
198. Tyborowska K. (1969), *Wiek przedszkolny* W: *Psychologia rozwojowa dzieci i młodzieży* red. Żebrowska M., Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

199. Tyl A. (2006a) *Między schematem a poszukiwaniem w matematycznej edukacji wczesnoszkolnej* W: *Wczesna edukacja. Między schematem a poszukiwaniem nowych ujęć teoretyczno- badawczych*, red. Klus-Stańska D., Szatan E., Bronk D., Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk.
200. Tyl A. (2006b), *Rozbudzanie zainteresowania matematyką w edukacji przedszkolnej*, W: *Edukacja przedszkolna w teorii i praktyce*, red. Włoch S., Wydawnictwo Uniwersytetu Opolskiego, Opole.
201. Wadsworth B. J. (1996), *Piaget`s theory of cognitive and affective development: foundations of constructivism*, Longman Publishers, USA.
202. Walasek-Jarosz B. (2010), *Staż przedszkolny wobec społecznych uwarunkowań dojrzałości szkolnej* W: *O pomyślny start szkolny dziecka*, red. Guz S., Zwierzchowska I., Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej TWP w Warszawie, Warszawa.
203. Waloszek D. (1993), *Przygotowanie dzieci sześciolletnich do zadań szkolnych*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej im. Tadeusza Kotarbińskiego w Zielonej Górze Zielona Góra.
204. Waloszek D. (1994), *Edukacja dzieci w wieku przedszkolnym. Założenia, treści i organizacja*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej im. Tadeusza Kotarbińskiego w Zielonej Górze, Zielona Góra.
205. Waloszek D. (1998), *Nauczyciel i dziecko. Organizacja warunków edukacji przedszkolne*, Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli, Zielona Góra.
206. Waloszek D. (2006), *Pedagogika przedszkolna metamorfoza statusu i przedmiotu badań*, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków.
207. Waszkiewicz E. (1996), *Pracuję z sześciolatkiem. Poradnik dla nauczycieli i rodziców*, WSiP, Warszawa.
208. Wiatrowska L., Dmochowska H. (2013), *Dziecko u progu szkoły. Dojrzałość szkolna dzieci a ich gotowość do nauki*, Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków.
209. Wilgocka-Okoń B. (1971), *O badaniu dojrzałości szkolnej*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.
210. Wilgocka-Okoń B. (1972), *Dojrzałość szkolna dzieci a środowisko*, Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa.
211. Wilgocka-Okoń B. (2003), *Gotowość szkolna dzieci sześciolletnich*, Wydawnictwo Akademickie „Żak”, Warszawa.

212. Włodarski Z. (1987), *Osiągnięcia rozwojowe uczniów podstawowym wskaźnikiem skuteczności oddziaływań pedagogicznych*, W: *Wprowadzenie do psychologii* Włodarski Z., Matczak A., WSiP, Warszawa.
213. Wood D. (2006), *Jak dzieci uczą się i myślą. Społeczne konteksty rozwoju poznawczego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.
214. Wojciechowska K. (2014), *Metody aktywizujące w pracy nauczyciela przedszkola*, W: *Pedagogika przedszkolna. Oblicza i poszukiwania*, red. Magda-Adamowicz M., Olczak A., Wydawnictwo Adam Marszałek, Toruń.
215. Woźniak N. (2014), *Konstruktywizm pedagogiczny a technologie informacyjne w edukacji wczesnoszkolnej*, W: *Człowiek w obliczu szans cyberprzestrzeni i świata wirtualnego*, red. Bednarek J., Księgarnie internetowe Difin, Warszawa.
216. Wrzochul-Stawinoga J.(2013), *Kompetencje nauczyciel a sukces szkolny ucznia*, Życie Szkoły, nr 10.
217. Wygotski L.S. (1971), *Wybrane prace psychologiczne*, PWN, Warszawa.
218. Zaborowski Z. (1973), *Wstęp do metodologii badań pedagogicznych*, Ossolineum, Wrocław.
219. Zaczyński W. (1976), *Praca badawcza nauczyciela*, PZWS, Warszawa.
220. Zaczyński W. (1995), *Praca badawcza nauczyciela*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
221. Zajdel K. (2005), *Tajemnice świata matematyki*, Edukacja i Dialog, nr 9.
222. Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady nr 2006/962/WE z dnia 18 grudnia 2006 w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie [Dz.U.L394 z 30.12.2006].
223. Zarucka B. (2008), *Trudności w uczeniu się matematyki u dzieci w ocenie nauczycieli* W: *Psychologia trudności arytmetycznych dzieci. Doniesienia z badań* red. Oszwa U., Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków.
224. Zielińska E., Jastrzębska J., Polakowska Cz., (2012), *Zanim pójdę do szkoły – matematyczne uzdolnienia dzieci w przedszkolach olsztyńskich*, Bliżej Przedszkola nr 2.
225. Ziemiński S. (1973), *Problemy dobrej diagnozy*, WP, Warszawa.
226. Zwierzchowska I. (2010), *Opinie nauczycieli edukacji elementarnej na temat wcześniejszego startu szkolnego* W: *O pomyślny start szkolny dziecka* red. Guz S., Zwierzchowska I., Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej TWP w Warszawie, Warszawa.

227. Żuchelkowska K. (2010), *Dziecko sześćcioletnie w szkole. Szansa czy zagrożenie?*
W: *O pomyślny start szkolny dziecka* red. Guz S., Zwierzchowska I., Wydawnictwo Wyższej
Szkóły Pedagogicznej TWP w Warszawie, Warszawa.

ANEKSY

Załącznik nr 1

Grupa dzieci z przedszkoli Montessori - liczba dzieci z podziałem na poszczególne cechy demograficzne dziecka i nauczyciela

dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej				staż pracy nauczyciela		kwalifikacje dodatkowe nauczyciela	
6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	1 rok	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	tak	nie
26	9	31	4	1	8	33	28	54	16	40	30
Razem 35		Razem 35		Razem 70				Razem 70		Razem 70	

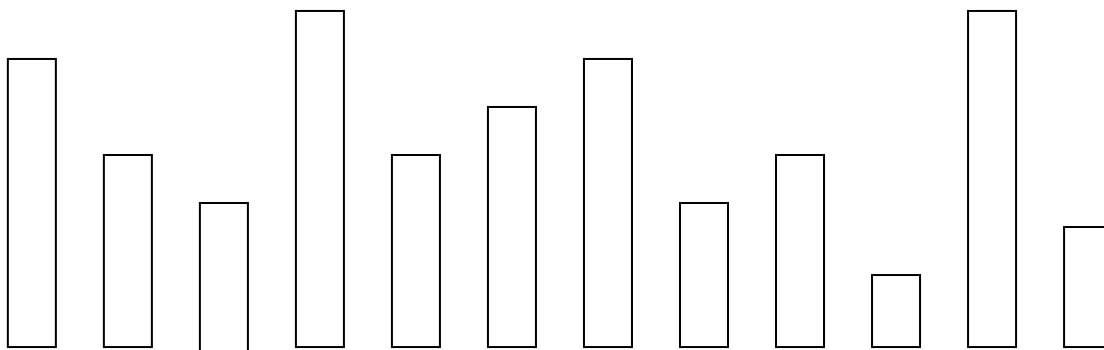
Załącznik nr 2

Grupa dzieci z przedszkoli tradycyjnych – liczba dzieci z podziałem na poszczególne cechy demograficzne dziecka i nauczyciela

dziewczynki		chłopcy		czas trwania edukacji przedszkolnej			staż pracy nauczyciela				kwalifikacje dodatkowe	
6 lat	7 lat	6 lat	7 lat	2 lata	3 lata	4 lata	0-5	6-10	11-20	powyżej 20	tak	Nie
16	18	15	21	5	32	33	34	13	15	8	9	61
Razem 34		Razem 36		Razem 70			Razem 70				Razem 70	

**TEST DO BADANIA POZIOMU
KOMPETENCJI MATEMATYCZNYCH
DZIECI KOŃCZĄCYCH EDUKACJĘ PRZEDSZKOLNĄ**

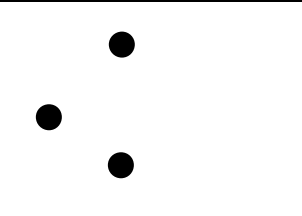
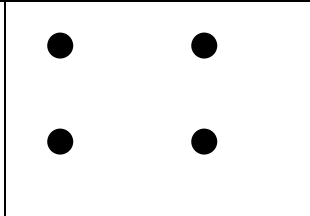
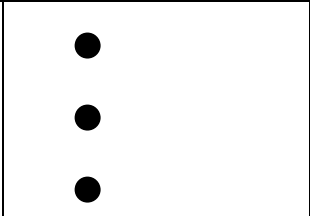
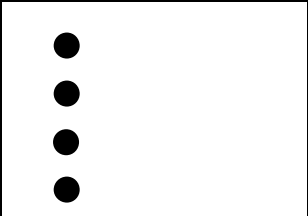
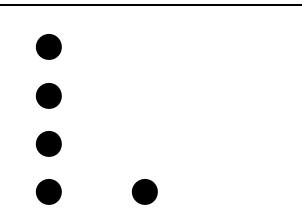
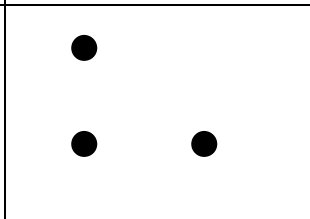
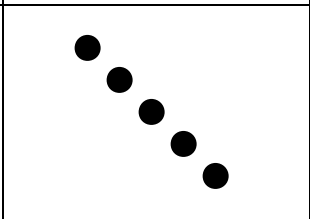
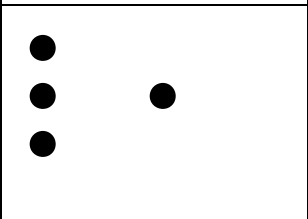
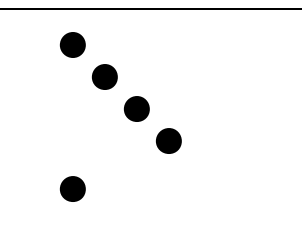
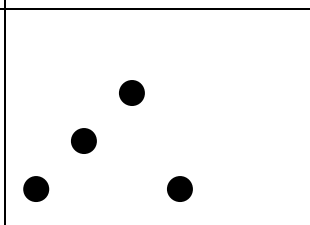
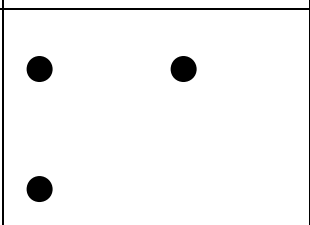
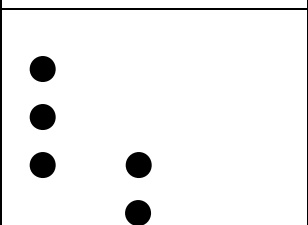
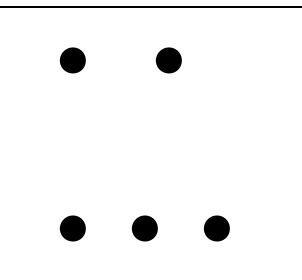
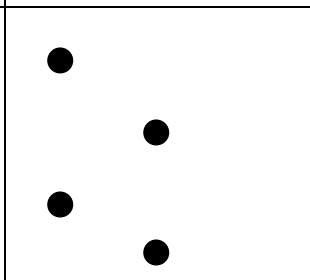
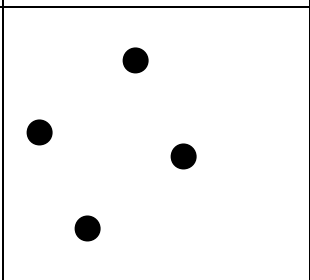
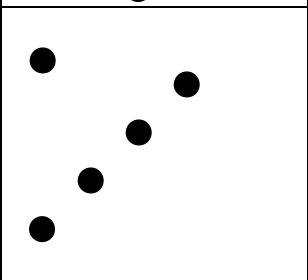
A.1. Policz patyczki zaczynając od lewej strony



Przekreśl **10** patyczków

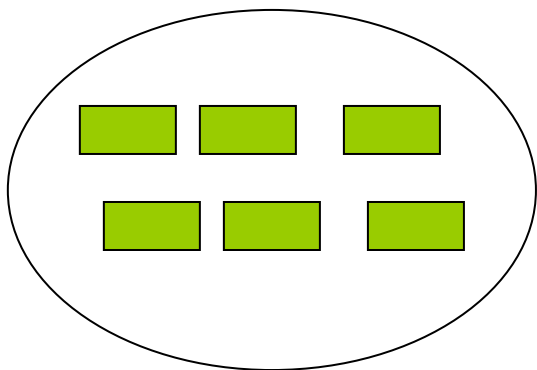
A.2. Skreśl na czerwono kratki, w których są po **4** kółeczka.

Skreśl na zielono kratki, w których jest po **5** kółeczek.

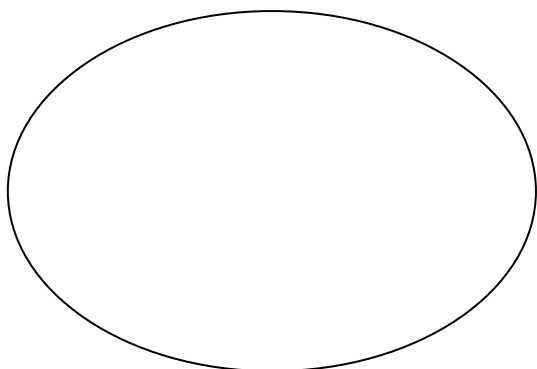
			
			
			
			

A.3. Policz, ile elementów jest w pętlach.

