RUCH PRAWNICZY, EKONOMICZNY I SOCJOLOGICZNY
ROK LXXI – zeszyt 4 – 2009

PIOTR PIETRASZEWSKI

ANALIZA MOŻLIWOŚCI ODDZIAŁYWANIA PAŃSTWA NA WZROST GOSPODARCZY W KONTEKŚCIE MAKSYMALIZACJI DOBROBYTU

I. WPROWADZENIE

Przedmiotem artykułu jest analiza możliwości oddziaływania państwa na wzrost gospodarczy w poszerzonych ramach neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego, przy różnych założeniach dotyczących reakcji podmiotów prywatnych na działania państwa w zakresie polityki fiskalnej. Za kanwę rozważań przyjmujemy rozszerzony o akumulację kapitału ludzkiego neoklasyczny model wzrostu gospodarczego, z funkcją produkcji spełniającą standardowe neoklasyczne założenia[1]. W strukturę modelu włączamy budżet państwa[2].

Długookresowy charakter modelu (przejawiający się w założeniu o pełnym wykorzystaniu mocy produkcyjnych) implikuje określony sposób podejścia do analizy polityki gospodarczej państwa, którą rozważamy jedynie pod kątem oddziaływania na stronę podażową, pomijając jej funkcje stabilizacyjne. Oddziaływanie to odbywa się poprzez zmiany stóp inwestycji budżetowych w kapitał rzeczowy i ludzki oraz stopy redystrybucji dochodu przez budżet, wpływając bezpośrednio na strukturę popytu globalnego (ale nie jego wielkość), a przez to na rozmiary społecznej akumulacji kapitału.

Gospodarkę opisaną rozpatrywanym modelem cechuje brak zależności pomiędzy społecznymi stopami inwestycji a długookresową stopą wzrostu gospodarczego na tzw. ścieżce wzrostu równomiernego, która zdeterminowana jest wyłącznie przez tempo postępu techniczno-organizacyjnego. Ogranicza to możliwość stymulowania przez władze gospodarcze tempa wzrostu gospodarczego jedynie do okresów przejściowych, w których gospodarka dokonuje

---

[1] Model ten, analizowany szczegółowo w: P. Pietraszewski, *A Mechanics of Long-term Economic Growth-Generalized Neoclassical Approach*, w: E. Panek (red.), *Mathematics in Economics*, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań, 2008, s. 180-203, stanowi rozwinięcie idei zarysowanej przez N. G. Mankiwa, D. Romera i N. Weila w publikacji z 1992 r., polegającej na rozszerzeniu podstawowej wersji neoklasycznego modelu wzrostu (typu Solowa) o akumulację kapitału ludzkiego. Zob. N. G. Mankiw, D. Romer, N. Weil, *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics” 1992, May, s. 407-437.

[2] Zaadaptowany tutaj prosty sposób włączenia budżetu państwa w podstawową strukturę modelu zasugerowany został przez Solowa w publikacji z 1956 r., zob. R. M. Solow, *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics”, February 1956, s. 89-90. Por. także T. Tokarski, *Polityka fiskalna a wzrost gospodarczy*, w: *Wzrost gospodarczy, restrukturyzacja i bezrobocie w Polsce. Ujęcie teoretyczne i praktyczne*, Katedra Ekonomii Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2000, s. 27-45.

przejścia z jednej ścieżki wzrostu równomiernego na drugą. Jednoznacznie pozytywny wpływ wzrostu stóp inwestycji na długookresową ścieżkę wzrostu produktu *per capita* nie musi przenosić się na długookresową ścieżkę wzrostu konsumpcji *per capita*, decydującej w ostatecznej mierze o dobrobycie społeczeństwa. W tym kontekście stawiamy pytanie o strukturę wydatków budżetowych w podziale na inwestycje i konsumpcję, którą – przy danych stopach inwestycji prywatnych – można uznać za optymalną z punktu widzenia społecznego dobrobytu.

W drugiej części analizy uchylone zostaje założenie o stałych, danych egzogenicznie stopach inwestycji podmiotów prywatnych, oznaczające m.in. brak reakcji tych podmiotów na działania ze strony państwa. Poziomy stóp inwestycji prywatnych stanowią tutaj rezultat zachowań optymalizacyjnych racjonalnych podmiotów ekonomicznych, charakteryzujących się określonymi *explicite* preferencjami co do rozkładu konsumpcji w czasie. Pokazujemy przy tym, jak w zależności od stopnia uwzględniania przez podmioty prywatne poziomu konsumpcji publicznej w decyzjach optymalizacyjnych, relatywizacji podlegają wnioski odnoszące się do możliwości oddziaływania państwa na wzrost gospodarczy.

II. MODEL WYJŚCIOWY

Rozważamy podażowy, jednosektorowy model wzrostu w gospodarce zamkniętej z jawnym udziałem państwa.

1. Produkt Y wytwarzany jest zgodnie z agregatową funkcją produkcji:

$$Y=F(K, H, AL), \tag{1}$$

w której jako nakłady wykorzystywane są zasoby kapitału rzeczowego K, kapitału ludzkiego H i pracy L[3].

Zmienna A odzwierciedla poziom technologii, zaś jej zmiany w czasie są utożsamiane z postępem techniczno-organizacyjnym, neutralnym w sensie Harroda. Zakładamy, że zmienna ta rośnie wykładniczo z egzogenicznie daną stopą m, nazywaną dalej stopą egzogenicznego postępu technicznego.

Zasoby pracy L rosną z założenia również wykładniczo ze stopą n (utożsamianą ze stopą przyrostu naturalnego). W konsekwencji zasoby tzw. efektywnej pracy $\bar{L}=AL$ rosną ze stopą $n+m$.

O funkcji produkcji (1) zakładamy, że:
- jest ciągła, (przynajmniej) dwukrotnie różniczkowalna i wklęsła,
- zerowym nakładom czynników produkcji przyporządkowuje zerowy produkt,
- charakteryzuje się dodatnimi i malejącymi produktywnościami krańcowymi wszystkich trzech czynników wytwórczych: $F_K, F_H, F_L>0$ i $F_{KK}, F_{HH}, F_{LL}<0$,

[3] Ponieważ oddzielnym czynnikiem produkcji jest kapitał ludzki, zmienną oznaczoną symbolem L interpretujemy jako nakład pracy surowej, to znaczy nie uwzględniającej rezultatów inwestycji w kapitał ludzki.

- krańcowa produktywność każdego czynnika rośnie przy wzroście zatrudnienia innego czynnika: $F_{KL}, F_{HL}, F_{KH} > 0$,
- spełnia tzw. warunki Inady: $\lim_{X \to 0} F_X = \infty$, $\lim_{X \to \infty} F_X = 0$, gdzie: $X \in \{K, H, L\}$,
- wykazuje stałe korzyści skali produkcji: $F(cK, cH, cAL) = cF(K, H, AL)$.

Z ostatniego założenia wynika, że spełnione jest twierdzenie Eulera:

$$F_K K + F_H H + F_L L = Y, \tag{2}$$

czyli suma wynagrodzeń czynników produkcji, wypłacanych zgodnie z ich krańcowymi produktywnościami, wyczerpuje bez reszty wielkość produktu.

Korzystając z założenia o stałych korzyściach skali, funkcję produkcji (1) możemy przedstawić w kategoriach na jednostkę efektywnej pracy (*njep*)[4]:

$$\bar{y} = f(\bar{k}, \bar{h}), \tag{3}$$

gdzie:

$$\bar{k} = \frac{K}{AL}, \quad \bar{h} = \frac{H}{AL}, \quad \bar{y} = \frac{Y}{AL}. \tag{4}$$

Przy przyjętych założeniach o funkcji (1), funkcja (3) jest silnie wklęsła, charakteryzuje się dodatnimi i malejącymi krańcowymi produktywnościami obu czynników: $f_{\bar{k}} > 0, f_{\bar{h}} > 0, f_{\bar{k}\bar{k}} < 0, f_{\bar{h}\bar{h}} < 0$, oraz spełnia warunki Inady dla $\bar{k}$ i $\bar{h}$[5].

2. W gospodarce wyodrębniamy dwa sektory: sektor prywatny i sektor budżetowy. Dochodem sektora budżetowego są podatki płacone przez sektor prywatny, równe τY, gdzie τ oznacza stopą redystrybucji dochodu przez budżet $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$. Dochód do dyspozycji sektora prywatnego wynosi $(1-\tau)Y$. Oba sektory przeznaczają swoje dochody na inwestycje w kapitał rzeczowy i kapitał ludzki oraz na konsumpcję. Opisują to równania:

$$\tau Y = s_K^B \tau Y + s_H^B \tau Y + C^B,$$

$$(1-\tau)Y = s_K^P (1-\tau)Y + s_H^P (1-\tau)Y + C^P,$$

gdzie s_K^B, s_H^B oznaczają stopy inwestycji budżetowych w kapitał rzeczowy, ludzki (przy czym s_K^B, $s_H^B \geqslant 0$, $s_K^B + s_H^B \leqslant 1$), s_K^P, s_H^P – analogiczne stopy inwestycji prywatnych (s_K^P, $s_H^P \geqslant 0$, $s_K^P + s_H^P \leqslant 1$), natomiast C^B, C^P – konsumpcję sektora budżetowego, prywatnego.

Łączne inwestycje obu sektorów w kapitał rzeczowy, ludzki wynoszą, odpowiednio, $s_K Y$, $s_H Y$, gdzie:

$$s_K = \tau s_K^B + (1-\tau) s_K^P, \qquad s_H = \tau s_H^B + (1-\tau) s_H^P \tag{5}$$

oznaczają społeczne stopy inwestycji w kapitał rzeczowy, ludzki.

