RUCH PRAWNICZY, EKONOMICZNY I SOCJOLOGICZNY
Rok XLVI — zeszyt 4 — 1984

EMIL PANEK

MAKROEKONOMICZNE PROBLEMY STEROWANIA OPTYMALNEGO W MATEMATYCZNEJ TEORII WZROSTU

I. STEROWANIE OPTYMALNE. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

W pracy przedstawiamy trzy zadania sterowania optymalnego wzrostem w jednosektorowej gospodarce z dwuczynnikową funkcją produkcji Cobba-Douglasa różniące się założeniami wzrostu dochodu narodowego i konsumpcji. Kryterium wzrostu w pierwszych dwóch zadaniach jest maksymalizacja konsumpcji w pewnym, ustalonym okresie. W trzecim zadaniu za kryterium wzrostu przyjęliśmy czas potrzebny gospodarce na osiągnięcie założonego, docelowego poziomu produkcji dóbr konsumpcyjnych. Uwzględniamy w nim poza tym określone warunki eliminujące „skoki" w podziale dochodu narodowego ujawnione w rozwiązaniach poprzednich zadań. Na marginesie otrzymanych rozwiązań dzielimy się spostrzeżeniami dotyczącymi pewnych ogólnych — jak się wydaje — prawidłowości, którym są podporządkowane optymalne procesy wzrostu w długich okresach.

Oznaczenia: R^n — przestrzeń Euklidesa n-wymiarowa (R^1 — oś liczbowa rzeczywista); $T=[t_0, t_1]$ — przedział czasu domknięty w R^1 (horyzont czasu); $C_n^i[T]$ — klasa ciągłych wraz z i-tą pochodną funkcji wektorowych $f: T \to R^n$; ($C^0[T]=C_1^0[T]$ — klasa ciągłych funkcji wektorowych $f: T \to R^1$); $\tilde{C}_n^0[T]$ — klasa przynajmniej przedziałami ciągłych funkcji wektorowych $f: T \to R^n$ co najwyżej o skończonej liczbie punktów nieciągłości pierwszego rodzaju wewnątrz przedziału T, w punktach nieciągłości ciągłych prawostronnie ($\tilde{C}^0[T]=\tilde{C}_1^0[T]$).

Zakładamy, że:

(i) Funkcjonowanie gładkiego systemu dynamicznego w horyzoncie czasu T opisuje równanie różniczkowe wektorowe

$$\dot{x}(t)=f(x(t), u(t), t), \tag{1}$$

w którym $f=(f_1, \ldots, f_n)$, $x(t)=(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $u(t)=(u_1(t), \ldots, u_m(t))$,

$$u(t)\in U \subset R^m, \quad u\in \tilde{C}_m^0[T] \tag{2}$$

oraz f, $\partial f_i/\partial x \in C^0[R^n \times U \times T]$. Zbiór U nazywamy zbiorem dopuszczalnych wartości sterowań, a każdą funkcję $u: T \to U$ z klasy $\tilde{C}^0_m[T]$ — trajektorią sterowań lub krótko sterowaniem (na T). W zależności od typu zadania moment końcowy t_1 horyzontu T może być ustalony lub nie.

(ii) Ustalone są: stan początkowy x^0, w którym system znajduje się w momencie początkowym t_0:

$$x(t_0)=x^0 \tag{3}$$

oraz niepusty podzbiór stanów docelowych $X \subseteq R^n$, do którego powinien „przejść" system ze stanu początkowego x^0. Zbiór stanów docelowych z założenia jest gładką rozmaitością w R^n, tzn. $X=\{x \in R^n : p(x)=0\}$, gdzie $p(\cdot)=(p_1(\cdot), \ldots, p_k(\cdot))$ jest pewną gładką (ciągłą wraz ze wszystkimi pochodnymi cząstkowymi) funkcją k-wektorową ($k \leqslant n$) z wektorami $\partial p_i(x)/\partial x$ ($i=1, 2, \ldots, k$) liniowo niezależnymi w każdym punkcie $x \in X$. Rozwiązanie $x: T \to R^n$ równania (1) z warunkiem początkowym (3) odpowiadające takiemu sterowaniu $u: T \to U$ z klasy $C^0_m[T]$, że[1]