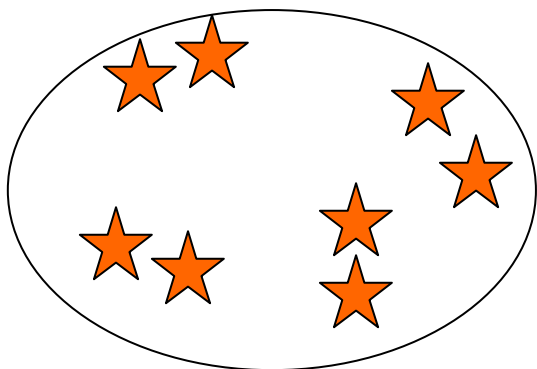
Połącz z odpowiednią cyfrą.



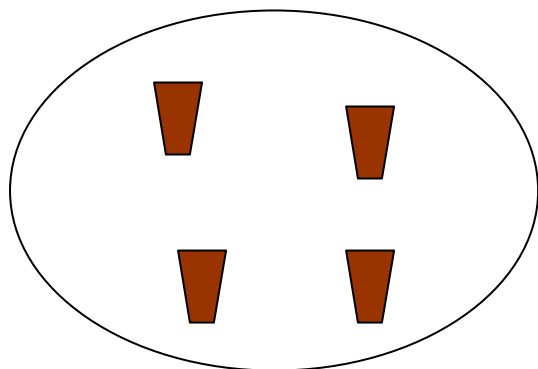
0



4



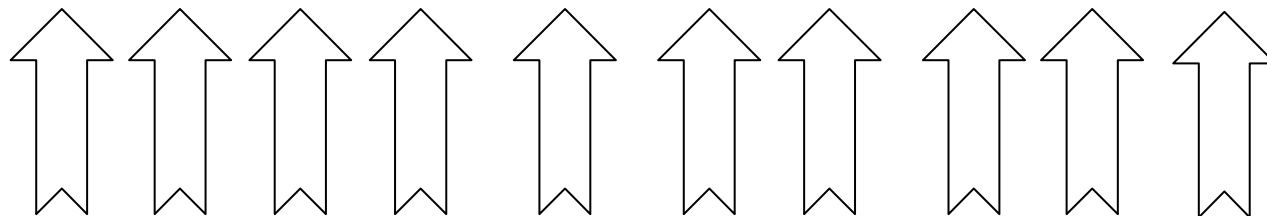
6



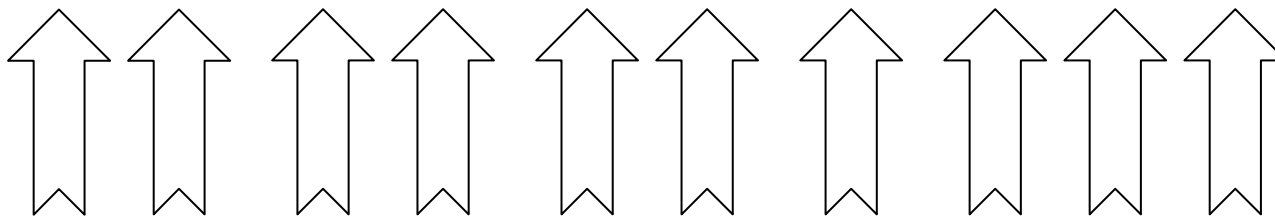
8

A. 4. Pomaluj wskazaną liczbę elementów.

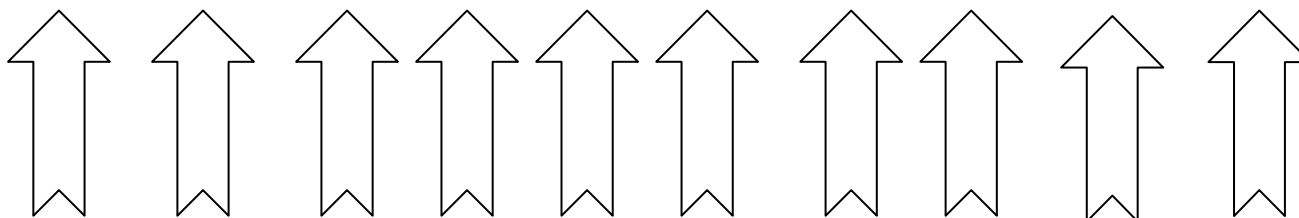
8



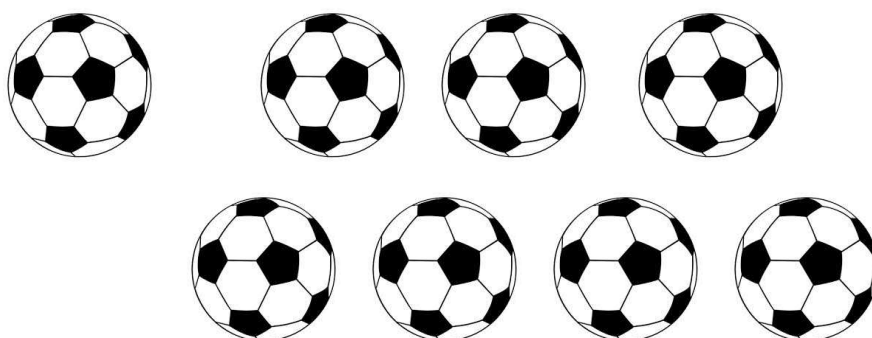
5



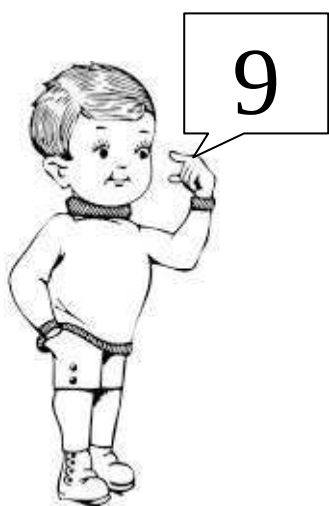
2



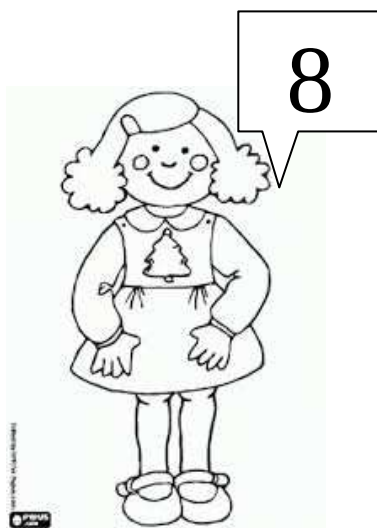
1. 5. Dzieci liczyły piłki.



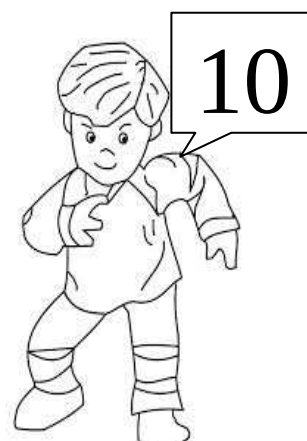
Takie otrzymały wyniki:



Jacek



Agata



Tomek

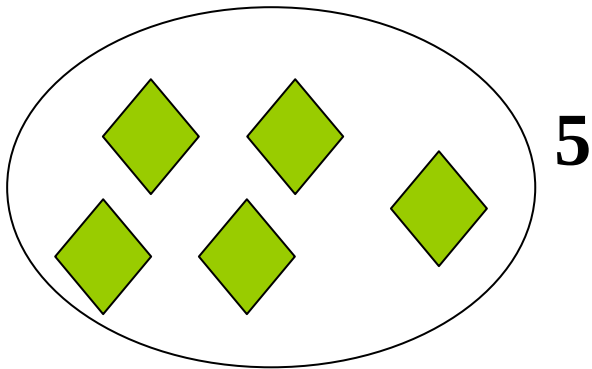
Kto **dobrze** policzył piłki?

Jacek ☐

Agata ☐

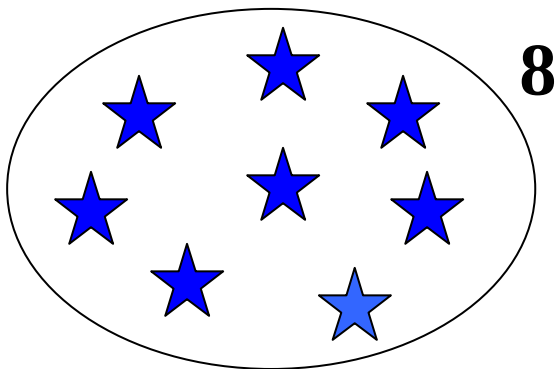
Tomek ☐

A.6. Sprawdź, czy Ania **dobrze** policzyła?