---

[4] W dalszej części artykułu dla określenia „na jednostkę efektywnej pracy” będziemy używali skrótu „*njep*”.

[5] Zob. P. Pietraszewski, op. cit., s. 184-185.

Zakładamy, że zasoby kapitału rzeczowego i ludzkiego podlegają deprecjacji ze stałymi stopami $0 \leqslant \delta_K \leqslant 1$ i $0 \leqslant \delta_H \leqslant 0$. W konsekwencji równania dynamiki tych zmiennych mają postać[6]:

$$\frac{dK}{dt} = s_K Y - \delta_K K, \quad \frac{dH}{dt} = s_H Y - \delta_H H. \tag{6}$$

Na podstawie (3), (4) i (6) oraz przyjętych założeń o stopach wzrostu L i A, uzyskujemy równania dynamiki kapitału rzeczowego i ludzkiego *njep*:

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = s_K f(\bar{k}, \bar{h}) - (n+m+\delta_K)\bar{k}, \quad \frac{d\bar{h}}{dt} = s_H f(\bar{k}, \bar{h}) - (n+m+\delta_H)\bar{h}. \tag{7}$$

Przyrównując prawe strony obu równań różniczkowych do zera, otrzymujemy rozwiązanie stacjonarne układu równań (7). Poziomy kapitału rzeczowego i ludzkiego *njep* w stanie stacjonarnym, $\bar{k}_e$, $\bar{h}_e$, spełniają układ równań:

$$\frac{f(\bar{k}, \bar{h})}{\bar{k}} = \frac{(n+m+\delta_K)}{s_K}, \quad \frac{f(\bar{k}, \bar{h})}{\bar{h}} = \frac{(n+m+\delta_H)}{s_H}. \tag{8}$$

Przy przyjętych założeniach istnieje jednoznacznie określony, globalnie asymptotycznie stabilny stan długookresowej równowagi dynamicznej $(\bar{k}_e, \bar{h}_e) > 0$, zdefiniowany przez układ równań (8)[7]. Z (3) i (4) oraz założeń o stopach wzrostu zmiennych A i L wynika, że w stanie równowagi dynamicznej zasoby obu rodzajów kapitału, K, H, oraz produkt, Y, rosną według stopy $n+m$ (określanej mianem naturalnej stopy wzrostu), zaś w ujęciu *per capita* – według stopy egzogenicznego postępu technicznego m. Gospodarka znajduje się wówczas na tzw. ścieżce wzrostu równomiernego, na której proporcje pomiędzy produktem oraz kapitałem rzeczowym i ludzkim pozostają stałe.

Zgodnie z przyjętymi założeniami o podziale produktu na inwestycje i konsumpcję, w sektorach prywatnym i budżetowym społeczna konsumpcja *njep*, $\bar{c} = (C^B + C^P)/AL$, kształtuje się zgodnie z równaniem:

$$\bar{c} = (1 - s_K - s_H) f(\bar{k}, \bar{h}) = (1 - \tau s_K^B - (1-\tau) s_K^P - \tau s_H^B - (1-\tau) s_H^P) f(\bar{k}, \bar{h}). \tag{9}$$

Stąd z kolei wynika, że na ścieżce wzrostu równomiernego społeczna konsumpcja, $C = C^B + C^P$, rośnie również ze stopą $n+m$.

[6] W celu uproszczenia zapisu w całym artykule przyjmujemy następujące oznaczenia: $\dot{x} = \dot{x}(t) = dx(t)/dt$ oraz $\hat{x} = \hat{x}(t) = \dot{x}(t)/x(t)$.

[7] Więcej na ten temat, zob. ibidem, s. 187-193.

III. WRAŻLIWOŚĆ STANU STACJONARNEGO NA ZMIANY WARTOŚCI INSTRUMENTÓW POLITYKI FISKALNEJ

Kluczową, z punktu widzenia możliwości oddziaływania państwa na wzrost gospodarczy, własnością neoklasycznego modelu wzrostu jest to, że długookresowa stopa wzrostu równomiernego nie zależy od społecznych stóp inwestycji s_K, s_H. Z równań dynamiki (7) wynika, że wzrost stóp inwestycji spowoduje jedynie przejściowe podniesienie stopy wzrostu gospodarczego powyżej stopy naturalnej $n+m$ i wzrost produktu *njep* w stanie stacjonarnym, $\bar{y}_e$[8]. Wzrost $\bar{y}_e$ oznacza przesunięcie w górę ścieżki wzrostu równomiernego, do której w długim okresie zmierza gospodarka[9].

Wpływ stóp inwestycji na długookresową ścieżkę wzrostu gospodarczego można ocenić za pomocą wskaźników elastyczności produktu *njep* w stanie stacjonarnym względem społecznych stóp inwestycji s_K, s_H:

$$\varepsilon_{s_K}^{\bar{y}_e}=\frac{\partial\bar{y}_e}{\partial s_K}\cdot\frac{s_K}{\bar{y}_e},\quad \varepsilon_{s_H}^{\bar{y}_e}=\frac{\partial\bar{y}_e}{\partial s_H}\cdot\frac{s_H}{\bar{y}_e}.$$

Oznaczmy przez:

$$\alpha(\bar{k},\bar{h})=\frac{f_k\bar{k}}{f(\bar{k},\bar{h})},\quad \beta(\bar{k},\bar{h})=\frac{f_h\bar{h}}{f(\bar{k},\bar{h})} \tag{10}$$

wskaźniki elastyczności produktu względem kapitału, odpowiednio, rzeczowego, ludzkiego[10]. Przez $\alpha=\alpha(\bar{k}_e,\bar{h}_e)$, $\beta=\beta(\bar{k}_e,\bar{h}_e)$ oznaczmy stałe poziomy tych wskaźników na danej ścieżce wzrostu równomiernego. Można wykazać, że zachodzą równania[11]:

$$\varepsilon_{s_K}^{\bar{y}_e}=\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta},\quad \varepsilon_{s_H}^{\bar{y}_e}=\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}. \tag{11}$$

[8] Załóżmy, że przy danych stopach s_K, s_H gospodarka znajduje się w stanie stacjonarnym $(\bar{k}_e,\bar{h}_e)$. Wówczas:

$$0=s_Kf(\bar{k}_e,\bar{h}_e)-(n+m+\delta_K)\bar{k}_e,\quad 0=s_Hf(\bar{k}_e,\bar{h}_e)-(n+m+\delta_H)\bar{h}_e.$$

Jeżeli zwiększymy teraz stopę inwestycji s_K do poziomu $s_K'>s_K$, z pierwszego równania (7) otrzymamy: $\frac{d\bar{k}}{dt}>0$. Wzrost $\bar{k}$ powyżej $\bar{k}_e$ oznacza, że zgodnie z drugim równaniem (7) zachodzi również: $\frac{d\bar{h}}{dt}>0$. Wielkości $\bar{k}$ i $\bar{h}$ rosną, zmierzając asymptotycznie do nowego stanu stacjonarnego $(\bar{k}_e',\bar{h}_e')>(\bar{k}_e,\bar{h}_e)$. Wzrost $\bar{k}$ i $\bar{h}$ oznacza oczywiście wzrost $\bar{y}$, zatem produkt Y w okresie przejścia od jednego do drugiego stanu stacjonarnego rośnie ze stopą wyższą od $n+m$. Analogiczne rozumowanie dotyczy zwiększenia stopy inwestycji s_H.

[9] Z definicji (4) i założeń o stopach wzrostu A i L wynika, że na ścieżce wzrostu równomiernego zmiany produktu w czasie opisuje funkcja wykładnicza: $Y(t)=\bar{y}_e\cdot A(0)L(0)e^{(n+m)t}$, gdzie $A(0)$, $L(0)$ to wartości zmiennych $A(t)$, $L(t)$ w chwili $t=0$. Pisząc w artykule o zmianach położenia ścieżki wzrostu równomiernego mamy na myśli przesunięcie w górę (w dół) wykresu tej funkcji wraz ze wzrostem (spadkiem) $\bar{y}_e$. W analogicznym sensie będziemy mówić także o zmianach położenia długookresowej ścieżki wzrostu konsumpcji.

[10] Ponieważ $f_k=F_K$, $f_h=F_H$, wskaźniki elastyczności produktu względem kapitału rzeczowego i ludzkiego równe są udziałom odpowiednich typów kapitału w produkcie: $\alpha(\bar{k},\bar{h})=\frac{F_KK}{Y}$, $\beta(\bar{k},\bar{h})=\frac{F_HH}{Y}$.

[11] Zob. ibidem, s. 193-195.

Z założenia $F_K, F_H, F_L > 0$ oraz z (2) otrzymujemy: $\alpha(\bar{k}, \bar{h}), \beta(\bar{k}, \bar{h}) > 0$ oraz $\alpha(\bar{k}, \bar{h}) + \beta(\bar{k}, \bar{h}) < 1$, skąd wynika, że: $\varepsilon^{\bar{y}_e}_{s_K} > 0$, $\varepsilon^{\bar{y}_e}_{s_H} > 0$.