$$x(t_1) \in X \tag{4}$$

nazywamy dopuszczalną trajektorią stanów systemu (na T). W dalszym ciągu dane na T sterowanie i odpowiadającą mu trajektorię etanów oznaczamy krótko przez u_T, x_T. Parę $(u, x_T$ spełniającą układ warunków (1)-(4) nazywamy dopuszczalnym procesem sterowania.

(iii) Ustalony jest wskaźnik jakości funkcjonowania systemu w postaci funkcjonału całkowego

$$\Phi[(u, x)_T] = \int_T f_0(x(t), u(t), t)\, dt \tag{5}$$

określonego na wiązce wszystkich dopuszczalnych procesów sterowania. O funkcji podcałkowej w (5) zakładamy, że ma te same własności, co funkcje f_i w (1). Zadaniem sterowania optymalnego nazywamy zadanie wyboru z wiązki dopuszczalnych procesów sterowania procesu maksymalizującego wartość funkcjonału (5). Zapisujemy je następująco:

$$\max \int_T f_0(x(t), u(t), t)\, dt \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \dot{x}(t)=f(x(t), u(t), t) \\ u(t) \in U, \quad u \in \tilde{C}^0_m[T] \\ x(t_0)=x^0, \quad x(t_1) \in X. \end{gathered} \tag{7}$$

Proces $(u^*, x^*)_T$ będący rozwiązaniem tego zadania nazywamy optymalnym procesem sterowania, u_T — sterowaniem opty-

[1] Rozwiązanie równania różniczkowego pojmujemy w sensie całkowym.

malnym, x^*_T — optymalną trajektorią stanów systemu. Jeżeli $X=R^n$ i moment korcowy t_1 horyzontu T w zadaniu (6) -.(7) jest ustalony, wówczas otrzymujemy zadanie sterowania optymalnego z kryterium całkowym i tzw. swobodnym prawym końcem trajektorii. Natomiast przyjmując $f_0 \equiv -1$ i nakładając, że moment t_1 w zadaniu tym jest nieustalony (zmienna decyzyjna zadania) — dochodzimy do tzw. zadania minimalnoczasowego

min t_1
przy warunkach (7).

II. RÓWNOWAGA

W technice powszechnie przyjęto następującą definicję stanu równowagi: stanem równowagi nazywamy taki stan systemu $\bar{x}$, w którym pozostaje on dowolnie długo przy zerowym impulsie wejściowym (sterowaniu). W systemach, których funkcjonowanie opisują równania różniczkowe typu (1) oznacza to, że w stanie równowagi powinien być spełniony warunek:

$$f(\bar{x}, 0, t)=0 \quad \text{dla dowolnego } t \geqslant t_0. \tag{8}$$

Warunek ten spełniają najczęściej tylko systemy stacjonarne (których funkcjonowanie opisują równania typu (1) z prawą stroną jawnie niezależną od zmiennej czasu t). W pozostałych przypadkach (systemów stacjonarnych, których funkcjonowanie opisują równania typu (1) z prawą stroną jawnie zależną od zmiennej czasu *t)* warunek (8) jest z reguły sprzeczny.

W ekonomii matematycznej idea takiej równowagi „statycznej" przewija się m.in. w teorii równowagi ogólnej L. Walrasa i oparta jest na hipotezie, że istnieją gospodarki (a) spełniające sformułowany wyżej postulat stacjonarności, (b) mogące funkcjonować w całkowitej izolacji od otaczającego je świata, nie wymagające jakichkolwiek zewnętrznych dopływów energetyczno-informacyjnych (zerowy impuls wejściowy).