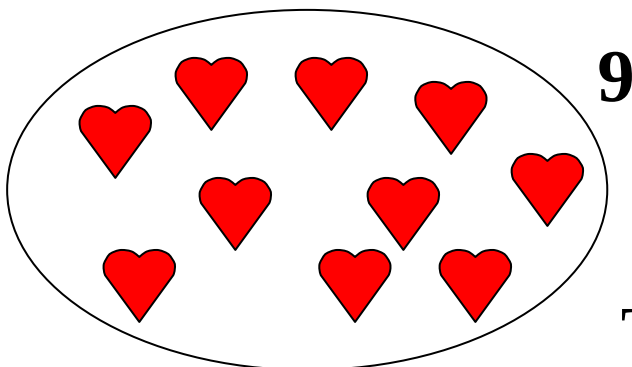
TAK

NIE



TAK

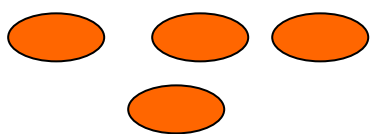
NIE



TAK

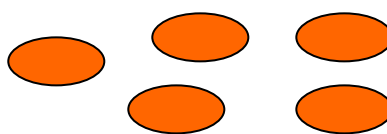
NIE

B. 1. Dodaj



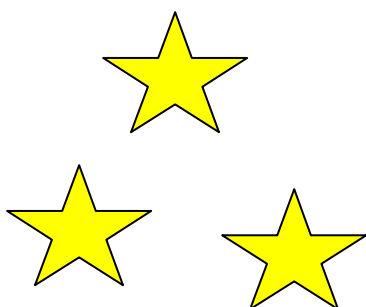
4

+



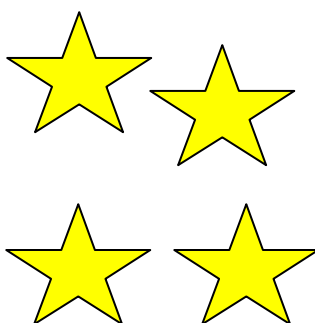
5

=



3

+



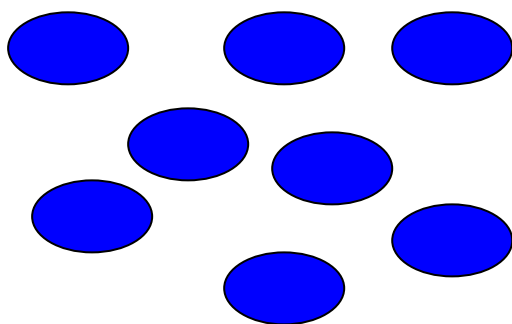
4

+



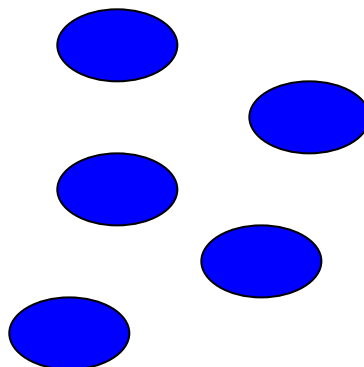
1

=



8

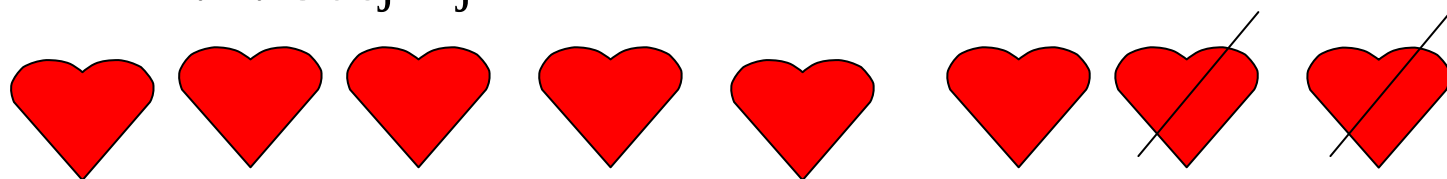
+



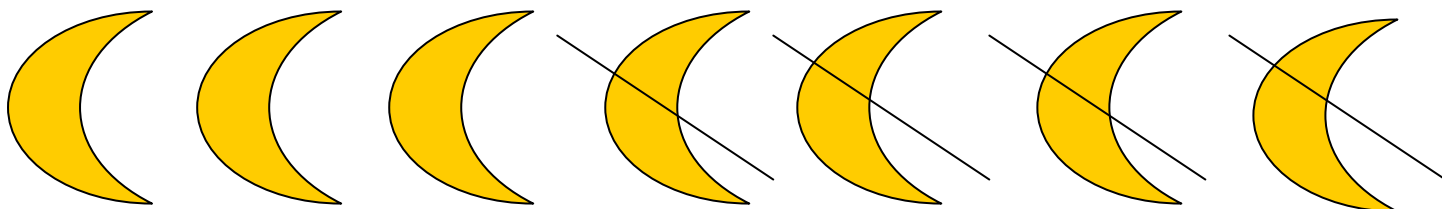
5

=

B. 2. Odejmi



$$8 - 2 = \boxed{}$$



$$7 - \boxed{} = \boxed{}$$



$$5 - \boxed{} = 2$$

B. 3. Połącz działanie z liczbą, która jest jego wynikiem

$$3 + 4 =$$

$$7 - 4 =$$

5

7

0

10

3

$$8 - 8 =$$

$$5 + 5 =$$

B. 4. Każdą następną liczbę w poziomych kratkach powiększ o 2

2	
4	

Każdą następną liczbę w poziomych kratkach pomniejsz o 2

7	
10	

B. 5. Wpisz w kratkę właściwą liczbę:

$$4 + \boxed{} = 6$$

$$5 + \boxed{} = 10$$

$$8 - \boxed{} = 7$$

$$9 - \boxed{} = 3$$

B. 6. Dodaj liczby. Wynik wpisz w kratkę:

$10 + 2 =$

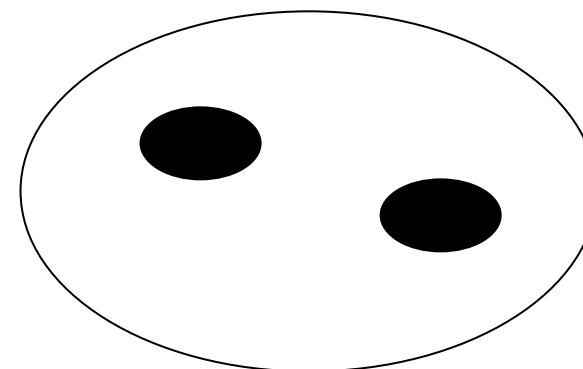
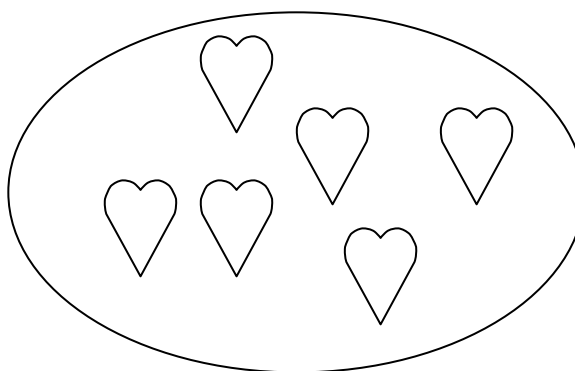
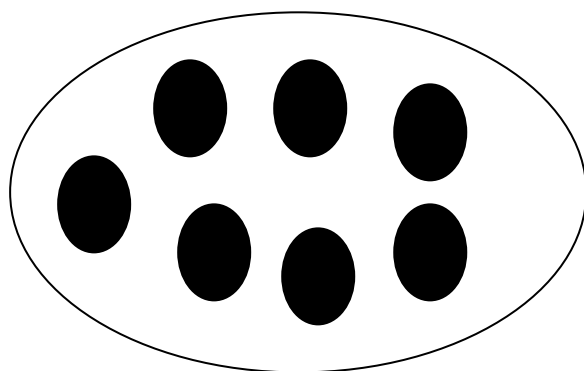
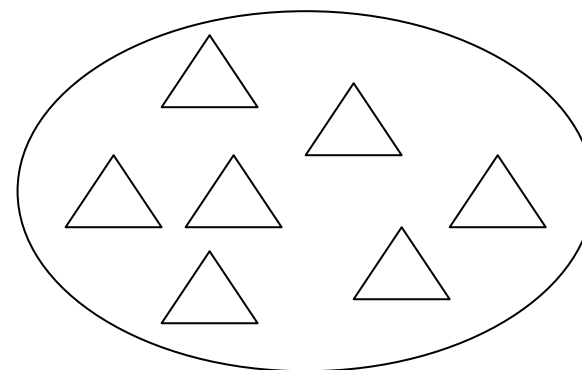
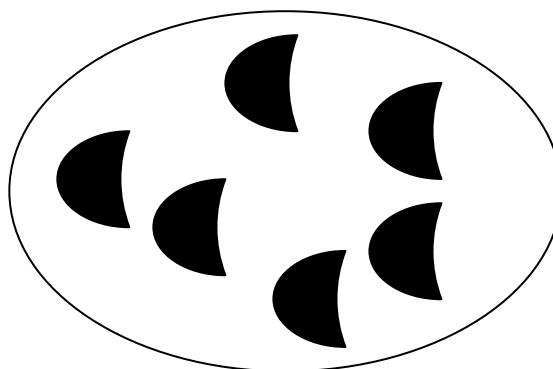
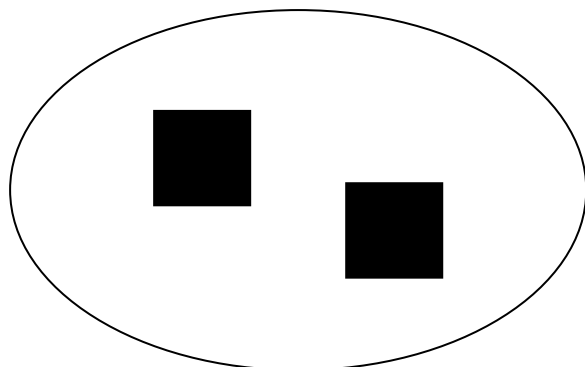
$10 + 6 =$

B. 7. Odejmij. Wynik wpisz w kratkę:

$13 - 3 =$

$15 - 5 =$

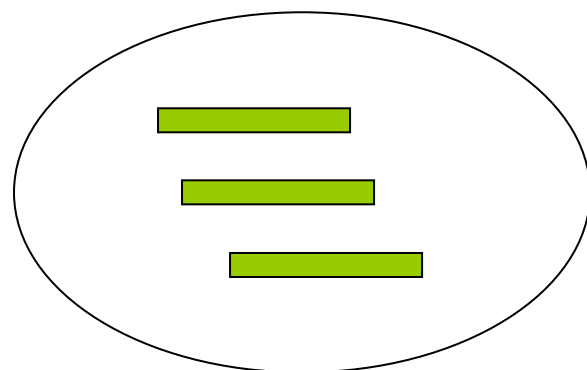
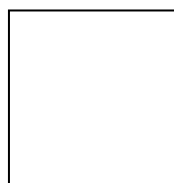
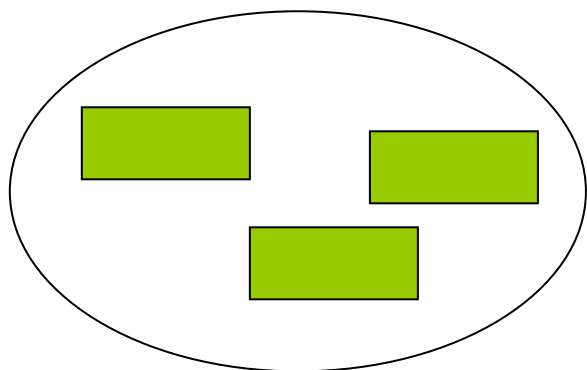
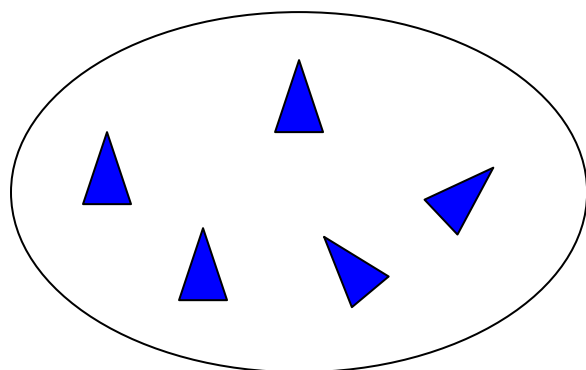
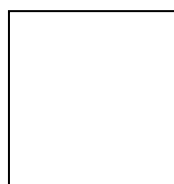
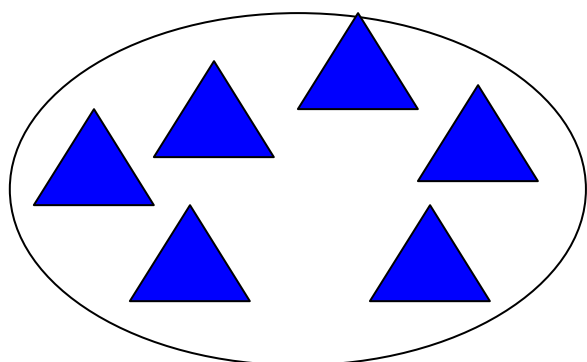
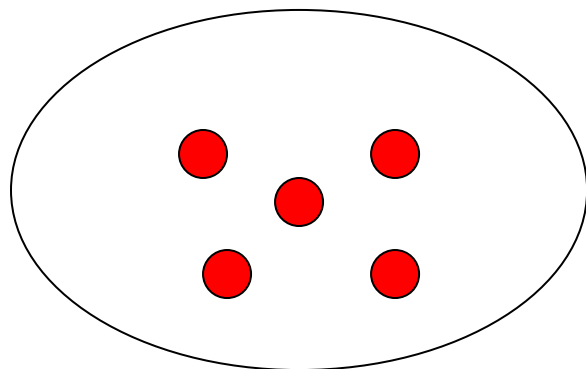
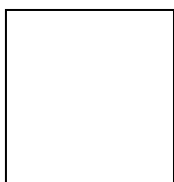
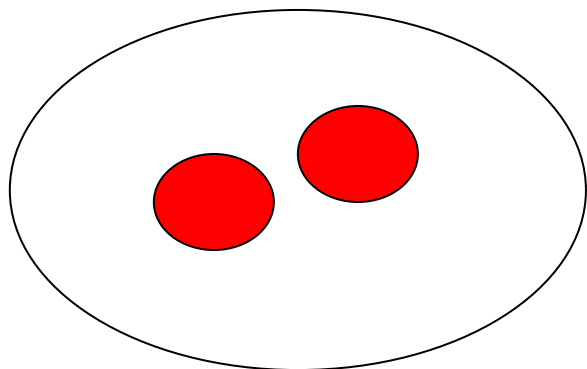
C. 1. Połącz pętle, w których jest **tyle samo** elementów.



C. 2. Gdzie jest więcej, mniej, tyle samo ?

Nauczyciel zaznacza wskazania dziecka stosując

znaki: „<”, „>” lub „=”



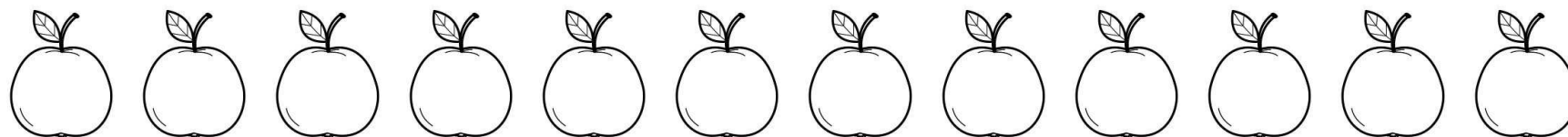
C. 3. Policz chmurki.