Na podstawie (5) i (11) wnioskujemy, że wzrost stóp inwestycji budżetowych, s^B_K, s^B_H, przyczynia się (*ceteris paribus*) do wzrostu produktu *njep* w stanie stacjonarnym, $\bar{y}_e$. Nieco inaczej jest w przypadku stopy redystrybucji τ. Ponieważ:

$$\varepsilon^{\bar{y}_e}_{\tau} = \frac{\partial \bar{y}_e}{\partial \tau} \cdot \frac{\tau}{\bar{y}_e} = \frac{\partial \bar{y}_e}{\partial s_K} \cdot \frac{\partial s_K}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{y}_e}{\partial s_H} \cdot \frac{\partial s_H}{\partial \tau} = \frac{\tau(s^B_K - s^P_K)}{\tau s^B_K + (1-\tau)s^P_K} \varepsilon^{\bar{y}_e}_{s_K} + \frac{\tau(s^B_H - s^P_H)}{\tau s^B_H + (1-\tau)s^P_H} \varepsilon^{\bar{y}_e}_{s_H}, \qquad (12)$$

to odpowiedź na pytanie o wpływ stopy redystrybucji na poziom produktu *njep* w stanie stacjonarnym, y_e, zależy od relacji pomiędzy stopami inwestycji prywatnych a budżetowych. Jak wynika z (12), jeżeli $s^B_K \geqslant s^P_K$, $s^B_H \geqslant s^P_H$ ($s^B_K \leqslant s^P_K$, $s^B_H \leqslant s^P_H$) oraz $s^B_K \neq s^P_K \vee s^B_H \neq s^P_H$, to wzrost prowadzi do wzrostu (spadku) $\bar{y}_e$. Rezultat ten w oczywisty sposób jest pochodną faktu, iż wzrost społecznych stóp inwestycji zarówno w kapitał rzeczowy, jak i ludzki, wpływa pozytywnie na $\bar{y}_e$, zatem w sytuacji gdy sektor budżetowy charakteryzuje się wyższą (niższą), w porównaniu z sektorem prywatnym, stopą inwestycji w jeden rodzaj kapitału i jednocześnie nie niższą (nie wyższą) – w drugi, wzrost stopy redystrybucji dochodu przez budżet powoduje wzrost (spadek) $\bar{y}_e$. Jeżeli stopy inwestycji budżetowych są równe odpowiednim stopom inwestycji prywatnych, $s^B_K = s^P_K$, $s^B_H = s^P_H$, podział produktu pomiędzy oba sektory nie wpływa na społeczne stopy inwestycji, a zatem na $\bar{y}_e$. Natomiast w sytuacjach, gdy $s^B_K \geqslant s^P_K$, $s^B_H \leqslant s^P_H$ lub $s^B_K \leqslant s^P_K$, $s^B_H \geqslant s^P_H$, czyli gdy sektor budżetowy charakteryzuje się wyższą – w porównaniu z sektorem prywatnym – stopą inwestycji w jeden z rodzajów kapitału, zaś niższą – w drugi, istnieje stopa redystrybucji τ^* maksymalizująca stacjonarny poziom produktu *njep*, $\bar{y}_e$, dana wzorem: $\tau^* = \frac{1}{\alpha+\beta}\left(\beta \frac{s^P_K}{s^P_K - s^B_K} + \alpha \frac{s^P_H}{s^P_H - s^B_H}\right)$[12].

IV. OPTYMALNE STOPY INWESTYCJI BUDŻETOWYCH W WARUNKACH BRAKU REAKCJI PODMIOTÓW PRYWATNYCH NA ZMIANY W POLITYCE FISKALNEJ

Pomimo iż wzrost społecznych stóp inwestycji przyczynia się do wzrostu poziomu produktu *njep* w stanie stacjonarnym, $\bar{y}_e$, nie oznacza to automatycznie wzrostu konsumpcji *njep* w stanie stacjonarnym, $\bar{c}_e$. Innymi słowy, wzrost zamożności społeczeństwa, mierzonej poziomem produktu *per capita*, w perspektywie długookresowej, nie musi się przenosić na wzrost dobrobytu

[12] Stopę τ^* można wyznaczyć przyrównując wyrażenie (12) po prawej stronie znaku równości do zera i podstawiając za $\varepsilon^{\bar{y}_e}_{S_K}$ i $\varepsilon^{\bar{y}_e}_{S_H}$ i prawe strony równań (11). Podstawiając τ^* za τ do (12), łatwo sprawdzić, że $\varepsilon^{\bar{y}_e}_{\tau} > 0$ dla $0 < \tau < \tau^*$ i $\varepsilon^{\bar{y}_e}_{\tau} < 0$ dla $\tau^* < \tau < 1$.

społeczeństwa, mierzonego poziomem konsumpcji *per capita*. Można wyznaczyć takie wartości społecznych stóp inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki, po przekroczeniu których dodatkowy produkt, pochodzący ze zwiększonych zasobów kapitału *njep*, nie wystarcza do utrzymania tych zasobów na wyższych poziomach, co powoduje spadek konsumpcji *njep*, a zatem pogorszenie dobrobytu społecznego, również w perspektywie długookresowej. Zgodnie ze „złotą regułą akumulacji" Phelpsa[13], rozszerzoną na dwa rodzaje kapitału, optymalne – tzn. maksymalizujące konsumpcję *njep* w stanie stacjonarnym – społeczne stopy inwestycji spełniają warunek:

$$s_K^* = \alpha = \alpha(\bar{k}_e, \bar{h}_e) \wedge s_H^* = \beta = \beta(\bar{k}_e, \bar{h}_e), \tag{13}$$

czyli są równe stałym (na ścieżce wzrostu równomiernego) udziałom odpowiednich typów kapitału w wytwarzanym produkcie (por. przypis 9)[14].

Załóżmy teraz, że dane są dowolnie ustalone stopy inwestycji prywatnych s_K^P, s_H^P oraz stopa redystrybucji τ. Znając optymalne społeczne stopy inwestycji, s_K^*, s_H^*, w oparciu o równania (5) możemy wyznaczyć optymalne stopy inwestycji budżetowych, s_K^{B*}, s_H^{B*}:

$$s_K^{B*} = \frac{\alpha - s_K^P(1-\tau)}{\tau}, \quad s_H^{B*} = \frac{\beta - s_H^P(1-\tau)}{\tau}. \tag{14}$$

Należy podkreślić, że równania (14) mają sens ekonomiczny tylko wtedy, gdy:

$$s_K^{B*}, s_H^{B*} \geqslant 0, \quad s_K^{B*} + s_H^{B*} \leqslant 1. \tag{15}$$

Jeżeli nie jest spełniony warunek (15), to w gospodarce o danych stopach inwestycji prywatnych s_K^P, s_H^P i stopie redystrybucji nie jest możliwa akumulacja kapitału zgodna ze "złotą regułą" Phelpsa.

Zagadnienie wyznaczenia optymalnych stóp inwestycji budżetowych można sformułować w postaci następującego zadania warunkowej optymalizacji nieliniowej:

$$\bar{c}_e = \left(1 - \tau s_K^B - (1-\tau)s_K^P - \tau s_H^B - (1-\tau)s_H^P\right) f(\bar{k}_e, \bar{h}_e) \xrightarrow{s_K^B,\, s_H^B} \max \tag{16}$$
$$s_K^B, s_H^B \geqslant 0, \quad s_K^B + s_H^B \leqslant 1.$$

Zgodnie z (9), funkcja celu problemu (16) przedstawia konsumpcję *njep* w stanie stacjonarnym. Jej argumentami są stopy inwestycji budżetowych s_K^B, s_H^B. Jest to funkcja złożona, gdyż $\bar{k}_e$, $\bar{h}_e$ są też funkcjami s_K^B, s_H^B.

---

[13] Zob. E. Phelps, *The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen*, „American Economic Review", September 1961, s. 638-643.

[14] Szerzej na ten temat zob. P. Pietraszewski, *Uwagi o „złotej regule akumulacji" kapitału rzeczowego i ludzkiego w kontekście zagadnienia maksymalizacji dobrobytu*, „Ruch Prawniczy, Ekonomiczny i Socjologiczny" 2009, z. 1, s. 105-122.

Warunki optymalności Kuhna-Tuckera mają postać[15]:

$$\frac{\partial L}{\partial s_K^B} \leqslant 0 \quad s_K^B \geqslant 0 \quad s_K^B \frac{\partial L}{\partial s_K^B} = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial s_H^B} \leqslant 0 \quad s_H^B \geqslant 0 \quad s_H^B \frac{\partial L}{\partial s_H^B} = 0, \tag{17}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - s_K^B - s_H^B \geqslant 0 \quad \lambda \geqslant 0 \quad \lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0,$$

gdzie $L = L(s_K^B, s_H^B) = \bar{c}_e(s_K^B, s_H^B) + (1 - s_K^B - s_H^B)\lambda$ oznacza funkcję Lagrange'a, zaś λ – mnożnik Lagrange'a.

Pochodne cząstkowe funkcji $L(s_K^B, s_H^B)$ względem s_B^K i s_H^B wyrażają się wzorami:

$$\frac{\partial L}{\partial s_K^B} = \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B} - \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial s_H^B} = \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_H^B}\tau - \lambda, \tag{18}$$

przy czym – korzystając z (9) i (11) – pochodne cząstkowe funkcji $\bar{c}_e(s_K^B, s_H^B)$ względem s_K^B i s_H^B można przedstawić w następującej postaci:

$$\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B} = \left[\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \frac{(1 - \tau s_K^B - (1-\tau)s_K^P - \tau s_H^B - (1-\tau)s_H^P)}{\tau s_K^B + (1-\tau)s_K^P} - 1\right] f(\bar{k}_e, \bar{h}_e)\tau,$$
$$\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B} = \left[\frac{\beta}{1-\alpha-\beta} \frac{(1 - \tau s_K^B - (1-\tau)s_K^P - \tau s_H^B - (1-\tau)s_H^P)}{\tau s_H^B + (1-\tau)s_H^P} - 1\right] f(\bar{k}_e, \bar{h}_e)\tau. \tag{19}$$

Schemat znajdowania rozwiązań zadania zamieszczono w tabeli 1.