Realne gospodarki nie są ani stacjonarne, ani bezwzględnie odosobnione. Niezbędna jest zatem taka definicja, która

— relatywizowałaby pojęcie równowagi nie utożsamiając jej z pojedynczym ,,stanem spoczynku" systemu i nie wykluczając możliwości oddziaływania „z zewnątrz" w celu zainicjowania określonej równowagi,

— stosowałaby się w równej mierze do systemów obu typów (stacjonarnych i niestacjonarnych).

Przyjmując, że przejawem równowagi — tak czy inaczej rozumianej — powinna być niezmienność pewnych charakterystyk systemu, nie wymagamy jednak, by charakterystykę tę tworzył bezwarunkowo jego stan $\bar{x}$ odpowiadający zerowemu sterowaniu, a więc stan równowagi tak rozumiany, jak pojęcia tego używa się w technice. „Niezmiennikami" mogą być — ogólnie ujmując — wartości pewnych funkcji określone na zbiorach stanów i sterowań i opisujące określone własności systemu. Nie musi być nim bezpośrednio stan systemu, lecz np. jego pochodna (wtedy trajektoria stanów w równowadze będzie funkcją liniową) lub suma wartości jego współrzędnych (jeżeli np. współrzędne wektora stanu systemu $x(t)=(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ charakteryzują jego masę rozłożoną w n różnych punktach w momencie t, to równość $\sum_{i=1}^{n} x_i(t)=\text{const}>0$ oznacza, że warunkiem równowagi systemu jest zachowanie masy bez względu na jej rozkład). Jest pożądane, by system w równowadze charakteryzował „regularny" przebieg jego trajektorii, co oznacza ich ciągłość i odpowiednią gładkość (w klasycznej definicji równowagi postulat ten jest spełniony). Myśl tę zawrzemy w poniższej definicji.

Definicja. Będziemy mówić, że system, którego funkcjonowanie opisuje równanie (!) z trajektorią sterowań $\bar{u}_T$ i trajektorią stanów $\bar{x}_T$ znajduje się w horyzoncie T w σ-równowadze, gdzie σ — funkcja, $\sigma: U\times R^n \to R^k$ $\sigma(u, x) \neq \text{const}$ na $U\times R^n$, jeżeli: (i) $\bar{u}\in C^1_m[T]$, $\bar{x}\in C^1_n[T]$, (ii) $\sigma(\bar{u}(t), \bar{x}(t))=\text{const}$ w każdym momencie $t\in T$

Funkcja $\sigma: U\times R^n \to R^k$ jest „miarą" tych charakterystyk systemu, których utrzymanie na określonym poziomie uznaje się za szczególnie pożądane objawy jego równowagi. W praktyce zależy ona od specyfiki problemu, celu badań itp.

III. OPTYMALNY PODZIAŁ DOCHODU W ZAGREGOWANYM MODELU WZROSTU

Ważniejsze oznaczenia: $l(t)$, $z(t)$ — ludność i zatrudnienie w momencie t (zasób, np. w mln osób — L); $m(t)$ — majątek produkcyjny w momoncie t (zasób, wymiar: zł); $i(t)$, $y(t)$, $c(t)$ — inwestycje (brutto), dochód narodowy i konsumpcja w momencie t (strumienie, wymiar: zł/R, R — ustalona jednostka czasu, np. $R=1$ rok); $u(t)=m(t)/z(t)$ — techniczne uzbrojenie pracy w momencie t (wymiar: zł/L); $\gamma(t)=c(t)/l(t)$ — konsumpcja przypadająca średnio na osobę w momencie t (wymiar: zł$/R\cdot L$); $k(t)=m(t)/y(t)$ — kapitałochłonność produkcji w momencie t (wymiar: R); $s(t)=i(t)/y(t)$ — udział inwestycji w dochodzie w momencie t (stopa inwestycji, wielkość niemianowana); $\lambda>0$ — stopa wzrostu ludności (wymiar: $1/R$); ϱ (0, 1) — wskaźnik aktywności zawodowej ludności (wielkość niemianowana); $\mu>0$ — wskaźnik deprecjacji majątku (wymiar: 1/R); $\varepsilon\in$ $\in(0, 1)$ — elastyczność dochodu względem majątku (wielkość niemianowana); $1-\varepsilon$ — elastyczność dochodu względem pracy (zatrudnienia); $\nu>0$ — wskaźnik (czystego) postępu techniczno-organizacyjnego.