Narysuj **tyle samo** kółek

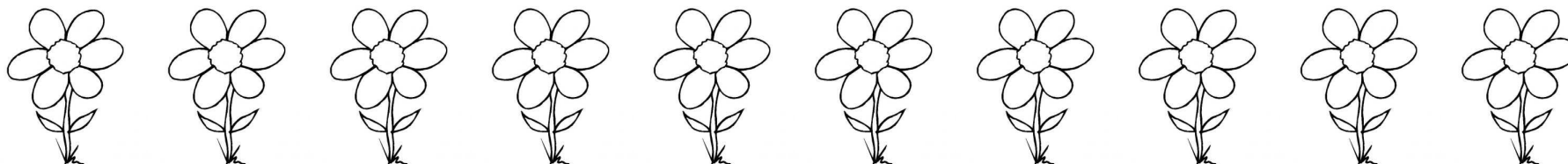


C. 4. Pokoloruj:

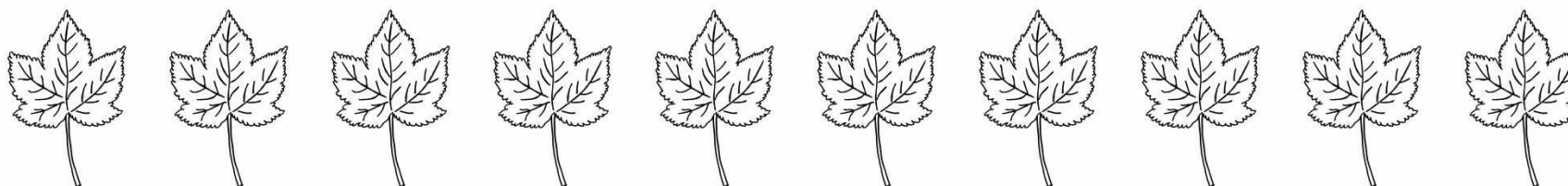
trzecie jabłko



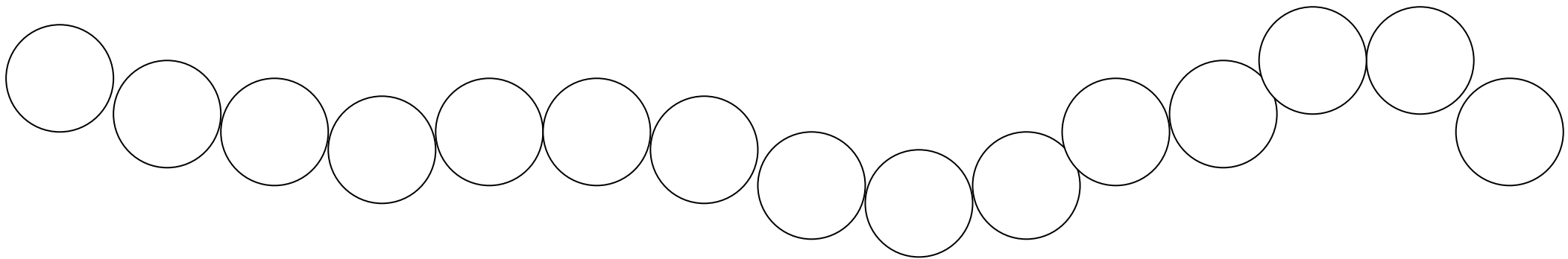
szósty kwiatek



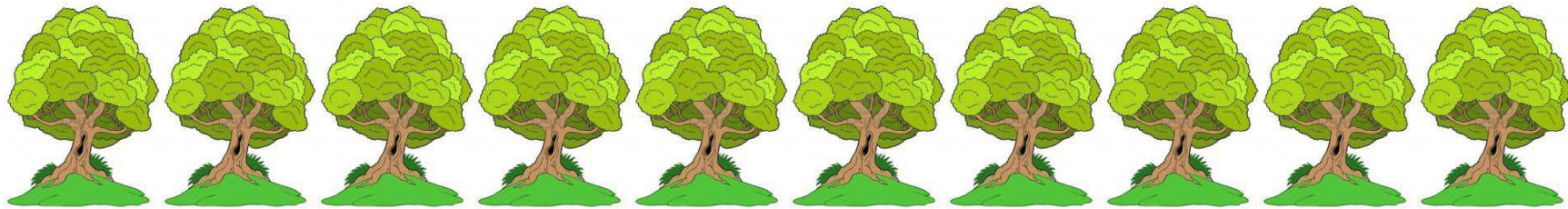
ósmym listek



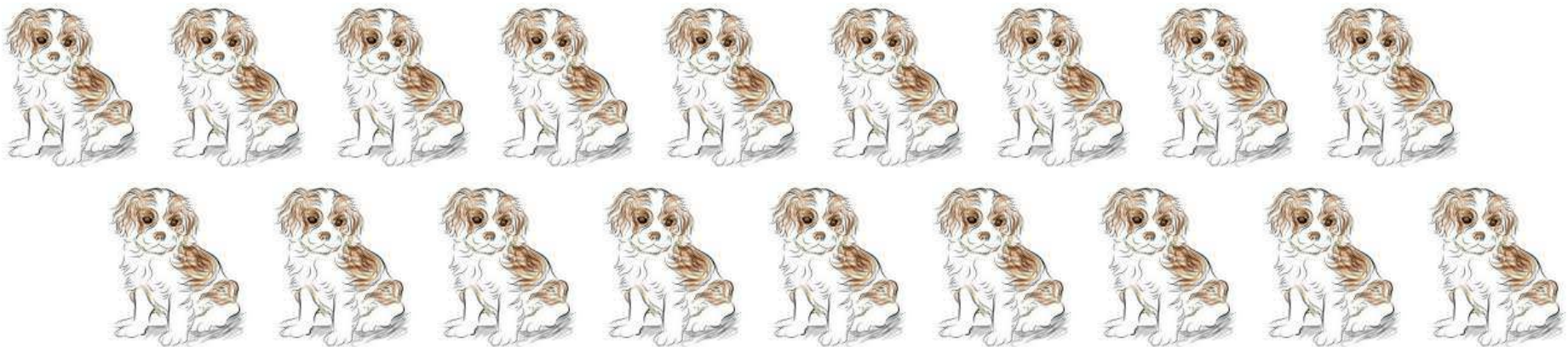
C. 5. Pokoloruj tak, aby **trzeci i piąty** koralik był żółty, **drugi i czwarty** był zielony, **siódmy i dziewiąty** był czerwony, a **szósty** – niebieski rozpoczynając od lewej strony.



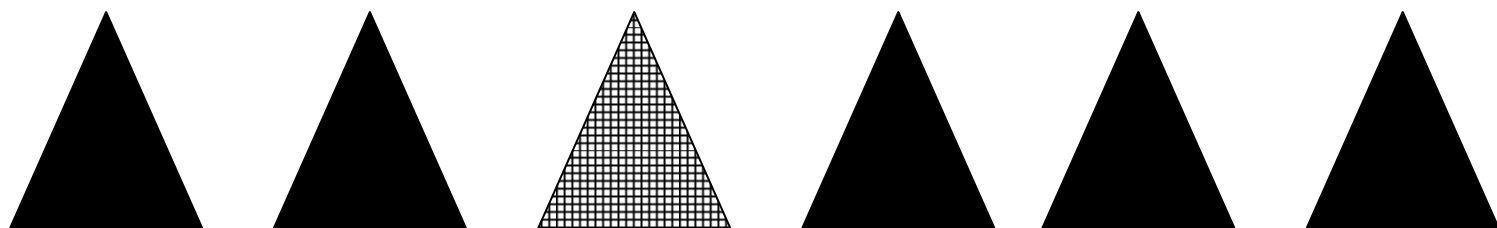
C. 6. Obrysuj na **czzerwono** pierwsze drzewo, a na **niebiesko** ostatnie drzewo



Obrysuj na **brązowo** pierwszego psa, a na **zielono** ostatniego psa



C. 7



Dziecko wykonuje polecenia zgodnie z poleceniem nauczyciela (TAK/ NIE)		
Dziecko odpowiada na pytanie nauczyciela: Który z kolei jest		
Trójkąt w kratkę	TAK	NIE
Trójkąt w kropki	TAK	NIE

D.1.

Dziecko wykonuje polecenia zgodnie z poleceniem nauczyciela (TAK/ NIE)		
Dziecko kładzie woreczek zgodnie z instrukcją nauczyciela:		
Położ woreczek:		
do tyłu	TAK	NIE
do przodu	TAK	NIE
do góry	TAK	NIE
na dół	TAK	NIE
za siebie	TAK	NIE
przed siebie	TAK	NIE
na lewo	TAK	NIE
na prawo	TAK	NIE

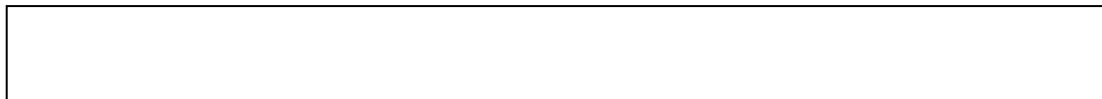
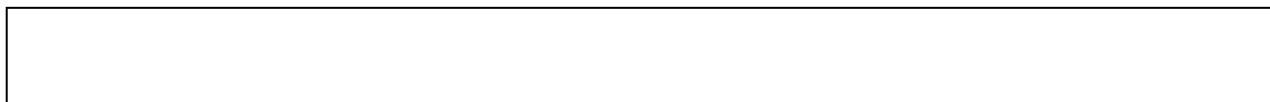
D. 2. Naklej:

- a. piłkę **pod stołem**,
- b. wazon **na stole**,
- c. krzesło obok stołu **z prawej strony**,
- d. lampę **nad stołem**



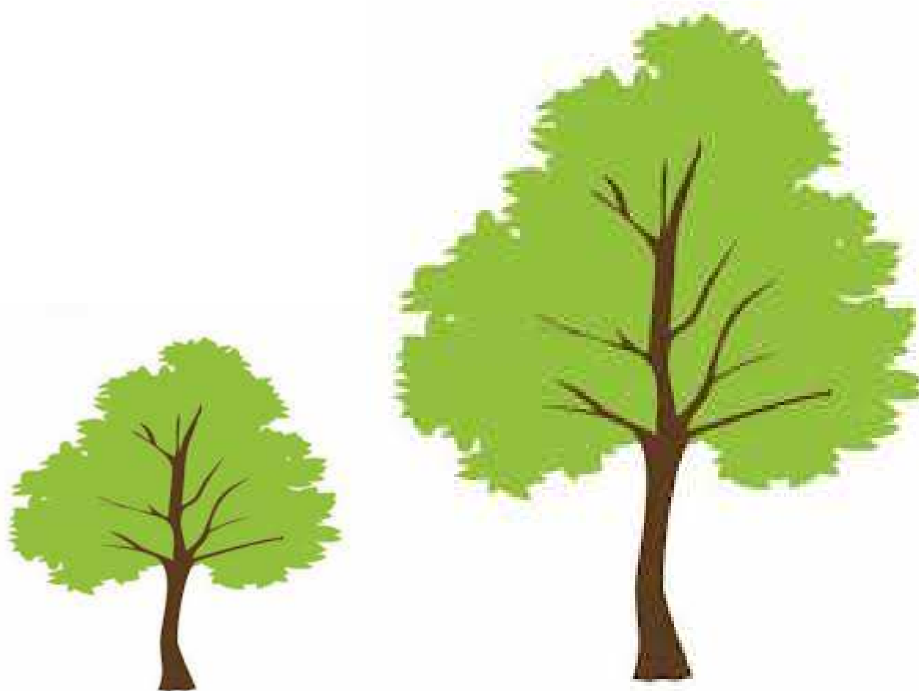
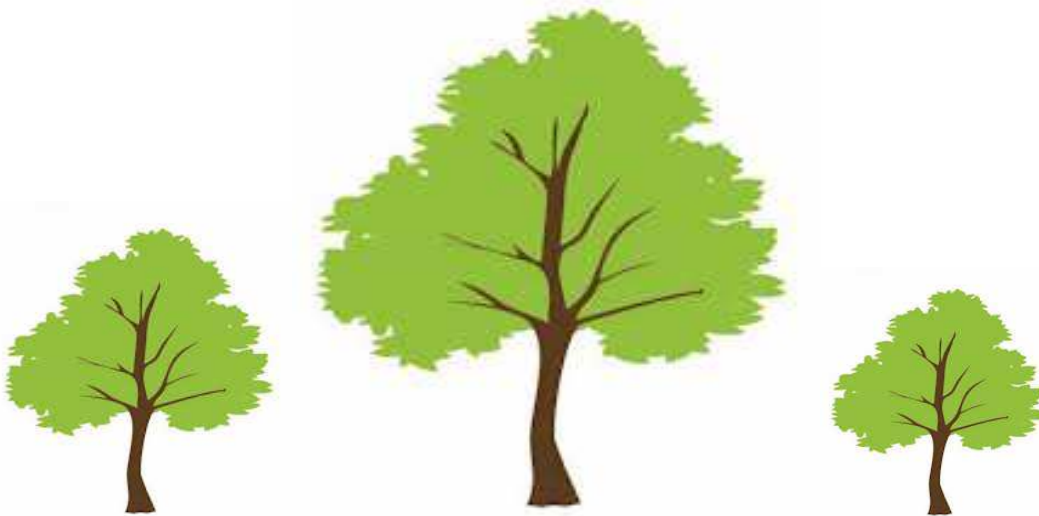
E. 1. Który z pasków jest **najdłuższy**? Pomaluj go na czerwono.

Który pasek jest **najkrótszy**? Pomaluj go na niebiesko.



E. 2.

Dziecko wykonuje polecenia zgodnie z poleceniem nauczyciela (TAK/ NIE)		
Ułóż drzewa od najniższego do najwyższego	TAK	NIE



E. 3.

Dziecko wykonuje polecenia zgodnie z poleceniem nauczyciela (TAK/ NIE)		
Dziecko dokonuje pomiaru długości za pomocą:		
Kroków odcinka wyznaczonego przez nauczyciela	TAK	NIE
Stopa za stopą odcinka wyznaczonego przez nauczyciela	TAK	NIE
Dłonią odcinka wyznaczonego przez nauczyciela	TAK	NIE

E. 4. Zmierz długość pasków



cm



cm

F. 1.

Dziecko wykonuje polecenia zgodnie z poleceniem nauczyciela (TAK/ NIE)		
Do podanej pory dnia przyporządkuj obrazek:		
wieczór	TAK	NIE
rano	TAK	NIE
popołudnie	TAK	NIE

F. 2.

Dziecko wykonuje polecenia zgodnie z poleceniem nauczyciela (TAK/ NIE)		
Ułóż obrazki z zachowaniem właściwej kolejności:		
Rano	TAK	NIE
Popołudnie	TAK	NIE
wieczór	TAK	NIE



F. 3.

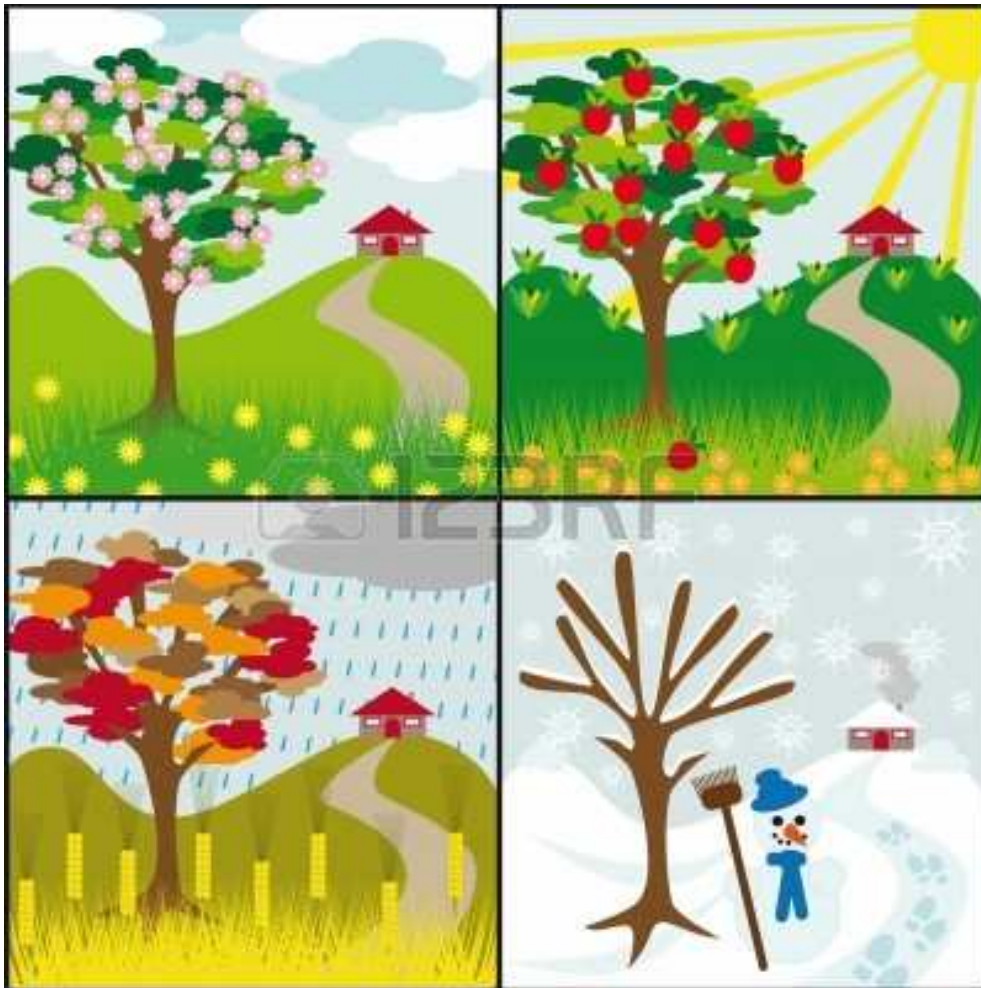
Dziecko wykonuje polecenia zgodnie z poleceniem nauczyciela (TAK/ NIE)		
Wymień w kolejności wszystkie dni tygodnia	TAK	NIE
Podaj, jaki dzisiaj jest dzień tygodnia	TAK	NIE
Podaj, jaki jutro będzie dzień tygodnia	TAK	NIE
Podaj, jaki dzień tygodnia był wczoraj	TAK	NIE