Przy różnych założeniach o stopach s_K^B, s_H^B (pierwsza kolumna tabeli 1), warunki (17) redukują się do warunków przedstawionych w drugiej kolumnie tabeli 1. Stąd, uwzględniając (18), otrzymujemy warunki przedstawione w trzeciej kolumnie tabeli 1.

Z warunków w pierwszej i trzeciej kolumnie tabeli 1 oraz z równań (19) uzyskujemy ograniczenia na parametry zadania (obszary zmienności stóp inwestycji prywatnych s_K^P, s_H^P) oraz – odpowiadające im – stopy inwestycji budżetowych s_K^{B*}, s_H^{B*}, spełniające warunki optymalności (17). Otrzymane wyniki przedstawia tabela 2.

Na rysunku 1 przedstawiono graficzne prezentacje obszarów zmienności stóp inwestycji prywatnych z tabeli 2, otrzymanych dla przykładowych wartości

[15] W sprawie rozwiązywania problemów optymalizacji nieliniowej zob. A. C. Chiang, *Podstawy ekonomii matematycznej*, PWE, Warszawa 1994, s. 714-751.

Tabela 1

Schemat znajdowania rozwiązań w zadaniu na optymalizację warunkową stóp inwestycji budżetowych w kapitał rzeczowy i ludzki

Nr	Założenia o stopach s_K^B, s_H^B	Zredukowane warunki Kuhna-Tuckera	Ograniczenia na $\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B}$, $\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_H^B}$
1	$s_K^B=0,\ s_H^B=1$	$\frac{\partial L}{\partial s_K^B}\leqslant 0,\ \frac{\partial L}{\partial s_H^B}=0,\ \lambda\geqslant 0$	$\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B}\leqslant\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_H^B},\ \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_H^B}\geqslant 0$
2	$s_K^B=0,\ s_H^B=0$	$\frac{\partial L}{\partial s_K^B}\leqslant 0,\ \frac{\partial L}{\partial s_H^B}\leqslant 0,\ \lambda=0$	$\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B}\leqslant 0,\ \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_H^B}\leqslant 0$
3	$s_K^B=1,\ s_H^B=0$	$\frac{\partial L}{\partial s_K^B}=0,\ \frac{\partial L}{\partial s_H^B}\leqslant 0,\ \lambda\geqslant 0$	$\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B}\geqq 0,\ \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_H^B}\leqslant\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B}$
4	$s_K^B>0,\ s_H^B>0;$ $s_K^B+s_H^B<1$	$\frac{\partial L}{\partial s_K^B}=0,\ \frac{\partial L}{\partial s_H^B}=0,\ \lambda=0$	$\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B}=0,\ \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_H^B}=0$
5	$s_K^B>0,\ s_H^B>0;$ $s_K^B+s_H^B=1$	$\frac{\partial L}{\partial s_K^B}=0,\ \frac{\partial L}{\partial s_H^B}=0,\ \lambda\geqslant 0$	$\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B}=\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_H^B}\geqslant 0$
6	$0<s_K^B<1,\ s_H^P=0$	$\frac{\partial L}{\partial s_K^B}=0,\ \frac{\partial L}{\partial s_H^B}\leqslant 0,\ \lambda=0$	$\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B}=0,\ \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_H^B}\leqslant 0$
7	$s_K^B=0,\ 0<s_H^B<1$	$\frac{\partial L}{\partial s_K^B}\leqslant 0,\ \frac{\partial L}{\partial s_H^B}=0,\ \lambda=0$	$\frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_K^B}\leqslant 0,\ \frac{\partial \bar{c}_e}{\partial s_H^B}=0$

Źródło: obliczenia własne.

parametrów: α, β i τ. Na stopy inwestycji prywatnych nałożono dodatkowo ograniczenia: s_K^P, $s_H^P \geqslant 0$; $s_K^P + s_H^P \leqslant 1$.

Kluczowym wnioskiem, wynikającym z analizy tabeli 2, jest spostrzeżenie, że sektor budżetowy ma możliwość zagwarantowania realizacji „złotej reguły akumulacji" – poprzez ustalenie odpowiednich stóp inwestycji budżetowych – jedynie wtedy, gdy stopy inwestycji prywatnych spełniają warunki w czwartym wierszu tabeli 2 (obszar 4 na rysunku 1). W szczególności, przy względnie niskich stopach inwestycji prywatnych w oba rodzaje kapitału (obszar 5), polityka inwestycyjna państwa nie jest w stanie wynieść gospodarki na możliwie najwyższą ścieżkę wzrostu konsumpcji społecznej.

Z przeprowadzonej analizy symulacyjnej (zob. rysunek 1) wynika ponadto, że szanse na realizację tego zadania są tym większe, im wyższa jest stopa

Tabela 2

Stopy inwestycji budżetowych spełniające warunki maksymalizacji konsumpcji *njep* w stanie stacjonarnym, odpowiadające danym stopom inwestycji prywatnych

Nr	Stopy inwestycji budżetowych s_K^{B*}, s_H^{B*}	Obszary zmienności stóp inwestycji prywatnych s_K^P, s_H^P
1	$s_K^{B*}=0,\ s_H^{B*}=1$	$\frac{\tau+(1-\tau)s_H^P}{1-\tau}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\leqslant s_K^P\leqslant\frac{1}{1-\tau}-\frac{1-\alpha}{\beta}\cdot\frac{\tau+(1-\tau)s_K^P}{1-\tau}$
2	$s_K^{B*}=0,\ s_H^{B*}=0$	$s_K^P\geqslant\frac{1-(1-\tau)s_K^P}{1-\tau}\cdot\frac{\alpha}{1-\beta},\ s_H^P\geqslant\frac{1}{1-\tau}-\frac{1-\alpha}{\beta}s_H^P$
3	$s_K^{B*}=1,\ s_H^{B*}=0$	$s_K^P\leqslant\frac{1-(1-\tau)s_H^P}{1-\tau}\cdot\frac{\alpha}{1-\beta}-\frac{\tau}{1-\tau},\ s_H^P\leqslant\frac{\alpha}{\beta}s_H^P-\frac{\tau}{1-\tau}$
4	$s_K^{B*}=\frac{\alpha-(1-\tau)s_K^P}{\tau},\ s_H^{B*}=\frac{\beta-(1-\tau)s_H^P}{\tau}$	$s_K^P\leqslant\frac{\alpha}{1-\tau};\ s_H^P\leqslant\frac{\beta}{1-\tau},\ s_K^P\geqslant\frac{\alpha+\beta-\tau}{1-\tau}-s_H^P$
5	$s_K^{B*}=\frac{1-\tau}{\tau}\cdot\frac{\alpha s_H^P-\beta s_K^P}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ $s_H^{B*}=\frac{1-\tau}{\tau}\cdot\frac{\beta s_K^P-\alpha s_H^P}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta}s_H^P-\frac{\tau}{1-\tau}\leqslant s_K^P\leqslant\frac{\tau+(1-\tau)s_H^P}{1-\tau}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$ $s_K^P\leqslant\frac{\alpha+\beta-\tau}{1-\tau}-s_H^P$
6	$s_K^{B*}=\frac{1-(1-\tau)s_H^P}{\tau}\cdot\frac{\alpha}{1-\beta}-\frac{1-\tau}{\tau}s_K^P$ $s_H^{B*}=0$	$s_H^P\geqslant\frac{\beta}{1-\tau},\ s_K^P\geqslant\frac{1-(1-\tau)s_H^P}{1-\tau}\cdot\frac{\alpha}{1-\beta}-\frac{\tau}{1-\tau}$ $s_K^P\leqslant\frac{1-(1-\tau)s_H^P}{1-\tau}\cdot\frac{\alpha}{1-\beta}$
7	$s_K^{B*}=0$ $s_H^{B*}=\frac{1-(1-\tau)s_K^P}{\tau}\cdot\frac{\beta}{1-\alpha}-\frac{1-\tau}{\tau}s_H^P$	$s_K^P\geqslant\frac{\alpha}{1-\tau},\ s_K^P\geqslant\frac{1-\alpha}{\beta}\left(\frac{\tau}{1-\tau}+s_H^P\right)+\frac{1}{1-\tau}$ $s_K^P\leqslant-\frac{1-\alpha}{\beta}s_H^P+\frac{1}{1-\tau}$

Źródło: obliczenia własne.