1. MODEL WZROSTU. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

Zakładamy, że w horyzoncie T:

(i) Ludność oraz zatrudnienie rosną ze stopą λ:

$$l(t) = l^0 e^{\lambda(t-t_0)}, \tag{9}$$

$$z(t) = \rho l(t). \tag{10}$$

(ii) Wzrost majątku produkcyjnego opisuje równanie

$$\dot{m}(t) = i(t) - \mu m(t) \tag{11}$$

z funkcją $i \in C^0[T]$ i warunkiem początkowym

$$m(t_0) = m^0 > 0. \tag{12}$$

(iii) Strumień dochodu w momencie t zależy od zasobu majątku i zatrudnienia w tym momencie. Zależność tę opisuje dynamiczna (stopnia 1) funkcja produkcji Gobba-Douglasa

$$y(t) = a m^{\varepsilon}(t) z^{1-\varepsilon}(t) e^{\nu(t-t_0)} \tag{13}$$

(a — stała dodatnia).

(iv) Strumień spożycia (konsumpcji) tworzy część dochodu pozostającą po odliczeniu inwestycji

$$c(t) = y(t) - i(t) \quad \big(i(t), c(t) \geqslant 0\big). \tag{14}$$

Przy przyjętych oznaczeniach układ warunków (11)-(14) jest równoważny z następującym:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{u}(t) = a s(t) u^{\varepsilon}(t) e^{\nu(t-t_0)} - (\mu+\lambda) u(t), \\ &s(t) \in [0, 1], \quad s \in \tilde{C}^0[T], \\ &u(t_0) = u^0 \; (= m^0/\rho l^0 > 0), \\ &\gamma(t) = a\rho\big(1 - s(t)\big) u^{\varepsilon}(t) e^{\nu(t-t_0)}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Równoważność rozumiemy w tym sensie, że czwórka $(i, m, y, c)_T$ wtedy i tylko wtedy spełni warunki (11)-(14), gdy układ (15) spełni trójka $(s, m, \gamma)_T : s(t) = i(t)/y(t),\ u(t) = m(t)/z(t),\ \gamma(t) = c(t)/l(t)$.

2. PIERWSZE („KLASYCZNE") ZADANIE STEROWANIA OPTYMALNEGO

1°. Sformułowanie zadania. Rozpatrzmy następujące zadanie maksymalizacji konsumpcji na osobę w ustalonym horyzoncie T:[2]

[2] Rozwiązanie otrzymujemy stosując zespół warunków optymalności znany pod nazwą zasady maksimum Pontriagina. Por. W. G. Bołtiański, *Metody matematyczne sterowania optymalnego,* Warszawa 1970, rozdział IV, twierdzenie 4.10. Podobne zadanie rozpatruje K. Shell, *Optimal programs of capital accumulation for an economy in which there is exogenous technical change,* w: *Esseys on the theory of optimal economic growth,* Cambridge (Mass.), 1967; zob. także L. Stoleru, *Rawnowiesije i ekonomiczeskij rost,* Moskwa 1974, rozdział 12.

$$\max \int_T a\rho(1-s(t))u^\varepsilon(t)e^{\nu(t-t_0)}dt, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}&\dot{u}(t)=as(t)u^\varepsilon(t)e^{\nu(t-t_0)}-(\mu+\lambda)u(t),\\ &s(t)\in[0,1], \quad s\in\tilde{C}^0[T],\\ &u(t_0)=u^0>0.\end{aligned} \tag{17}$$