F. 4.

Dziecko wykonuje polecenia zgodnie z poleceniem nauczyciela (TAK/ NIE)		
Do podanej pory roku przyporządkuj obrazek:		
Jesień	TAK	NIE
Lato	TAK	NIE
Wiosna	TAK	NIE
Zima	TAK	NIE

F. 5

Dziecko wykonuje polecenia zgodnie z poleceniem nauczyciela (TAK/ NIE)		
Obrazki symbolizujące pory roku ułóż we właściwej kolejności		
Wiosna	TAK	NIE
Lato	TAK	NIE
Jesień	TAK	NIE
zima	TAK	NIE



LATO
JESIEŃ
ZIMA
WIOSNA

F. 6. miesiące

Dziecko wykonuje polecenia zgodnie z poleceniem nauczyciela (TAK/ NIE)		
Wymień nazwy miesięcy	TAK	NIE

F. 7.

Dziecko wykonuje polecenia zgodnie z poleceniem nauczyciela (TAK/ NIE)		
Ułóż historyjkę obrazkową we właściwej kolejności	TAK	NIE



METRYCZKA

A. DZIECKO

imię dziecka

wiek dziecka

czas trwania edukacji przedszkolnej

B. NAUCZYCIEL

staż pracy nauczyciela

0-5 lat ☐

6-10 lat ☐

11-20 lat ☐

powyżej 20 lat ☐

- kwalifikacje dodatkowe nauczycieli przygotowujące do prowadzenia zajęć matematycznych

NIE

TAK

jeśli tak, to jakie

(kursy, szkolenia, studia podyplomowe).

**KWESTIONARIUSZ ANKIETY DLA NAUCZYCIELA
DOTYCZĄCY INDYWIDUALNEJ OCENY POZIOMU
KOMPETENCJI MATEMATYCZNYCH
DZIECI KOŃCZĄCYCH EDUKACJĘ PRZEDSZKOLNĄ**

1. Jaki jest – zdaniem Pani /Pana poziom kompetencji matematycznych dziecka kończącego edukację przedszkolną w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego? (proszę podkreślić jedną odpowiedź)

a. bardzo wysoki

(dziecko bezbłędnie, samodzielnie: tworzy zbiór 10- elementowy; wyodrębnia zbiory o podanej liczebności; przelicza elementy zbiorów w zakresie 10 i łączy liczbę z jej symbolem graficznym; tworzy zbiory o podanej liczebności; odróżnia liczenie poprawne od błędnego, a ponadto samodzielnie przelicza powyżej 10);

b. wysoki

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela bezbłędnie: tworzy zbiór 10- elementowy; wyodrębnia zbiory o podanej liczebności; przelicza elementy zbiorów w zakresie 10 i łączy liczbę z jej symbolem graficznym; tworzy zbiory o podanej liczebności; odróżnia liczenie poprawne od błędnego);

c. średni

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela popełnia pomyłki podczas: tworzenia zbioru 10- elementowego; wyodrębniania zbiorów o podanej liczebności; przeliczania elementów zbiorów w zakresie 10 i łączenia ilości z jej symbolem graficznym; tworzenia zbiorów o podanej liczebności; odróżniania liczenia poprawnego od błędnego);

d. niski

(dziecko po objaśnieniach i tylko z pomocą nauczyciela: tworzy zbiór 10- elementowy; wyodrębnia niektóre zbiory o podanej liczebności (w zależności od położenia elementów); przelicza elementy zbiorów w zakresie 10 i łączy liczbę z jej symbolem graficznym, (ma problem z liczbą zero); tworzy zbiory o podanej liczebności; nie odróżnia liczenia poprawnego od błędnego);

e. bardzo niski

(dziecko po objaśnieniach i mimo pomocy nauczyciela ma poważne problemy z: tworzeniem zbioru 10- elementowego; wyodrębnianiem zbiorów o podanej liczebności; przeliczaniem elementów zbiorów w zakresie 10 i łączeniem ilości z jej symbolem graficznym, (nie rozumie liczby zero); tworzeniem zbiorów o podanej liczebności; ponadto nie odróżnia liczenia poprawnego od błędnego).

2. Jaki jest – zdaniem Pani /Pana poziom kompetencji matematycznych dziecka kończącego edukację przedszkolną w zakresie dodawania i odejmowania liczb wspomaganego liczeniem na palcach lub innych zbiorach zastępczych? (proszę podkreślić jedną odpowiedź)

a. bardzo wysoki

(dziecko bezbłędnie, samodzielnie dodaje i odejmuje liczby powyżej 10, przelicza odjemnik i różnicę oraz ustala odjemnik przy podanej wartości odjemnej i różnicy, wykonuje działania w zapisie symbolicznym, liczy w pamięci; rozumie dodawanie jako powiększanie a odejmowanie jako pomniejszanie; ustala brakujący składnik lub odjemnik – zadania z luką);

b. wysoki

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela bezbłędnie dodaje i odejmuje liczby powyżej 10, przelicza odjemnik i różnicę oraz ustala odjemnik przy podanej wartości odjemnej i różnicy, wykonuje działania w zapisie symbolicznym, większość obliczeń wykonuje w pamięci; rozumie dodawanie jako powiększanie, a odejmowanie jako pomniejszanie);

c. średni

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela popełnia pomyłki podczas: dodawania kilku składników powyżej 10; odejmowania liczb na konkretach, przeliczania odjemnika i różnicy; podejmuje próby wykonywania działań w zapisie symbolicznym, najczęściej liczy opierając się na konkretach);

d. niski

(dziecko po objaśnieniach i tylko z pomocą nauczyciela dodaje i odejmuje liczby wyłącznie na konkretach w zakresie 10; podejmuje próby wykonywania działań w zapisie symbolicznym; nie potrafi liczyć w pamięci);

e. bardzo niski

(dziecko po objaśnieniach i mimo pomocy nauczyciela ma poważne problemy z dodawaniem i odejmowaniem liczb na konkretach zakresie 10; nie wykonuje działań w zapisie symbolicznym, nie wykonuje rachunku pamięciowego).

3. Jaki jest – zdaniem Pani /Pana poziom kompetencji matematycznych dziecka kończącego edukację przedszkolną w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi? (proszę podkreślić jedną odpowiedź)

a. bardzo wysoki

(dziecko bezbłędnie, samodzielnie ustala równoliczność zbiorów niezależnie od wielkości i jakości elementów (stałość ilości nieciągłych), porównuje liczebność zbiorów niezależnie od wielkości elementów; prawidłowo stosuje znaki „<”, „>”, „=”; tworzy zbiory równoliczne; rozumie i stosuje liczebniki porządkowe);

b. wysoki

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela bezbłędnie ustala równoliczność zbiorów niezależnie od wielkości i jakości elementów (stałość ilości nieciągłych), porównuje liczebność zbiorów niezależnie od wielkości elementów; tworzy zbiory równoliczne; rozumie i stosuje liczebniki porządkowe);

c. średni

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela popełnia pomyłki podczas ustalania równoliczności liczebności zbiorów oraz porównywania liczebności zbiorów niezależnie od wielkości elementów; w czasie tworzenia zbiorów równolicznych; rozumie liczebniki porządkowe);

d. niski

(dziecko po objaśnieniach i tylko z pomocą nauczyciela ustala równoliczności liczebności zbiorów oraz porównuje liczebność zbiorów, uzależniając ją od wielkości i położenia elementów; tworzy zbiory równoliczne; rozumie liczebniki porządkowe);

e. bardzo niski

(dziecko po objaśnieniach i mimo pomocy nauczyciela ma poważne problemy z porównywaniem liczebności zbiorów, uzależnia ją od wielkości i położenia elementów; porównuje liczebność zbiorów wyłącznie na konkretnych, ma kłopoty z tworzeniem zbiorów równolicznych oraz rozumieniem liczebników porządkowych,

4. Jaki jest – zdaniem Pani /Pana poziom kompetencji matematycznych dziecka kończącego edukację przedszkolną w zakresie rozróżniania prawej i lewej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów? (proszę podkreślić jedną odpowiedź)

a. bardzo wysoki

(dziecko bezbłędnie, samodzielnie określa kierunki w sytuacji rzeczywistej względem siebie oraz na kartce papieru);

b. wysoki

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela bezbłędnie określa kierunki w sytuacji rzeczywistej względem siebie oraz na kartce papieru);

c. średni

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela popełnia pomyłki podczas określania kierunków w sytuacji rzeczywistej względem siebie oraz na kartce papieru);

d. niski

(dziecko po objaśnieniach i tylko z pomocą nauczyciela określa kierunki w sytuacji rzeczywistej względem siebie oraz na kartce papieru);

e. bardzo niski

(dziecko po objaśnieniach i mimo pomocy nauczyciela ma poważne problemy z określaniem kierunków w sytuacji rzeczywistej względem siebie; nie określa kierunków na kartce papieru).

5. Jaki jest – zdaniem Pani /Pana poziom kompetencji matematycznych dziecka kończącego edukację przedszkolną w zakresie dokonywania pomiaru długości i znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą? (proszę podkreślić jedną odpowiedź)

a. bardzo wysoki

(dziecko bezbłędnie, samodzielnie wyróżnia element najdłuższy i najkrótszy, porządkuje elementy według podanej cechy jakościowej; mierzy długość krokami, stopami i dłonią oraz za pomocą linijki);

b. wysoki

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela bezbłędnie wyróżnia element najdłuższy i najkrótszy, porządkuje elementy według podanej cechy jakościowej; mierzy długość krokami, stopami i dłonią oraz za pomocą linijki);

c. średni

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela popełnia pomyłki podczas wyróżniania elementu najdłuższego i najkrótszego, porządkowania elementów według podanej cechy jakościowej; mierzenia długość krokami, stopami i dłonią, szczególnie przy pomocy linijki);

d. niski

(dziecko po objaśnieniach i tylko z pomocą nauczyciela wyróżnia element najdłuższy i najkrótszy, porządkuje elementy według podanej cechy jakościowej; mierzy długość krokami, stopami i dłonią; nie posługuje się linijką);

e. bardzo niski

(dziecko po objaśnieniach i mimo pomocy nauczyciela ma poważne problemy z: wyróżnianiem elementu najdłuższego i najkrótszego, porządkowaniem elementów według podanej cechy jakościowej; oraz mierzeniem długości krokami, stopami i dłonią, nie posługuje się linijką).

6. Jaki jest – zdaniem Pani /Pana poziom kompetencji matematycznych dziecka kończącego edukację przedszkolną w zakresie orientacji w czasie - znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku? (proszę podkreślić jedną odpowiedź)

a. bardzo wysoki

(dziecko bezbłędnie, samodzielnie rozróżnia pory dnia i wymienia je w kolejności, wymienia nazwy dni tygodnia we właściwej kolejności; stosuje pojęcia „dziś”, „jutro” i „wczoraj”; rozpoznaje pory roku i podaje je w kolejności; wymienia nazwy miesięcy; układa historyjkę obrazkową z zachowaniem chronologii wydarzeń);

b. wysoki

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela bezbłędnie rozróżnia pory dnia i wymienia je w kolejności, wymienia nazwy dni tygodnia we właściwej kolejności; stosuje pojęcia „dziś”, „jutro” i „wczoraj”; rozpoznaje pory roku i podaje je w kolejności, wymienia nazwy miesięcy; układa historyjkę obrazkową z zachowaniem chronologii wydarzeń);

c. średni

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela popełnia pomyłki podczas: rozróżniania pór dnia i ustalania ich kolejność, wymieniania nazw dni tygodnia we właściwej kolejności oraz stosowania pojęć „dziś”, „jutro” i „wczoraj”; rozpoznawania i ustalania kolejności pór roku; nazywania miesięcy; układania historyjki obrazkowej z zachowaniem chronologii wydarzeń);

d. niski

(dziecko po objaśnieniach i tylko z pomocą nauczyciela rozróżnia pory dnia i ustala ich kolejność; rozpoznaje i ustala kolejność pór roku; wymienia nazw dni tygodnia, układa historyjkę obrazkową z zachowaniem chronologii wydarzeń; nie stosuje pojęć „dziś”, „jutro” i „wczoraj”; myli nazwy miesięcy);

e. bardzo niski

(dziecko po objaśnieniach i mimo pomocy nauczyciela ma poważne problemy z: rozróżnianiem pór dnia i ustalaniem ich kolejności, z rozpoznawaniem i ustalaniem kolejności pór roku; nie potrafi ułożyć historyjki obrazkowej z zachowaniem chronologii wydarzeń; myli nazwy miesięcy; nie rozumie pojęć „dziś”, „jutro” i „wczoraj”).

7. W jakim stopniu – zdaniem Pani/Pana wiek, w którym dziecko kończy edukację przedszkolną różnicuje poziom jego kompetencji matematycznych?

- a. w bardzo wysokim (jest czynnikiem decydującym)
- b. w wysokim
- c. w średnim
- d. w niskim
- e. wiek nie ma znaczenia

8. W jakim stopniu – zdaniem Pani/Pana płeć dziecka kończącego edukację przedszkolną różnicuje poziom jego kompetencji matematycznych?