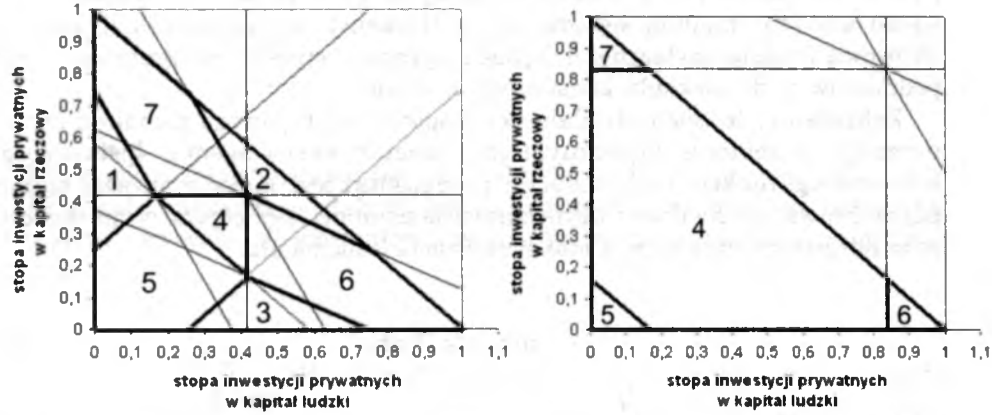
redystrybucji dochodu przez budżet τ. Stawiając problem od drugiej strony, można zadać pytanie, przy jakich wartościach stopy redystrybucji osiągnięcie „złotych" poziomów społecznych stóp inwestycji dzięki odpowiedniej polityce inwestycyjnej państwa jest w ogóle możliwe. Nakładając ograniczenia (15) na stopy inwestycji budżetowych wyznaczone zgodnie z (14) oraz uwzględniając warunek $0\leqslant\tau\leqslant 1$, wnioskujemy, że przy danych α, β, s_K^P, s_H^P ustalona przez państwo stopa redystrybucji powinna znajdować się w przedziale[16]:

[16] Warto zasygnalizować również możliwość poszukiwania optymalnej stopy redystrybucji, przy danych, dowolnie ustalonych stopach inwestycji prywatnych i budżetowych. Problem warunkowej optymalizacji nieliniowej ma wtedy postać: $\max \bar{c}_e(\tau)$, przy warunku: $0\leqslant\tau\leqslant 1$, gdzie funkcja $\bar{c}_e(\tau)$ ma postać taką, jak w zadaniu (16).

Rysunek 1

Obszary zmienności stóp inwestycji prywatnych s_K^P, s_H^P

a) $\alpha=1/3$; $\beta=1/3$; $\iota=0{,}2$ b) $\alpha=1/3$; $\beta=1/3$; $\iota=0{,}6$



Źródło: obliczenia własne w oparciu o symulacje przeprowadzone za pomocą arkusza kalkulacyjnego Microsoft Excel.

$$\frac{\alpha+\beta-s_K^P-s_H^P}{1-s_K^P-s_H^P}\leqslant\tau\leqslant 1,\quad gdy\quad s_K^P\leqslant\alpha,\quad s_H^P\leqslant\beta,$$

$$\max\left\{\frac{s_K^P-\alpha}{s_K^P};\ \frac{s_H^P-\beta}{s_H^P}\right\}\leqslant\tau\leqslant 1,\quad gdy\quad s_K^P\geqslant\alpha,\quad s_H^P,$$

$$\max\left\{\frac{s_K^P-\alpha}{s_K^P};\ \frac{\alpha+\beta-s_K^P-s_H^P}{1-s_K^P-s_H^P}\right\}\leqslant\tau\leqslant 1,\quad gdy\quad s_H^P\leqslant\beta,$$

$$\max\left\{\frac{\alpha+\beta-s_K^P-s_H^P}{1-s_K^P-s_H^P};\ \frac{s_H^P-\beta}{s_H^P}\right\}\leqslant\tau\leqslant 1,\quad gdy\quad s_K^P\leqslant\alpha,\quad s_H^P\geqslant\beta.$$

V. ENDOGENICZNE UJĘCIE INWESTYCJI PRYWATNYCH

Przyjmowane w dotychczasowej analizie założenie o stałych, egzogenicznie danych stopach inwestycji prywatnych, s_K^P, s_H^P oznacza, że podmioty sektora prywatnego w ogóle nie reagują na zmiany stopy redystrybucji dochodu przez budżet i podział wydatków budżetowych na konsumpcję i inwestycje[17]. Założenie to uchylamy w tym punkcie artykułu. Nie przyjmujemy przy tym żadnego arbitralnie określonego mechanizmu dostosowań do zmian stopy redystrybucji i stóp inwestycji budżetowych – reakcja na zmiany w polityce fiskalnej wynika *implicite* z zachowań optymalizacyjnych podmiotów prywatnych, maksymalizujących (przy ustalonych parametrach, wśród których znajdują się również instrumenty polityki fiskalnej) międzyokresową funkcję użyteczności, będącą wyrazem określonych preferencji tych podmiotów co do rozkładu konsumpcji w czasie.

Zakładamy, że celem działalności gospodarczej typowego podmiotu ekonomicznego w sektorze prywatnym (reprezentatywnego agenta, spełniającego jednocześnie funkcje konsumenta i producenta) jest maksymalizacja łącznej zdyskontowanej chwilowej użyteczności konsumpcji *per capita* w nieskończonym horyzoncie czasu, czyli maksymalizacja funkcjonału:

$$\int_0^\infty u(c(t))e^{-\rho t}dt, \tag{20}$$

gdzie $c=C/L$ oznacza konsumpcję społeczną *per capita*. Założona stopa dyskontowa $\rho>0$ określa różną wagę przypisywaną do tej samej konsumpcji w różnych momentach czasu. Dodatni poziom tej stopy jest wyrazem założenia, iż typowy podmiot gospodarczy wyżej wartościują konsumpcję bieżącą niż konsumpcję przyszłą. Funkcja $u(c)$ charakteryzuje się malejącą dodatnią użytecznością krańcową: $u'(c)>0$; $u''(c)<0$ dla każdego $c>0$, oraz spełnia tzw. warunki Inady: $\lim_{c\to 0} u'(c)=\infty$, $\lim_{c\to\infty} u'(c)=0$. Przykładem funkcji użyteczności spełniającej podane założenia jest funkcja postaci: $u(c(t))=\frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, gdzie: $\gamma>0$, $\gamma\neq 1$. Większy parametr γ oznacza większe tempo spadku krańcowej użyteczności w miarę wzrostu konsumpcji (wartość bezwzględna stopy zmian $u'(c)$ względem c, czyli $\frac{u''(c)}{u'(c)}=-\gamma c^{-1}$, rośnie wraz ze wzrostem γ), a zatem – przy założeniu maksymalizacji całki preferencji – charakteryzuje rosnącą skłonność do wygładzania poziomu konsumpcji w czasie. Przy $\gamma\to 0$, podmiotom jest obojętne, czy całość konsumpcji przypada na jeden moment, czy też jest rozłożona w czasie, dlatego są skłonne odkładać konsumpcję w czasie, jeśli

[17] Zauważmy ponadto, że przeprowadzona analiza wpływu państwa na wzrost gospodarczy abstrahuje od problemu potencjalnych różnic w efektywności inwestycji sektora prywatnego i publicznego, a także występowania pozytywnych efektów zewnętrznych inwestycji budżetowych (np. inwestycji infrastrukturalnych, wydatków na naukę i edukację, itp.). Ostatnie ograniczenie wynika przy tym z ograniczeń strukturalnych samego neoklasycznego modelu wzrostu, na gruncie którego takie problemy, jak efekty zewnętrzne inwestycji, nie mogą być w należyty sposób potraktowane. Perspektywa formalnego rozpatrzenia tego zagadnienia otwiera się dopiero w endogenicznej teorii wzrostu gospodarczego. Reprezentatywnym w tej kwestii endogenicznym modelem wzrostu jest model R. Barro oddziaływania polityki fiskalnej na wzrost gospodarczy, w którym całość wydatków rządowych została ujęta jako wywołująca pozytywne efekty zewnętrzne w gospodarce, oddziałujące na wzrost wydajności czynników produkcji zatrudnionych w przedsiębiorstwach. Zob. R. J. Barro, *Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth*, „Journal of Political Economics", October 1990, s. 103-125.

tylko stopa przychodu z kapitału zakumulowanego dzięki oszczędnościom jest dostatecznie wysoka w porównaniu z ich stopą dyskontową.

Wyrażając konsumpcję *per capita* w kategoriach konsumpcji *njep*, funkcjonał celu można zapisać następująco:

$$\int_0^\infty \frac{(A_0 e^{mt}\bar{c}(t))^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{-\rho t}dt = \int_0^\infty \frac{\bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} A_0^{1-\gamma} e^{((1-\gamma)m-\rho)t}dt.$$

Dla zapewnienia zbieżności tej całki zakładamy, że: $\rho-(1-\gamma)m>0$.

Uchylenie założenia o stałych, egzogenicznie danych stopach inwestycji prywatnych prowadzi do sformułowania następującego problemu dynamicznej optymalizacji[18]:

$$\int_0^\infty \frac{\bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{((1-\gamma)m-\rho)t}dt \to \max, \qquad \rho-(1-\gamma)m>0, \tag{21}$$

przy warunkach:

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = s_K^P(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h}) + s_K^B\tau f(\bar{k},\bar{h}) - (n+m+\delta_K)\bar{k},$$

$$\frac{d\bar{h}}{dt} = f(\bar{k},\bar{h}) - \bar{c} - s_K^P(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h}) - s_K^B\tau f(\bar{k},\bar{h}) - (n+m+\delta_H)\bar{h}, \tag{22}$$

$$\bar{k}(0)=\bar{k}_0,\ \bar{h}(0)=\bar{h}_0,$$

$$s_K^P \geqslant 0,\ \big(1-s_K^P(1-\tau)-(s_K^B+s_H^B)\tau\big)f(\bar{k},\bar{h})-\bar{c}\geqslant 0,\ \bar{c}-(1-s_K^B-s_H^B)\tau f(\bar{k},\bar{h})\geqslant 0$$

w którym stopy inwestycji budżetowych, s_K^B, s_H^B, traktujemy jako dane, a stopy inwestycji prywatnych, s_K^P, s_H^P – jako podlegające rachunkowi optymalizacyjnemu. Rolę zmiennych sterujących przypisujemy zmiennym $\bar{c}(t)$ i $s_K^P(t)$[19].

Hamiltonian dla tego problemu jest tradycyjnie sumą funkcji podcałkowej i prawych stron równań ruchu dla $\bar{k}$ i $\bar{h}$, ważonych mnożnikami Lagrange'a λ_K i λ_H, odpowiadający mu zaś hamiltonian wartości bieżącej ma postać:

---

[18] Stałą $A_0^{1-\gamma}$ pomijamy, gdyż nie ma wpływu na rozwiązanie maksymalizującego wartość funkcjonału.

[19] Ograniczenia zapisane w ostatnim wierszu (22) w kategoriach zmiennych sterujących, zmiennych stanu oraz parametrów polityki fiskalnej s_K^B, s_H^B i τ, odpowiadają warunkom nakładanym na stopy inwestycji prywatnych, odpowiednio $s_K^P\geqslant 0$, $s_H^P\geqslant 0$, $s_K^P+s_H^P\leqslant 1$.

$$H_C=\frac{\bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}+\theta_K\big[\big(s^P_K(1-\tau)+s^B_K\tau\big)f(\bar{k},\bar{h})-(n+m+\delta_K)\bar{k}\big]+$$
$$+\theta_H\big[\big(1-s^P_K(1-\tau)-s^B_K\tau\big)f(\bar{k};\bar{h})-\bar{c}-(n+m+\delta_H)\bar{h}\big], \tag{23}$$

gdzie: $\theta_K=\lambda_K e^{(\rho-(1-\gamma)m)t}$ i $\theta_H=\lambda_H e^{(\rho-(1-\gamma)m)t}$ są mnożnikami Lagrange'a wartości bieżącej. Pierwszy warunek zasady maksimum L. S. Pontriagina[20], dotyczący maksymalizacji hamiltonianu w całym horyzoncie optymalizacji względem zmiennej sterującej, $\bar{c}(t)$ ma postać następującą:

$$\frac{\partial H_C}{\partial \bar{c}}=\bar{c}(t)^{-\gamma}-\theta_H=0. \tag{24}$$

Ponieważ, ze względu na (9), równania dynamiki zmiennych stanu $\bar{k}$ i $\bar{h}$ można zapisać w następujący sposób:

$$\frac{d\bar{k}}{dt}=f(\bar{k},\bar{h})-\bar{c}-s^P_H(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h})-s^B_H\tau f(\bar{k},\bar{h})-(n+m+\delta_K)\bar{k},$$

$$\frac{d\bar{h}}{dt}=s^P_H(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h})+s^B_H\tau f(\bar{k},\bar{h})-(n+m+\sigma_H)\bar{h},$$

to odpowiadający tak przekształconemu problemowi dynamicznej optymalizacji – gdzie zamiast $s^P_K(t)$ rolę drugiej zmiennej sterującej odgrywa $s^P_H(t)$ – hamiltonian wartości bieżącej przyjmuje postać:

$$H_C=\frac{\bar{c}(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}+\theta_K\big[\big(s^P_H(1-\tau)+s^B_H\tau\big)f(\bar{k},\bar{h})-\bar{c}-(n+m+\delta_K)\bar{k}\big]+$$
$$+\theta_H\big[\big(1-s^P_H(1-\tau)+s^B_H\tau\big)f(\bar{k},\bar{h})-(n+m+\delta_H)\bar{h}\big], \tag{25}$$

pierwszy warunek zaś zasady maksimum przybiera postać:

$$\frac{\partial H_C}{\partial \bar{c}}=\bar{c}(t)^{-\gamma}-\theta_K(t)=0. \tag{26}$$

Z zestawienia (24) i (26) wynika:

$$\theta_K(t)=\theta_H(t)=\bar{c}(t)^{-\gamma}. \tag{27}$$

---

[20] W sprawie rozwiązywania problemów dynamicznej optymalizacji w ramach teorii sterowania optymalnego, z wykorzystaniem zasady maksimum Pontriagina, zob. R. J. Barro, X. Sala-i-Martin, *Economic Growth*, McGraw-Hill Inc., New York 1995, s. 498-510; A. C. Chiang, *Elementy dynamicznej optymalizacji*, Dom Wydawniczy ELIPSA, Warszawa 2002, s. 163-310; E. Panek, *Ekonomia matematyczna*, wyd. 2 poszerz., Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2003, s. 373-713.

Zgodnie ze standardową interpretacją mnożników Lagrange'a jako cen dualnych dla zmiennych stanu – kapitału rzeczowego i ludzkiego (wyrażających zmianę wartości całki preferencji – a zatem „sumy chwilowej użyteczności konsumpcji" w całym przedziale optymalizacyjnym – wywołanej krańcową zmianą poziomu kapitału w chwili t), równanie (27) charakteryzuje optymalną wielkość konsumpcji w chwili t jako wyrównującą krańcową użyteczność bieżącej konsumpcji z jej krańcowymi kosztami alternatywnymi, w odniesieniu zarówno do kapitału rzeczowego, jak i ludzkiego.

Ponieważ równość (27) zachodzi dla każdego momentu t, z (23) (lub (25)) wynika, że $s_K^P(t)$ ($s_H^P(t)$) nie wpływa na wartość hamiltonianu. Eliminuje to konieczność zapisywania warunku na maksymalizację hamiltonianu względem $s_K^P(t)$ (lub $s_H^P(t)$).

Pozostałe warunki maksymalizacji funkcjonału celu są następujące:

$$\frac{d\bar{k}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \theta_K}=s_K^P(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h})+s_K^B\tau f(\bar{k},\bar{h})-(n+m+\delta_K)\bar{k},$$

$$\frac{d\bar{h}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \theta_H}=f(\bar{k},\bar{h})-\bar{c}-s_K^P(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h})-s_K^B\tau f(\bar{k},\bar{h})-(n+m+\delta_H)\bar{h}, \tag{28}$$

$$\frac{d\theta_K}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \bar{k}}+\theta_K\big(\rho-(1-\gamma)m\big)=$$

$$=-\theta_K\left(\left(s_K^P(1-\tau)+s_K^B\tau\right)\frac{\partial f(\bar{k},\bar{h})}{\partial \bar{k}}-\big(n+m+\delta_K+\rho-(1-\gamma)m\big)\right)-$$

$$-\theta_H\left(1-s_K^P(1-\tau)-s_K^B\tau\right)\frac{\partial f(\bar{k},\bar{h})}{\partial \bar{k}},$$

$$\frac{d\theta_H}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \bar{h}}+\theta_H\big(\rho-(1-\gamma)m\big)= \tag{29}$$

$$=-\theta_H\left(\left(1-s_K^P(1-\tau)-s_K^B\tau\right)\frac{\partial f(\bar{k},\bar{h})}{\partial \bar{h}}-\big(n+m+\delta_H+\rho-(1-\gamma)m\big)\right)-$$

$$-\theta_K\left(s_K^P(1-\tau)+s_K^B\tau\right)\frac{\partial f(\bar{k},\bar{h})}{\partial \bar{h}},$$

warunki transwersalności zaś[21]:

[21] Warunki (30) pojawiają się ze względu na swobodny „stan końcowy" (czyli nie ustalone a priori wartości graniczne zmiennych stanu przy $t\to\infty$). Warunek (31) odgrywa rolę ogólnego warunku transwersalności w problemach z nieskończonym horyzontem, ze względu na nie ustalony z konieczności końcowy moment optymalizacji. Zob. A. C. Chiang, op. cit., s. 239-242.

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_K(t)=0 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty}\theta_K(t)e^{((1-\gamma)m-\rho)t}=0, \tag{30}$$

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_H(t)=0 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty}\theta_H(t)e^{((1-\gamma)m-\rho)t}=0,$$

$$\lim_{t\to\infty}H=0 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty}H_C e^{((1-\gamma)m-\rho)t}=0. \tag{31}$$

Podstawiając (27) oraz: $\frac{d\theta_K}{dt}=\frac{d\theta_K}{dt}=-\gamma\bar{c}(t)^{-\gamma-1}\frac{d\bar{c}}{dt}$ do (29), po kilku prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{c}}{dt}&=\frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)\left(\frac{\partial f(\bar{k},\bar{h})}{\partial\bar{k}}-(n+m+\delta_K+\rho-(1-\gamma)m)\right),\\ \frac{d\bar{c}}{dt}&=\frac{1}{\gamma}\bar{c}(t)\left(\frac{\partial f(\bar{k},\bar{h})}{\partial\bar{h}}-(n+m+\delta_H+\rho-(1-\gamma)m)\right).\end{aligned} \tag{32}$$

Dynamikę systemu charakteryzuje układ równań różniczkowych (28), (32).

Ze względu na brak określenia konkretnej postaci funkcji $f(\bar{k},\bar{h})$, nie można wyznaczyć rozwiązania tego układu w sposób analityczny. Możemy jednakże dokonać jego analizy jakościowej. Punkt stacjonarny znajdujemy przez przyrównanie prawych stron (28) oraz (32) do zera. Odpowiednie równania zapisujemy w postaci:

$$\begin{aligned}s_K^P(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h})+s_K^B\tau f(\bar{k},\bar{h})&=s_K f(\bar{k},\bar{h})=(n+m+\delta_K)\bar{k},\\ s_H^P(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h})+s_H^B\tau f(\bar{k},\bar{h})&=s_H f(\bar{k},\bar{h})=(n+m+\delta_H)\bar{h},\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\bar{k},\bar{h})}{\partial\bar{k}}&=n+m+\delta_K+\rho-(1-\gamma)m,\\ \frac{\partial f(\bar{k},\bar{h})}{\partial\bar{h}}&=n+m+\delta_H+\rho-(1-\gamma)m,\end{aligned} \tag{34}$$

przy czym w obu równaniach (33) skorzystaliśmy z zależności (5), a w drugim także z (9).