- a. w bardzo wysokim (jest czynnikiem decydującym)
- b. w wysokim
- c. w średnim
- d. w niskim
- e. płeć nie ma znaczenia

9. W jakim stopniu – zdaniem Pani/Pana czas trwania edukacji przedszkolnej różnicuje poziom kompetencji matematycznych dziecka?

- a. w bardzo wysokim (jest czynnikiem decydującym)
- b. w wysokim
- c. w średnim
- d. w niskim
- e. długość edukacji przedszkolnej nie ma znaczenia

METRYCZKA

A. DZIECKO

imię dziecka

wiek dziecka

czas trwania edukacji przedszkolnej

B. NAUCZYCIEL

staż pracy nauczyciela

0-5 lat ☐

6-10 lat ☐

11-20 lat ☐

powyżej 20 lat ☐

kwalifikacje dodatkowe nauczycieli przygotowujące do prowadzenia zajęć matematycznych
NIE

TAK

jeśli tak, to jakie

(kursy, szkolenia, studia

podyplomowe)

Dziękuję za wypełnienie ankiety

**KWESTIONARIUSZ ANKIETY DLA NAUCZYCIELA
DOTYCZĄCY GLOBALNEJ OCENY POZIOMU
KOMPETENCJI MATEMATYCZNYCH
DZIECI KOŃCZĄCYCH EDUKACJĘ PRZEDSZKOLNĄ**

1. Jaki jest – zdaniem Pani /Pana poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w zakresie liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego? Proszę określić dla każdej kategorii dzieci wpisując w kratkę właściwy poziom (od bardzo wysokiego do bardzo niskiego).

dziewczynki 6-letnie	
dziewczynki 7-letnie	
chłopcy 6-letni	
chłopcy 7-letni	

bardzo wysoki (dziecko bezbłędnie, samodzielnie: tworzy zbiór 10- elementowy; wyodrębnia zbiory o podanej liczebności; przelicza elementy zbiorów w zakresie 10 i łączy liczbę z jej symbolem graficznym; tworzy zbiory o podanej liczebności; odróżnia liczenie poprawne od błędnego, a ponadto samodzielnie przelicza powyżej 10);

wysoki (dziecko po objaśnieniach nauczyciela bezbłędnie: tworzy zbiór 10- elementowy; wyodrębnia zbiory o podanej liczebności; przelicza elementy zbiorów w zakresie 10 i łączy liczbę z jej symbolem graficznym; tworzy zbiory o podanej liczebności; odróżnia liczenie poprawne od błędnego);

średni (dziecko po objaśnieniach nauczyciela popełnia pomyłki podczas: tworzenia zbioru 10- elementowego; wyodrębniania zbiorów o podanej liczebności; przeliczania elementów zbiorów w zakresie 10 i łączenia ilości z jej symbolem graficznym; tworzenia zbiorów o podanej liczebności; odróżniania liczenia poprawnego od błędnego);

niski (dziecko po objaśnieniach i tylko z pomocą nauczyciela: tworzy zbiór 10- elementowy; wyodrębnia niektóre zbiory o podanej liczebności (w zależności od położenia elementów); przelicza elementy zbiorów w zakresie 10 i łączy liczbę z jej symbolem graficznym, (ma problem z liczbą zero); tworzy zbiory o podanej liczebności; nie odróżnia liczenia poprawnego od błędnego);

bardzo niski (dziecko po objaśnieniach i mimo pomocy nauczyciela ma poważne problemy z: tworzeniem zbioru 10- elementowego; wyodrębnianiem zbiorów o podanej liczebności; przeliczaniem elementów zbiorów w zakresie 10 i łączeniem ilości z jej symbolem graficznym, (nie rozumie liczby zero); tworzeniem zbiorów o podanej liczebności; ponadto nie odróżnia liczenia poprawnego od błędnego).

2. Jaki jest – zdaniem Pani /Pana poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w zakresie dodawania i odejmowania liczb wspomaganego liczeniem na palcach lub innych zbiorach zastępczych? Proszę określić dla każdej kategorii dzieci wpisując w kratkę właściwy poziom (od bardzo wysokiego do bardzo niskiego).

dziewczynki 6-letnie	
dziewczynki 7-letnie	
chłopcy 6-letni	
chłopcy 7-letni	

bardzo wysoki

(dziecko bezbłędnie, samodzielnie dodaje i odejmuje liczby powyżej 10, przelicza odjemnik i różnicę oraz ustala odjemnik przy podanej wartości odjemnej i różnicy, wykonuje działania w zapisie symbolicznym, liczy w pamięci; rozumie dodawanie jako powiększanie a odejmowanie jako pomniejszanie; ustala brakujący składnik lub odjemnik – zadania z luką);

wysoki

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela bezbłędnie dodaje i odejmuje liczby powyżej 10, przelicza odjemnik i różnicę oraz ustala odjemnik przy podanej wartości odjemnej i różnicy, wykonuje działania w zapisie symbolicznym, większość obliczeń wykonuje w pamięci; rozumie dodawanie jako powiększanie, a odejmowanie jako pomniejszanie);

średni

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela popełnia pomyłki podczas: dodawania kilku składników powyżej 10; odejmowania liczb na konkretach, przeliczania odjemnika i różnicy; podejmuje próby wykonywania działań w zapisie symbolicznym, najczęściej liczy opierając się na konkretach);

niski

(dziecko po objaśnieniach i tylko z pomocą nauczyciela dodaje i odejmuje liczby wyłącznie na konkretach w zakresie 10; podejmuje próby wykonywania działań w zapisie symbolicznym; nie potrafi liczyć w pamięci);

bardzo niski

(dziecko po objaśnieniach i mimo pomocy nauczyciela ma poważne problemy z dodawaniem i odejmowaniem liczb na konkretach zakresie 10; nie wykonuje działań w zapisie symbolicznym, nie wykonuje rachunku pamięciowego).

3. Jaki jest – zdaniem Pani /Pana poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w zakresie ustalania równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi? Proszę określić dla każdej kategorii dzieci wpisując w kratkę właściwy poziom (od bardzo wysokiego do bardzo niskiego).

dziewczynki 6-letnie

dziewczynki 7-letnie

chłopcy 6- letni

chłopcy 7-letni

bardzo wysoki

(dziecko bezbłędnie, samodzielnie ustala równoliczność zbiorów niezależnie od wielkości i jakości elementów (stałość ilości nieciągłych), porównuje liczebność zbiorów niezależnie od wielkości elementów; prawidłowo stosuje znaki „<”, „>”, „=”; tworzy zbiory równoliczne; rozumie i stosuje liczebniki porządkowe);

wysoki

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela bezbłędnie ustala równoliczność zbiorów niezależnie od wielkości i jakości elementów (stałość ilości nieciągłych), porównuje liczebność zbiorów niezależnie od wielkości elementów; tworzy zbiory równoliczne; rozumie i stosuje liczebniki porządkowe);

średni

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela popełnia pomyłki podczas ustalania równoliczności liczebności zbiorów oraz porównywania liczebności zbiorów niezależnie od wielkości elementów; w czasie tworzenia zbiorów równolicznych; rozumie liczebniki porządkowe);

niski

(dziecko po objaśnieniach i tylko z pomocą nauczyciela ustala równoliczności liczebności zbiorów oraz porównuje liczebność zbiorów, uzależniając ją od wielkości i położenia elementów; tworzy zbiory równoliczne; rozumie liczebniki porządkowe);

bardzo niski

(dziecko po objaśnieniach i mimo pomocy nauczyciela ma poważne problemy z porównywaniem liczebności zbiorów, uzależnia ją od wielkości i położenia elementów);

porównuje liczebność zbiorów wyłącznie na konkretnych, ma kłopoty z tworzeniem zbiorów równolicznych oraz rozumieniem liczebników porządkowych,

4. Jaki jest – zdaniem Pani /Pana poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w zakresie rozróżniania prawej i lewej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów? Proszę określić dla każdej kategorii dzieci wpisując w kratkę właściwy poziom (od bardzo wysokiego do bardzo niskiego).

dziewczynki 6-letnie

dziewczynki 7-letnie

chłopcy 6- letni

chłopcy 7-letni

bardzo wysoki

(dziecko bezbłędnie, samodzielnie określa kierunki w sytuacji rzeczywistej względem siebie oraz na kartce papieru);

wysoki

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela bezbłędnie określa kierunki w sytuacji rzeczywistej względem siebie oraz na kartce papieru);

średni

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela popełnia pomyłki podczas określania kierunków w sytuacji rzeczywistej względem siebie oraz na kartce papieru);

niski

(dziecko po objaśnieniach i tylko z pomocą nauczyciela określa kierunki w sytuacji rzeczywistej względem siebie oraz na kartce papieru);

bardzo niski

(dziecko po objaśnieniach i mimo pomocy nauczyciela ma poważne problemy z określaniem kierunków w sytuacji rzeczywistej względem siebie; nie określa kierunków na kartce papieru).

5. Jaki jest – zdaniem Pani /Pana poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w zakresie dokonywania pomiaru długości i znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą? Proszę określić dla każdej kategorii dzieci wpisując w kratkę właściwy poziom (od bardzo wysokiego do bardzo niskiego).

dziewczynki 6-letnie	
dziewczynki 7-letnie	
chłopcy 6-letni	
chłopcy 7-letni	

bardzo wysoki

(dziecko bezbłędnie, samodzielnie wyróżnia element najdłuższy i najkrótszy, porządkuje elementy według podanej cechy jakościowej; mierzy długość krokami, stopami i dłonią oraz za pomocą linijki);

wysoki

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela bezbłędnie wyróżnia element najdłuższy i najkrótszy, porządkuje elementy według podanej cechy jakościowej; mierzy długość krokami, stopami i dłonią oraz za pomocą linijki);

średni

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela popełnia pomyłki podczas wyróżniania elementu najdłuższego i najkrótszego, porządkowania elementów według podanej cechy jakościowej; mierzenia długość krokami, stopami i dłonią, szczególnie przy pomocy linijki);

niski

(dziecko po objaśnieniach i tylko z pomocą nauczyciela wyróżnia element najdłuższy i najkrótszy, porządkuje elementy według podanej cechy jakościowej; mierzy długość krokami, stopami i dłonią; nie posługuje się linijką);

bardzo niski

(dziecko po objaśnieniach i mimo pomocy nauczyciela ma poważne problemy z: wyróżnianiem elementu najdłuższego i najkrótszego, porządkowaniem elementów według podanej cechy jakościowej; oraz mierzeniem długości krokami, stopami i dłonią, nie posługuje się linijką).

6. Jaki jest – zdaniem Pani /Pana poziom kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną w zakresie orientacji w czasie - znajomości stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku? Proszę określić dla każdej kategorii dzieci wpisując w kratkę właściwy poziom (od bardzo wysokiego do bardzo niskiego)

dziewczynki 6-letnie

dziewczynki 7-letnie

chłopcy 6- letni

chłopcy 7-letni

bardzo wysoki

(dziecko bezbłędnie, samodzielnie rozróżnia pory dnia i wymienia je w kolejności, wymienia nazwy dni tygodnia we właściwej kolejności; stosuje pojęcia „dziś”, „jutro” i „wczoraj”; rozpoznaje pory roku i podaje je w kolejności; wymienia nazwy miesięcy; układa historyjkę obrazkową z zachowaniem chronologii wydarzeń);

wysoki

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela bezbłędnie rozróżnia pory dnia i wymienia je w kolejności, wymienia nazwy dni tygodnia we właściwej kolejności; stosuje pojęcia „dziś”, „jutro” i „wczoraj”; rozpoznaje pory roku i podaje je w kolejności, wymienia nazwy miesięcy; układa historyjkę obrazkową z zachowaniem chronologii wydarzeń);

średni

(dziecko po objaśnieniach nauczyciela popelnia pomyłki podczas: rozróżniania pór dnia i ustalania ich kolejność, wymieniania nazw dni tygodnia we właściwej kolejności oraz stosowania pojęć „dziś”, „jutro” i „wczoraj”; rozpoznawania i ustalania kolejności pór roku; nazywania miesięcy; układania historyjki obrazkowej z zachowaniem chronologii wydarzeń);

niski

(dziecko po objaśnieniach i tylko z pomocą nauczyciela rozróżnia pory dnia i ustala ich kolejność; rozpoznaje i ustala kolejność pór roku; wymienia nazw dni tygodnia, układa historyjkę obrazkową z zachowaniem chronologii wydarzeń; nie stosuje pojęć „dziś”, „jutro” i „wczoraj”; myli nazwy miesięcy);

bardzo niski

(dziecko po objaśnieniach i mimo pomocy nauczyciela ma poważne problemy
z: rozróżnianiem pór dnia i ustalaniem ich kolejności; z rozpoznawaniem i ustalaniem
kolejności pór roku; nie potrafi ułożyć historyjki obrazkowej z zachowaniem chronologii
wydarzeń; myli nazwy miesięcy; nie rozumie pojęć „dziś”, „jutro” i „wczoraj”).

**7. W jakim stopniu – zdaniem Pani/Pana czas trwania edukacji przedszkolnej
różnicuje poziom kompetencji matematycznych dziecka?**

- a. w bardzo wysokim (jest czynnikiem decydującym)
- b. w wysokim
- c. w średnim
- d. w niskim
- e. długość edukacji przedszkolnej nie ma znaczenia

METRYCZKA

staż pracy nauczyciela

0-5 lat ☐

6-10 lat ☐

11-20 lat ☐

powyżej 20 lat ☐

kwalifikacje dodatkowe nauczycieli przygotowujące do prowadzenia zajęć matematycznych

NIE ☐

TAK ☐

jeśli tak, to jakie

(kursy, szkolenia, studia podyplomowe)

Dziękuję za wypełnienie ankiety

**KWESTIONARIUSZ ANKIETY DLA NAUCZYCIELA
DOTYCZĄCY PRZEBIEGU PROCESU ROZWIJANIA
KOMPETENCJI MATEMATYCZNYCH
DZIECI KOŃCZĄCYCH EDUKACJĘ PRZEDSZKOLNĄ
W SYSTEMIE TRADYCYJNYM**

1. Jak często realizuje Pani /Pan treści matematyczne w pracy z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną?

- ☐ codziennie,
☐ 3- 4 razy w tygodniu,
☐ 1-2 razy w tygodniu,
☐ rzadziej niż jeden raz w tygodniu.