Wartości $\bar{k}_e, \bar{h}_e>0$ oraz $s_K^{P**}, s_H^{P**}>0$, będące rozwiązaniem układu równań (33)–(34), charakteryzują długookresową równowagę dynamiczną systemu.

Zbieżność gospodarki do stanu równowagi długookresowej jest formalnie zagwarantowana przez warunki transwersalności (30)–(31).

Podstawiając prawą stronę (27) $\theta_K(t)=\theta_H(t)$ w (25), ze względu na silną wklęsłość funkcji $f(\bar{k};\bar{h})$, możemy zauważyć, że tzw. zmaksymalizowany hamiltonian wartości bieżącej, zdefiniowany jako:

$$H_C^{**}\big(\theta_K(t),\,\theta_H(t),\,\bar{k}(t),\,\bar{h}(t)\big)=H_C\big(\theta_K(t),\,\theta_H(t),\,\bar{k}(t)\,\bar{h}(t),\,\bar{c}^{**}(t),\,s_K^{P**}(t)\big),$$

– gdzie $\bar{c}^{**}(t)$ i $s_K^{P**}(t)$ oznaczają optymalne trajektorie zmiennych sterujących $\bar{c}(t)$ i $s_K(t)$, wynikające z zasady maksimum – jest silnie wklęsłą funkcją zmiennych stanu $\bar{k}(t)$ i $\bar{h}(t)$. Tym samym spełniony jest warunek wystarczający na to, aby rozwiązanie wynikające z zasady maksimum stanowiło jedyne rozwiązanie optymalne problemu (21)–(22).

Z warunków równowagi długookresowej (33)–(34), zależności (5) oraz definicji (10) wyznaczamy długookresowe optymalne społeczne stopy inwestycji (obowiązujące w punkcie równowagi długookresowej):

$$s_K^{**}=\alpha\frac{m+n+\delta_K}{\rho+n+\delta_K+\gamma m},\qquad s_H^{**}=\beta\frac{m+n+\delta_H}{\rho+n+\delta_H+\gamma m},\tag{35}$$

gdzie $\alpha=\alpha(\bar{k}_e,\bar{h}_e)$, $\beta=\beta(\bar{k}_e,\bar{h}_e)$ to stałe – na ścieżce wzrostu równomiernego – udziały kapitału rzeczowego i ludzkiego w produkcie.

Optymalne stopy inwestycji prywatnych możemy wyznaczyć, korzystając z równań (5):

$$s_K^{P**}=\frac{s_K^{**}-s_K^B\tau}{1-\tau},\qquad s_H^{P**}=\frac{s_H^{**}-s_H^B\tau}{1-\tau}.\tag{36}$$

Społeczne stopy inwestycji s_K^{**}, s_H^{**}, warunkują określone (optymalne) poziomy produktu i konsumpcji njep w stanie stacjonarnym, $\bar{y}_e$, $\bar{c}_e$.

Z (35) wnioskujemy, że optymalne społeczne stopy inwestycji pozostają niezależne od działań państwa z zakresu polityki fiskalnej. Oznacza to m.in., że każda próba podniesienia przez państwo społecznych stóp inwestycji poprzez zwiększenie części dochodów budżetowych przeznaczanej na inwestycje budżetowe wywoła, zgodnie z (36), odpowiednie obniżenie stóp inwestycji prywatnych, w takim stopniu, iż społeczne stopy inwestycji nie ulegną zmianie. Następuje zatem wypychanie inwestycji sektora prywatnego przez inwestycje budżetowe. W konsekwencji polityka fiskalna jest nieskuteczna w oddziaływaniu na długookresową ścieżkę wzrostu gospodarczego[22].

---

[22] Ze względu na ograniczenia, jakim podlegają stopy s_K^P i s_H^P (patrz przypis 19), ściśle rzecz biorąc, sformułowane wnioski pozostają słuszne tak długo, jak długo stopy inwestycji budżetowych i stopa redystrybucji ustalone przez państwo spełniają warunki: $s_K^B\leqslant\frac{s_K^{**}}{\tau}$, $s_H^B\leqslant\frac{s_H^{**}}{\tau}$ oraz $s_K^B+s_H^B\geqslant\frac{s_K^{**}+s_H^{**}-(1-\tau)}{\tau}$, gdzie s_K^{**} i s_H^{**} określone są przez (35). W sytuacji, gdy warunki te nie są spełnione, stopy inwestycji

Sformułowane wnioski są słuszne pod warunkiem, że konsumpcja publiczna w takim samym stopniu wpływa na użyteczność podmiotów sektora prywatnego, jak konsumpcja prywatna (w funkcjonale (20) ujęta jest całość konsumpcji *per capita*, bez względu na źródło pochodzenia). Założenie takie wydaje się mało prawdopodobne. Z tego względu przyjmujemy teraz bardziej realistyczne założenie, że podmioty w sektorze prywatnym podejmują decyzje o podziale swoich dochodów do dyspozycji na bieżącą konsumpcję i inwestycje w sposób zapewniający maksymalizację międzyokresowej użyteczności konsumpcji (*per capita*), finansowanej wyłącznie z własnych środków. Zakładamy zatem, że optymalizacja w przypadku typowego podmiotu ekonomicznego dotyczy wyłącznie poziomu prywatnej konsumpcji, nie zaś konsumpcji społecznej *per capita*, włącznie z konsumpcją sektora budżetowego.

Okazuje się, iż odpowiednie przeformułowanie zadania optymalizacyjnego (funkcjonału celu) zmienia w zasadniczy sposób jakościowy charakter rozwiązania w aspekcie wpływu polityki fiskalnej na poziom społecznych stóp inwestycji.

Konsumpcja prywatna *njep* spełnia równanie:

$$\bar{c}_P=(1-s_K^P-s_H^P)(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h}). \tag{37}$$

Odpowiednio zmodyfikowany problem dynamicznej optymalizacji przyjmuje postać:

$$\int_0^\infty \frac{\bar{c}_P(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\, e^{((1-\gamma)m-\rho)t}dt \to \max, \qquad \rho-(1-\gamma)m>0, \tag{38}$$

przy warunkach:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\bar{k}}{dt}=s_K^P(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h})+s_K^B\tau f(\bar{k},\bar{h})-(n+m+\delta_K)\bar{k},\\
&\frac{d\bar{h}}{dt}=(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h})-\bar{c}_P-s_K^P(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h})+s_H^B\tau f(\bar{k},\bar{h})-(n+m+\delta_H)\bar{h},\\
&\bar{k}(0)=\bar{k}_0,\ \bar{h}(0)=\bar{h}_0,\\
&s_K^P\geqslant 0,\ (1-s_K^P)(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h})-\bar{c}_P\geqslant 0,\ \bar{c}_P\geqslant 0.
\end{aligned} \tag{39}$$

Rolę zmiennych sterujących przypisujemy zmiennym $\bar{c}_P(t)$ i $s_K^P(t)$[23].

prywatnych określone przez (36) znajdują się poza obszarem dopuszczalnym. Aby formalnie rozpatrzyć sytuacje, kiedy podane warunki nie są spełnione, należałoby sformułować warunki optymalności Kuhna-Tuckera w kategoriach funkcji Lagrange'a. Mając w pamięci wnioski dotyczące rozwiązania zadania na optymalizację warunkową stóp inwestycji budżetowych (przy danych egzogenicznie stopach inwestycji prywatnych), intuicyjnie oczywiste jest twierdzenie, że w aktualnie rozważanym problemie szansa na osiągnięcie przez gospodarkę optymalnych (tzn. maksymalizujących funkcjonał celu (21)) społecznych stóp inwestycji jest tym większa, im mniejsza część dochodu jest redystrybuowana przez budżet.

[23] Ograniczenia zapisane w ostatnim wierszu (39) odpowiadają warunkom nakładanym na stopy inwestycji prywatnych, odpowiednio, $s_K^P\geqslant 0$, $s_H^P\geqslant 0$, $s_K^P+s_H^P\leqslant 1$; por. przypis 19.

Hamiltonian wartości bieżącej w tym problemie ma postać następującą:

$$H=\frac{\bar{c}_P(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}+\theta_K\big[\big(s^P_K(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h})+s^B_K\tau f(\bar{k},\bar{h})-(n+m+\delta_K)\bar{k}\big]+$$

$$+\theta_H\big[(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h})-\bar{c}_P-s^P_K(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h})+s^B_H\tau f(\bar{k},\bar{h})-(n+m+\delta_H)\bar{h}\big],$$

gdzie: $\theta_K=\lambda_K e^{(\rho-(1-\gamma)m)t}$ i $\theta_H=\lambda_H e^{(\rho-(1-\gamma)m)t}$, są mnożnikami Lagrange'a wartości bieżącej, pierwszy warunek zaś zasady maksimum przybiera postać: $\frac{\partial H}{\partial \bar{c}}=\bar{c}_P(t)^{-\gamma}-\theta_H=0.$

Rozumowanie analogiczne do przeprowadzonego dla problemu (21)–(22), prowadzi do wniosku, że:

$$\theta_K(t)=\theta_H(t)=\bar{c}_P(t)^{-\gamma}, \tag{40}$$

skąd wynika, że wartość zmiennej $s^P_K(t)$ nie wpływa na wartość hamiltonianu, co eliminuje konieczność zapisywania warunku na maksymalizację hamiltonianu względem tej zmiennej.

Pozostałe warunki maksymalizacji funkcjonału celu są następujące:

$$\frac{d\bar{k}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \theta_K}=s^P_K(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h})+s^B_K\tau f(\bar{k},\bar{h})-(n+m+\delta_K)\bar{k},$$

$$\frac{d\bar{h}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \theta_H}=(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h})-\bar{c}-s^P_K(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h})+s^B_K\tau f(\bar{k},\bar{h})-(n+m+\delta_H)\bar{h}, \tag{41}$$

$$\frac{d\theta_K}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \bar{k}}+\theta_K\big(\rho-(1-\gamma)m\big)=$$

$$=-\theta_K\left(\big(s^P_K(1-\tau)+s^B_K\tau\big)\frac{\partial f(\bar{k},\bar{h})}{\partial \bar{k}}-\big(n+m+\delta_K+\rho-(1-\gamma)m\big)\right)-$$

$$-\theta_H\big((1-\tau)-s^P_K(1-\tau)+s^B_K\tau\big)\frac{\partial f(\bar{k},\bar{h})}{\partial \bar{k}},$$

$$\frac{d\theta_H}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \bar{h}}+\theta_H\big(\rho-(1-\gamma)m\big)= \tag{42}$$

$$=-\theta_H\left(\big((1-\tau)-s^P_K(1-\tau)+s^B_K\tau\big)\frac{\partial f(\bar{k},\bar{h})}{\partial \bar{h}}-\big(n+m+\delta_H+\rho-(1-\gamma)m\big)\right)-$$

$$-\theta_K\big(s^P_K(1-\tau)+s^B_K\tau\big)\frac{\partial f(\bar{k},\bar{h})}{\partial \bar{h}},$$

warunki transwersalności zaś są powtórzeniem (30)–(31).

Podstawiając (40) oraz: $\frac{d\theta_K}{dt}=\frac{d\theta_K}{dt}=-\gamma\bar{c}_P(t)^{-\gamma-1}\frac{d\bar{c}_P}{dt}$ do (42), po kilku prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{c}_P}{dt}&=\frac{1}{\gamma}\bar{c}_P(t)\left(\frac{\partial f(\bar{k},\bar{h})}{\partial\bar{k}}-(1-s_K^B-s_H^B)\tau\frac{\partial f(\bar{k},\bar{h})}{\partial\bar{k}}-(n+m+\delta_K+\rho-(1-\gamma)m)\right),\\ \frac{d\bar{c}_P}{dt}&=\frac{1}{\gamma}\bar{c}_P(t)\left(\frac{\partial f(\bar{k},\bar{h})}{\partial\bar{h}}-(1-s_K^B-s_H^B)\tau\frac{\partial f(\bar{k},\bar{h})}{\partial\bar{h}}-(n+m+\delta_H+\rho-(1-\gamma)m)\right).\end{aligned}\tag{43}$$

Dynamikę systemu charakteryzuje układ równań różniczkowych (41), (43). Wartości $\bar{k}_e$, $\bar{h}_e$ oraz s_K^{P***} i s_H^{P***}, będące rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{aligned}s_K^P(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h})+s_K^B\tau f(\bar{k},\bar{h})&=(n+m+\delta_K)\bar{k},\\ s_H^P(1-\tau)f(\bar{k},\bar{h})+s_H^B\tau f(\bar{k},\bar{h})&=(n+m+\delta_H)\bar{h},\end{aligned}\tag{44}$$

$$\begin{aligned}\left(1-(1-s_K^B-s_H^B)\tau\right)\frac{\partial f(\bar{k},\bar{h})}{\partial\bar{k}}&=n+m+\delta_K+\rho-(1-\gamma)m,\\ \left(1-(1-s_K^B-s_H^B)\tau\right)\frac{\partial f(\bar{k},\bar{h})}{\partial\bar{h}}&=n+m+\delta_H+\rho-(1-\gamma)m,\end{aligned}\tag{34}$$

charakteryzują długookresową równowagę dynamiczną systemu[24].

Zbieżność gospodarki do stanu równowagi długookresowej jest formalnie zagwarantowana przez warunki transwersalności.

Z warunków równowagi długookresowej (44)–(45), zależności (5) oraz definicji (10) wyznaczamy długookresowe optymalne społeczne stopy inwestycji:

$$\begin{aligned}s_K^{***}&=\alpha\frac{(m+n+\delta_K)\left(1-(1-s_K^B-s_H^B)\tau\right)}{\rho+n+\delta_K+\gamma m}=s_K^{**}\left(1-(1-s_K^B-s_H^B)\tau\right),\\ s_H^{***}&=\beta\frac{(m+n+\delta_H)\left(1-(1-s_K^B-s_H^B)\tau\right)}{\rho+n+\delta_H+\gamma m}=s_H^{**}\left(1-(1-s_K^B-s_H^B)\tau\right),\end{aligned}\tag{46}$$

gdzie s_K^{**}, s_H^{**} oznaczają społeczne stopy inwestycji dane przez (35). Ze wzorów (46) wynika, iż dla dowolnego dodatniego τ (przy ustalonych pozostałych parametrach i $0\leqslant s_K^B+s_H^B<1$) zachodzą zależności: $s_K^{***}<s_K^{**}$ i $s_H^{***}<s_H^{**}$, oraz s_K^{***}, s_H^{**}, są tym niższe, im wyższe jest τ (przy ustalonych s_K^B, s_H^B), oraz tym wyższe,

[24] W drugim równaniu (44) skorzystaliśmy z zależności (37) oraz (5).

im wyższe są s_K^B i s_H^B (przy ustalonym τ). Jednocześnie przy $s_K^B + s_H^B = 1$ zachodzi: $s_K^{***} = s_K^{**}$ oraz $s_H^{***} = s_H^{**}$, bez względu na poziom τ[25].

W porównaniu z sytuacją, gdy w funkcjonale celu typowego podmiotu ekonomicznego znajduje się całość konsumpcji społecznej *per capita*, wyniki otrzymane w ostatniej wersji modelu można podsumować następująco:

– jeśli podmioty biorą pod uwagę tylko konsumpcję prywatną, to wzrost stopy redystrybucji τ powoduje spadek społecznych stóp inwestycji w gospodarce, zarówno w kapitał rzeczowy, jak i ludzki, o ile tylko dochody budżetowe nie są w całości wydawane na inwestycje budżetowe;

– przy danym poziomie stopy redystrybucji, wzrost stopy inwestycji budżetowych w którykolwiek rodzaj kapitału, powoduje wzrost społecznych stóp inwestycji jednocześnie w oba rodzaje kapitału, a efekt ten jest tym silniejszy, im wyższa jest stopa redystrybucji dochodów przez budżet.

Obie rozpatrzone tu sytuacje należy traktować jako przypadki krańcowe. Siła wpływu stóp inwestycji budżetowych na ścieżkę wzrostu równomiernego podlega zatem relatywizacji w zależności od stopnia, w jakim podmioty prywatne faktycznie biorą pod uwagę poziom konsumpcji budżetowej w swoich wyborach dotyczących podziału rozporządzalnych dochodów pomiędzy bieżące zaspokajanie potrzeb konsumpcyjnych i akumulację kapitału rzeczowego i ludzkiego.

mgr Piotr Pietraszewski
Wyższa Szkoła Bankowa w Poznaniu

ANALYSIS OF THE POSSIBILITY OF GOVERNMENT INFLUENCE ON THE ECONOMIC GROWTH IN THE CONTEXT OF THE MAXIMALISATION OF WELFARE

Summary

The subject of this paper is an analysis of the possibility of a government to influence the economic growth through a fiscal policy, in the extended framework of a neoclassical model of economic growth (with the accumulation of human capital). This model implies no relation between social rates of investments in real and human capital and a long-term growth rate. It limits the possibility of potential stimulating of the rate of growth by economic authorities only to the transitory period, during which the economy moves from one balanced growth path to another. However, since the positive influence of the accelerated accumulation of capital on the level of the long-term growth path of the *per capita* product does not have to entail the increase of social welfare (measured by the

---

[25] Ze względu na ograniczenia nałożone na stopy inwestycji prywatnych s_K^P, s_H^P (patrz przypis 23), ściśle rzecz biorąc, formuły podane w (46) wyznaczają optymalne społeczne stopy inwestycji tak długo, jak długo stopy inwestycji budżetowych i stopa redystrybucji ustalone przez państwo spełniają warunki: $s_K^B \leqslant \frac{s_K^{***}}{\tau}$, $s_H^B \leqslant \frac{s_H^{***}}{\tau}$ oraz , $s_K^B + s_H^B \geqslant \frac{s_K^{***} + s_H^{***} - (1-\tau)}{\tau}$, gdzie s_K^{***} i s_H^{***} są określone przez (46). Aby formalnie rozpatrzyć sytuacje, kiedy podane warunki nie są spełnione, należałoby sformułować warunki optymalności Kuhna-Tuckera w kategoriach funkcji Lagrange'a; por. przypis 22.

level of social *per capita* consumption), we raise a question about the optimal structure of budget expenses in the division into public investments in real and human capital and consumption, corresponding to a given structure of private sector expenses. Next we reject the assumption about the exogenously given structure of expenses of private agents which means, *inter alia*, the absence of reaction of these agents to changes in the fiscal policy of the government. The endogenous derivation of the division of private incomes for investments and consumption from explicitly described preferences of agents over (*per capita*) consumption streams may lead to the conclusion suggesting total neutrality of the fiscal policy with regards to its influence on economic growth. At the last stage of the analysis we demonstrate that this conclusion is becoming relativised, depending on the extent to which private agents take into account the level of public consumption in their optimising decisions.