2. Jak często w pracy z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną realizuje Pani /Pan treści matematyczne dotyczące rozwijania umiejętności liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego?

- ☐ codziennie,
☐ 3- 4 razy w tygodniu,
☐ 1-2 razy w tygodniu,
☐ rzadziej niż jeden raz w tygodniu.

3. Jak często w pracy z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną realizuje Pani /Pan treści matematyczne dotyczące rozwijania umiejętności wyznaczania przez dzieci wyniku dodawania i odejmowania, przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych?

- ☐ codziennie,
☐ 3- 4 razy w tygodniu,
☐ 1-2 razy w tygodniu,
☐ rzadziej niż jeden raz w tygodniu.

4. Jak często w pracy z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną realizuje Pani /Pan treści matematyczne dotyczące rozwijania umiejętności ustalania przez dzieci równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi?

- ☐ codziennie,
☐ 3- 4 razy w tygodniu,
☐ 1-2 razy w tygodniu,
☐ rzadziej niż jeden raz w tygodniu

5. Jak często w pracy z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną realizuje Pani /Pan treści matematyczne dotyczące rozwijania umiejętności rozróżniania przez dzieci lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów?

- ☐ codziennie,
☐ 3- 4 razy w tygodniu,
☐ 1-2 razy w tygodniu,
☐ rzadziej niż jeden raz w tygodniu

6. Jak często w pracy z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną realizuje Pani /Pan treści matematyczne dotyczące rozwijania orientacji dziecka w zakresie pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą?

- ☐ codziennie,
☐ 3- 4 razy w tygodniu,
☐ 1-2 razy w tygodniu,
☐ rzadziej niż jeden raz w tygodniu

7. Jak często w pracy z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną realizuje Pani /Pan treści matematyczne dotyczące rozwijania znajomości przez dzieci stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku?

- ☐ codziennie,
☐ 3- 4 razy w tygodniu,
☐ 1-2 razy w tygodniu,
☐ rzadziej niż jeden raz w tygodniu

8. Czy w realizacji treści matematycznych stosuje Pani/ Pan metody słowne?

TAK ☐

NIE ☐

Jeśli tak, to które z nich wykorzystuje Pani/ Pan najczęściej w pracy edukacyjnej z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną?

- ☐ rozmowy, zagadki,
☐ objaśnienia i instrukcje;
☐ sposoby społecznego porozumiewania się

Proszę ponumerować (1 - najrzadziej; 2 – często 3 - najczęściej).

9. Czy w realizacji treści matematycznych stosuje Pani/ Pan metody percepcyjne oglądowe)?

TAK ☐

NIE ☐

Jeśli tak, to które z nich wykorzystuje Pani/ Pan najczęściej w pracy edukacyjnej z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną?

☐ obserwacja i pokaz,

☐ przykład.

Proszę ponumerować (1- najrzadziej; 2 najczęściej)

10. Czy w realizacji treści matematycznych stosuje Pani/ Pan metody czynne?

TAK ☐

NIE ☐

Jeśli tak, to które z nich wykorzystuje Pani/ Pan najczęściej w pracy edukacyjnej z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną?

☐ metoda zadań stawianych dziecku do wykonania,

☐ metoda ćwiczeń,

☐ metoda samodzielnych doświadczeń,

☐ metoda kierowania własną działalnością dziecka,

☐ metoda Wspomagania Rozwoju Umysłowego Dzieci wg Edyty Gruszczyk-

Kolczyńskiej i Ewy Zielińskiej.

Proszę ponumerować (1- najrzadziej; 2 – rzadko; 3- często; 4 – dość często; 5- najczęściej)

11. Czy w realizacji treści matematycznych stosuje Pani/ Pan metody aktywizujące

TAK ☐

NIE ☐

Jeśli tak, to proszę wymienić, jakie metody aktywizujące wykorzystuje Pani/ Pan w pracy edukacyjnej z dziećmi.

.....
.....
.....

12. Jakie formy pracy stosuje Pani/ Pan najczęściej podczas realizacji treści matematycznych?

- ☐ praca indywidualna (dziecko pracuje samodzielnie),
- ☐ praca zbiorowa (wszystkie dzieci pracują wspólnie),
- ☐ praca zespołowa (dzieci pracują w stałych zespołach),
- ☐ praca grupowa (dzieci pracują w jednorazowych grupach).

Proszę ponumerować (1- najrzadziej; 2 – rzadko; 3- czasami; 4 – najczęściej).

13. Czy w prowadzonej przez Panią/ Pana grupie są dzieci uzdolnione matematycznie?

TAK ☐

NIE ☐

Jeśli tak, to jakie działania podejmuje Pani/ Pan w pracy edukacyjnej z dzieckiem uzdolnionym matematycznie?

Proszę wskazać 4 najczęściej stosowane działania edukacyjne i ponumerować (1- często; 2 – dość często; 3- bardzo często; 4 – najczęściej).

- ☐ stosowanie dodatkowych zadań o podwyższonym stopniu trudności,
- ☐ wspólne rozwiązywanie rebusów, łamigłówek matematycznych wraz ze stymulowaniem dziecka do wyjaśniania, uzasadniania swoich rozwiązań,
- ☐ wprowadzanie i wyjaśniania podstawowych pojęć matematycznych w zabawach,
- ☐ stosowanie wyliczanek,
- ☐ tworzenie gier z ustalaniem reguł,
- ☐ stosowanie zabaw logicznych,
- ☐ opracowywanie specjalnych planów pracy z dzieckiem zdolnym,
- ☐ organizowanie sytuacji problemowych wymagających rozwiązania różnorodnych problemów matematycznych,
- ☐ inne (jakie?).....

14. Czy w prowadzonej przez Panią/ Pana grupie są dzieci, które doświadczają trudności w edukacji matematycznej?

TAK ☐

NIE ☐

15. Zdaniem Pani/ Pana trudności w nauce matematyki dzieci kończących edukację przedszkolną występują:

sporadycznie ☐

dość często ☐

bardzo często ☐

16. Jakie trudności w uczeniu się matematyki obserwuje Pani/ Pan wśród dzieci kończących edukację przedszkolną?

.....

.....

.....

.....

.....

17. Czy podejmuje Pani /Pan działania edukacyjne w celu pomocy dzieciom z trudnościami w uczeniu się matematyki?

TAK ☐

NIE ☐

Jeśli tak, to jakie działania edukacyjne stosuje Pani/ Pan w celu pomocy dzieciom z trudnościami w uczeniu się matematyki?

Proszę wskazać 4 najczęściej stosowane działania edukacyjne i ponumerować

(1- często; 2 – dość często; 3- bardzo często; 4 – najczęściej).

- ☐ zróżnicowanie poziomu trudności zadań,
- ☐ dodatkowe objaśnienia do pracy,
- ☐ dodatkowe zorganizowane zajęcia wyrównawcze,
- ☐ wskazówki do pracy w domu dla rodziców,
- ☐ zapewnienie dzieciom dłuższego czasu pracy,
- ☐ dodatkowe ćwiczenia wyrównujące,
- ☐ rozwijanie myślenia operacyjnego dzieci,
- ☐ stosowanie ćwiczeń doskonalących spostrzeganie wzrokowe,
- ☐ stosowanie ćwiczeń ukierunkowanych na doskonalenie koordynacji wzrokowo-ruchowej,

- ☐ stosowanie ćwiczeń rozwijających sprawność manualną,
- ☐ intensyfikacja sytuacji praktycznych związanych z liczeniem, rozwijających intuicje matematyczne,
- ☐ stosowanie konkretów w liczeniu zgodnie z potrzebami dziecka,
- ☐ uatrakcyjnianie zajęć ciekawymi pomocami,
- ☐ inne (jakie?)

18. Jakie, zdaniem Pani/ Pana działania należy podejmować w celu podnoszenia poziomu kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną?

.....

.....

.....

19. Nauczyciele w przedszkolach podejmują zróżnicowane działania, aby podnosić poziom kompetencji matematycznych dzieci. Mimo to wielu przedszkolaków doświadcza pierwszych niepowodzeń w nauce matematyki.

Proszę określić częstotliwość obserwowania przez Panią/ Pana każdego z podanych rodzajów trudności w uczeniu się matematyki numerując według skali:

1- w ogóle; 2- rzadko; 3- często; 4- bardzo często

- ☐ podwójne liczenie tego samego przedmiotu,
- ☐ „przeskakiwanie”, pomijanie przedmiotów w trakcie liczenia,
- ☐ błędy w rozpoznawaniu brakującej liczby w ciągu liczbowym jako miary umiejętności przeliczania i sekwencyjnego liczenia,
- ☐ mylenie liczebników głównych,
- ☐ błędne rozpoznawanie cyfr i liczb oraz ich nazywanie,
- ☐ trudności w liczeniu wspak jako miary pamięci operacyjnej,
- ☐ mylenie dodawania i odejmowania,
- ☐ brak rozumienia dodawania jako powiększania i odejmowania jako pomniejszania,
- ☐ brak umiejętności wykonywania działań w pamięci,
- ☐ mylenie liczebników porządkowych,

- ☐ błędy w ustalaniu zbiorów równolicznych,
- ☐ błędy podczas tworzenia zbiorów równolicznych,
- ☐ trudności w porównywaniu liczebności zbiorów,
- ☐ błędy w rozróżnianiu prawej i lewej strony,
- ☐ trudności w ustalaniu położenia przedmiotów w sytuacjach rzeczywistych,
- ☐ trudności w ustalaniu położenia przedmiotów na kartce papieru,
- ☐ trudności w porządkowaniu elementów zgodnie z gradacją danej cechy wielkościowej,
- ☐ trudności w mierzeniu prostymi sposobami (krokami, dłonią, stopą),
- ☐ trudności w posługiwaniu się linijką,
- ☐ trudności w porządkowaniu chronologicznym pór dnia, dni tygodnia, miesięcy oraz pór roku,
- ☐ błędne rozumienie terminów opisujących podstawowe pory dnia,
- ☐ trudności w rozpoznawaniu pór roku,
- ☐ trudności w ustalaniu kolejności wydarzeń (np. w historyjce obrazkowej),
- ☐ inne (jakie?).....

20. Czy stosuje Pani /Pan działania edukacyjne podnoszące poziom kompetencji matematycznych dzieci?

TAK ☐

NIE ☐

Jeśli tak, to jakie stosuje Pani /Pan działania edukacyjne podnoszące poziom kompetencji matematycznych dzieci?

Proszę wskazać 4 stosowane przez Panią/ Pana działań edukacyjnych i ponumerować je według skali od 1- często do 4 – najczęściej.

- ☐ nieograniczanie etapu liczenia na palcach,
- ☐ wykorzystywanie umiejętności matematycznych w sytuacjach dnia codziennego (praktyce życiowej),
- ☐ stosowanie gier dydaktycznych,

- ☐ stosowanie indywidualnych zadań dodatkowych (zarówno dla dzieci z trudnościami w
- ☐ nauce matematyki, jak i uzdolnionych matematycznie),
- ☐ prowadzenie zajęć korekcyjno- wyrównawczych,
- ☐ stosowanie metod nauczania zgodnie z preferencjami sensorycznymi dzieci (wzrokowcy, słuchowcy, kinestetycy),
- ☐ łączenie aktywności ruchowej z doświadczeniami matematycznymi,
- ☐ łączenie aktywności plastycznej z doświadczeniami matematycznymi,
- ☐ łączenie aktywności muzycznej z doświadczeniami matematycznymi,
- ☐ stosowanie pozytywnej motywacji, zachęty,
- ☐ wczesne i wnikliwe diagnozowanie trudności w uczeniu się matematyki,
- ☐ inne (jakie?).....

21. Czy dostrzega Pani/ Pan potrzebę podnoszenia własnych kompetencji dotyczących realizowania z dziećmi treści matematycznych?

- zdecydowanie tak ☐
- raczej tak ☐
- raczej nie ☐
- zdecydowanie nie ☐

22. Czy podejmuje Pani/ Pan formy doskonalenia zawodowego dotyczące realizowania z dziećmi treści matematycznych?

- TAK ☐
- NIE ☐

Jeśli tak, to jakie podejmuje Pani/ Pan formy doskonalenia zawodowego dotyczące realizowania z dziećmi treści matematycznych?

Proszę zaznaczyć podejmowane przez Panią/ Pana formy doskonalenia zawodowego.

- ☐ studia podyplomowe kwalifikacyjne,
- ☐ studia podyplomowe doskonalące,
- ☐ kursy kwalifikacyjne,
- ☐ kursy doskonalące,

- ☐ szkolenia,
- ☐ warsztaty,
- ☐ konferencje metodyczne.
- ☐ konferencje samokształceniowe rady pedagogicznej,
- ☐ referaty,
- ☐ odczyty,
- ☐ lekcje otwarte,
- ☐ inicjatywy organizatorskie,
- ☐ czytanie literatury,
- ☐ korzystanie z witryn internetowych,
- ☐ edukacja na odległość,
- ☐ autorskie programy dydaktyczne,
- ☐ inne (jakie?).....

METRYCZKA

- staż pracy nauczyciela

0-5 lat ☐

6-10 lat ☐

11-20 lat ☐

powyżej 20 lat

- kwalifikacje dodatkowe nauczycieli przygotowujące do prowadzenia zajęć matematycznych

TAK ☐

NIE ☐

jeśli tak, to proszę wskazać jakie

(kursy, szkolenia, studia podyplomowe).

Dziękuję za wypełnienie ankiety

załącznik nr 7

**KWESTIONARIUSZ ANKIETY DLA NAUCZYCIELA
DOTYCZĄCY PRZEBIEGU PROCESU ROZWIJANIA
KOMPETENCJI MATEMATYCZNYCH
DZIECI KOŃCZĄCYCH EDUKACJĘ PRZEDSZKOLNĄ
W SYSTEMIE MONTESSORI**

1. Jak często realizuje Pani /Pan treści matematyczne w pracy z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną?

- ☐ codziennie,
☐ 3- 4 razy w tygodniu,
☐ 1-2 razy w tygodniu,
☐ rzadziej niż jeden raz w tygodniu.

2. Jak często w pracy edukacyjnej z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną realizuje Pani /Pan treści matematyczne dotyczące rozwijania umiejętności liczenia obiektów i rozróżniania błędnego liczenia od poprawnego?

- ☐ codziennie,
☐ 3- 4 razy w tygodniu,
☐ 1-2 razy w tygodniu,
☐ rzadziej niż jeden raz w tygodniu.

3. Jak często w pracy z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną realizuje Pani /Pan treści matematyczne dotyczące rozwijania umiejętności wyznaczania przez dzieci wyniku dodawania i odejmowania, przy pomocy liczenia na palcach lub na innych zbiorach zastępczych?

- ☐ codziennie,
☐ 3- 4 razy w tygodniu,
☐ 1-2 razy w tygodniu,
☐ rzadziej niż jeden raz w tygodniu.

4. Jak często w pracy z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną realizuje Pani /Pan treści matematyczne dotyczące rozwijania umiejętności ustalania przez dzieci równoliczności dwóch zbiorów i posługiwania się liczebnikami porządkowymi?

- ☐ codziennie,
☐ 3- 4 razy w tygodniu,
☐ 1-2 razy w tygodniu,
☐ rzadziej niż jeden raz w tygodniu

5. Jak często w pracy z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną realizuje Pani /Pan treści matematyczne dotyczące rozwijania umiejętności rozróżniania przez dzieci lewej i prawej strony, określania kierunków i ustalania położenia obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów?

- ☐ codziennie,
☐ 3- 4 razy w tygodniu,
☐ 1-2 razy w tygodniu,
☐ rzadziej niż jeden raz w tygodniu

6. Jak często w pracy edukacyjnej z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną realizuje Pani /Pan treści matematyczne dotyczące rozwijania orientacji dziecka w zakresie pomiaru długości oraz znajomości prostych sposobów mierzenia: krokami, stopa za stopą?

- ☐ codziennie,
☐ 3- 4 razy w tygodniu,
☐ 1-2 razy w tygodniu,
☐ rzadziej niż jeden raz w tygodniu

7. Jak często w pracy z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną realizuje Pani /Pan treści matematyczne dotyczące rozwijania znajomości przez dzieci stałego następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku?

- ☐ codziennie,
☐ 3- 4 razy w tygodniu,
☐ 1-2 razy w tygodniu,
☐ rzadziej niż jeden raz w tygodniu

8. Czy w realizacji treści matematycznych stosuje Pani/ Pan metody asymilacji wiedzy?

TAK ☐

NIE ☐

Jeśli tak, to które z nich wykorzystuje Pani/ Pan najczęściej w pracy edukacyjnej z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną?

- ☐ rozmowa,
☐ pokaz (lekcja podstawowa),
☐ metoda słowna (trzystopniowa lekcja nazw).

Proszę ponumerować (1- najrzadziej; 2 – czasami; 3 – najczęściej).

9. Czy w realizacji treści matematycznych stosuje Pani/ Pan metody samodzielnego dochodzenia do wiedzy?

TAK ☐

NIE ☐

Jeśli tak, to które z nich wykorzystuje Pani/ Pan najczęściej w pracy edukacyjnej z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną?

☐ gry dydaktyczne,

☐ indywidualna praca z materiałami rozwojowymi,

☐ własne działanie i powtarzanie.

Proszę ponumerować (1- rzadko; 2 – czasami; 3 – najczęściej).

10. Czy w realizacji treści matematycznych stosuje Pani/ Pan metody praktyczne?

TAK ☐

NIE ☐

Jeśli tak, to które z nich wykorzystuje Pani/ Pan najczęściej w pracy edukacyjnej z dziećmi kończącymi edukację przedszkolną?

☐ ćwiczenia z materiałem rozwojowym,

☐ ćwiczenia z innymi pomocami dydaktycznymi.

Proszę ponumerować (1- najrzadziej; 2- najczęściej).

11. Jakie formy pracy stosuje Pani/ Pan najczęściej podczas realizacji treści matematycznych?

☐ praca indywidualna (lekcja podstawowa i trzystopniowa lekcja nazw),

☐ praca grupowa (lekcje ciszy, lekcje rozwojowe -„wiązane lekcje”, gry z wykorzystaniem materiału rozwojowego oraz trzystopniowe lekcje ogólne),

☐ praca zespołowa (praca w laboratorium, praca własna z wybranym tematem)

Proszę ponumerować (1- najrzadziej; 2 – czasami; 3 – najczęściej).

12. Czy w prowadzonej przez Panią/ Pana grupie są dzieci uzdolnione matematycznie?

TAK ☐

NIE ☐

Jeśli tak, to jakie działania podejmuje Pani/ Pan w pracy edukacyjnej z dzieckiem uzdolnionym matematycznie?

Proszę wskazać 4 najczęściej stosowane działania edukacyjne i ponumerować (1- często; 2 – dość często; 3- bardzo często; 4 – najczęściej).

- ☐ stosowanie dodatkowych zadań o podwyższonym stopniu trudności,
- ☐ wspólne rozwiązywanie rebusów, łamigłówek matematycznych wraz ze stymulowaniem dziecka do wyjaśniania, uzasadniania swoich rozwiązań,
- ☐ wprowadzanie i wyjaśniania podstawowych pojęć matematycznych w zabawach,
- ☐ stosowanie wyliczanek,
- ☐ tworzenie gier z ustalaniem reguł,
- ☐ stosowanie zabaw logicznych,
- ☐ opracowywanie specjalnych planów pracy z dzieckiem zdolnym,
- ☐ organizowanie sytuacji problemowych wymagających rozwiązania różnorodnych problemów matematycznych,
- ☐ inne (jakie?)

13. Czy w prowadzonej przez Panią/ Pana grupie są dzieci, które doświadczają trudności w edukacji matematycznej?

TAK ☐

NIE ☐

14. Zdaniem Pani/ Pana trudności w nauce matematyki dzieci kończących edukację przedszkolną występują:

sporadycznie ☐

dość często ☐

bardzo często ☐

15. Jakie trudności w uczeniu się matematyki obserwuje Pani/ Pan wśród dzieci kończących edukację przedszkolną?

.....
.....
.....

16. Czy podejmuje Pani /Pan działania edukacyjne w celu pomocy dzieciom z trudnościami w uczeniu się matematyki?

TAK ☐

NIE ☐

Jeśli tak, to jakie działania edukacyjne stosuje Pani/ Pan w celu pomocy dzieciom z trudnościami w uczeniu się matematyki?

Proszę wskazać 4 najczęściej stosowane działania edukacyjne i ponumerować

(1- często; 2 – dość często; 3- bardzo często; 4 – najczęściej).

- ☐ zróżnicowanie poziomu trudności zadań,
- ☐ dodatkowe objaśnienia do pracy,
- ☐ dodatkowe zorganizowane zajęcia wyrównawcze,
- ☐ wskazówki do pracy w domu dla rodziców,
- ☐ zapewnienie dzieciom dłuższego czasu pracy,
- ☐ dodatkowe ćwiczenia wyrównujące,
- ☐ rozwijanie myślenia operacyjnego dzieci,
- ☐ stosowanie ćwiczeń doskonalących spostrzeganie wzrokowe,
- ☐ stosowanie ćwiczeń ukierunkowanych na doskonalenie koordynacji wzrokowo-ruchowej,
- ☐ stosowanie ćwiczeń rozwijających sprawność manualną,
- ☐ intensyfikacja sytuacji praktycznych związanych z liczeniem, rozwijających intuicje matematyczne,
- ☐ stosowanie konkretów w liczeniu zgodnie z potrzebami dziecka,
- ☐ uatrakcyjnianie zajęć ciekawymi pomocami,
- ☐ inne (jakie?)

17. Jakie, zdaniem Pani/ Pana działania należy podejmować w celu podnoszenia poziomu kompetencji matematycznych dzieci kończących edukację przedszkolną?

.....
.....
.....

18. Nauczyciele w przedszkolach podejmują zróżnicowane działania, aby podnosić poziom kompetencji matematycznych dzieci. Mimo to wielu przedszkolaków doświadcza pierwszych niepowodzeń w nauce matematyki.

Proszę określić częstotliwość obserwowania przez Panią/ Pana każdego z podanych rodzajów trudności w uczeniu się matematyki numerując według skali:

1 -w ogóle; 2- rzadko; 3- często; 4- bardzo często

- ☐ podwójne liczenie tego samego przedmiotu,
- ☐ „przeskakiwanie”, pomijanie przedmiotów w trakcie liczenia,
- ☐ błędy w rozpoznawaniu brakującej liczby w ciągu liczbowym jako miary umiejętności przeliczania i sekwencyjnego liczenia,
- ☐ mylenie liczebników głównych,
- ☐ błędne rozpoznawanie cyfr i liczb oraz ich nazywanie,
- ☐ trudności w liczeniu wstak jako miary pamięci operacyjnej,
- ☐ mylenie dodawania i odejmowania,
- ☐ brak rozumienia dodawania jako powiększania i odejmowania jako pomniejszania,
- ☐ brak umiejętności wykonywania działań w pamięci,
- ☐ mylenie liczebników porządkowych,
- ☐ błędy w ustalaniu zbiorów równolicznych,
- ☐ błędy podczas tworzenia zbiorów równolicznych,
- ☐ trudności w porównywaniu liczebności zbiorów,
- ☐ błędy w rozróżnianiu prawej i lewej strony,
- ☐ trudności w ustalaniu położenia przedmiotów w sytuacjach rzeczywistych,

- ☐ trudności w ustalaniu położenia przedmiotów na kartce papieru,
- ☐ trudności w porządkowaniu elementów zgodnie z gradacją danej cechy wielkościowej,
- ☐ trudności w mierzeniu prostymi sposobami (krokami, dłonią, stopą),
- ☐ trudności w posługiwaniu się linijką,
- ☐ trudności w porządkowaniu chronologicznym pór dnia, dni tygodnia, miesięcy oraz pór roku,
- ☐ błędne rozumienie terminów opisujących podstawowe pory dnia,
- ☐ trudności w rozpoznawaniu pór roku,
- ☐ trudności w ustalaniu kolejności wydarzeń (np. w historyjce obrazkowej),
- ☐ inne (jakie?).....

19. Czy stosuje Pani /Pan działania edukacyjne podnoszące poziom kompetencji matematycznych dzieci?

TAK ☐

NIE ☐

Jeśli tak, to jakie stosuje Pani /Pan działania edukacyjne podnoszące poziom kompetencji matematycznych dzieci?

Proszę wskazać 4 stosowane przez Panią/ Pana działań edukacyjnych i ponumerować je według skali od 1- często do 4 – najczęściej.

- ☐ nieograniczanie etapu liczenia na palcach,
- ☐ wykorzystywanie umiejętności matematycznych w sytuacjach dnia codziennego (praktyce życiowej),
- ☐ stosowanie gier dydaktycznych,
- ☐ stosowanie indywidualnych zadań dodatkowych (zarówno dla dzieci z trudnościami w nauce matematyki, jak i uzdolnionych matematycznie),
- ☐ prowadzenie zajęć korekcyjno- wyrównawczych,
- ☐ stosowanie metod nauczania zgodnie z preferencjami sensorycznymi dzieci (wzrokowcy, słuchowcy, kinestetycy),

- ☐ łączenie aktywności ruchowej z doświadczeniami matematycznymi,
- ☐ łączenie aktywności plastycznej z doświadczeniami matematycznymi,
- ☐ łączenie aktywności muzycznej z doświadczeniami matematycznymi,
- ☐ stosowanie pozytywnej motywacji, zachęty,
- ☐ wczesne i wnikliwe diagnozowanie trudności w uczeniu się matematyki,
- ☐ inne (jakie?).....

20. Czy dostrzega Pani/ Pan potrzebę podnoszenia własnych kompetencji dotyczących realizowania z dziećmi treści matematycznych?

- zdecydowanie tak ☐
- raczej tak ☐
- raczej nie ☐
- zdecydowanie nie ☐

21. Czy podejmuje Pani/ Pan formy doskonalenia zawodowego dotyczące realizowania z dziećmi treści matematycznych?

- TAK ☐
- NIE ☐

Jeśli tak, to jakie podejmuje Pani/ Pan formy doskonalenia zawodowego dotyczące realizowania z dziećmi treści matematycznych?

Proszę zaznaczyć podejmowane przez Panią/ Pana formy doskonalenia zawodowego.

- ☐ studia podyplomowe kwalifikacyjne,
- ☐ studia podyplomowe doskonalące,
- ☐ kursy kwalifikacyjne,
- ☐ kursy doskonalące,
- ☐ szkolenia,
- ☐ warsztaty,
- ☐ konferencje metodyczne.
- ☐ konferencje samokształceniowe rady pedagogicznej,
- ☐ referaty,
- ☐ odczyty,
- ☐ lekcje otwarte,

- ☐ inicjatywy organizatorskie,
- ☐ czytanie literatury,
- ☐ korzystanie z witryn internetowych,
- ☐ edukacja na odległość,
- ☐ autorskie programy dydaktyczne,
- ☐ inne (jakie?).....

METRYCZKA

- staż pracy nauczyciela

0-5 lat ☐

6-10 lat ☐

11-20 lat ☐

powyżej 20 lat ☐

- kwalifikacje dodatkowe nauczycieli przygotowujące do prowadzenia zajęć matematycznych

TAK ☐

NIE ☐

jeśli tak, to proszę wskazać jakie

(kursy, szkolenia, studia podyplomowe).