Parę $(s, u)_T$ spełniającą warunki (17) nazywamy dopuszczalnym procesem wzrostu (w zadaniu (16) - (17)). Proces dopuszczalny $(s^*, u^*)_T$ maksymalizujący wartość funkcjonału (16) nazywamy procesem optymalnym. Funkcję s_T^* nazywamy sterowaniem optymalnym, funkcję u_T^* — optymalną trajektorią technicznego uzbrojenia pracy, a odpowiadające im funkcje γ_T^*, m_T^* itd. — optymalnymi trajektoriami konsumpcji na osobę, majątku itd. Załóżmy, że elastyczność dochodu względem majątku spełnia warunek

$$\tfrac{1}{2}>\varepsilon>\nu/(\mu+\lambda), \tag{18}$$

a początkowe techniczne uzbrojenie pracy jest niskie

$$u^0<[a\varepsilon/(\mu+\lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}, \tag{19}$$

wówczas rozwiązanie zadania (16) - (17) jest następujące [3].

Istnieją takie liczby $\theta_0, \theta_1, \theta_2 > 0$, że:

(i) jeżeli $t_1-t_0 > \theta_1+\theta_2$, to rozwiązaniem zadania jest proces $(s^*, u^*)_T$;

$$s^*(t)=\begin{cases}1 & \text{dla } t\in[t_0, \tau_1),\\ \tilde{s} & \text{dla } t\in[\tau_1, \tau_2),\\ 0 & \text{dla } t\in[\tau_2, t_1],\end{cases}$$

$$u^*(t)=\begin{cases}\{[(u^0)^{1-\varepsilon}-ad]e^{-(\mu+\lambda)(1-\varepsilon)(t-t_0)}+ade^{\nu(t-t_0)}\}^{1/(1-\varepsilon)} & \text{dla } t\in[t_0, \tau_1],\\ u^*(\tau_1)e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-\tau_1)} & \text{dla } t\in[\tau_1, \tau_2],\\ u^*(\tau_2)e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau_2)} & \text{dla } t\in[\tau_2, t_1],\end{cases}$$

gdzie: $\tau_1=t_0+\theta_1$, $\tau_2=t_1-\theta_2$, $\tilde{s}=\varepsilon[1+\nu/(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)]\in(0, 1)$, $d=(1-\varepsilon)/[\nu+(1-\varepsilon)(\mu\times\lambda)]$,

(ii) jeżeli $\theta_1+\theta_2\geqslant t_1-t_0>\theta_0$, to $t_0<\tau_1=\tau_2=\tau<t_1$ i rozwiązaniem zadania jest (proces $(s^*, u^*)_T$:

$$s^*(t)=\begin{cases}1 & \text{dla } t\in[t_0, \tau),\\ 0 & \text{dla } t\in[\tau, t_1],\end{cases}$$

[3] Objętość pracy nie pozwala na przedstawienie rozwiązania w przypadku, gdy nie są spełnione wymienione założenia. Ograniczamy się tutaj do takiej praktycznie ciekawej sytuacji, w której gospodarka nie osiągnęła jeszcze zbyt wysokiego poziomu technicznego uzbrojenia pracy, a poza tym jest „czulsza" na zmiany zasobów pracy niż majątku.

$$u^*(t)=\begin{cases}\{[(u^0)^{1-\varepsilon}-ad]e^{-(\mu-\lambda)(1-\varepsilon)(t-t_0)}+ade^{\nu(t-t_0)}\}^{1/(1-\varepsilon)} & \text{dla } t\in[t_0,\tau),\\ u^*(\tau)e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau)} & \text{dla } t\in[\tau,t_1],\end{cases}$$

gdzie $\tau=t_1-\theta_0$;

(iii) jeżeli $t_1-t_0\leqslant\theta_0$, to optymalny proces wzrostu redukuje się do postaci:

$$s^*(t)=0,\quad u^*(t)=u^0e^{-(\mu+\lambda)(t-t_0)}$$

w każdym momencie $t\in T$.

Postać rozwiązania zależy od długości horyzontu T. Jeżeli jest on krótki, to optymalny proces wzrostu charakteryzuje się zerowymi inwestycjami i ujemnymi stopami wzrostu wszystkich pozostałych trajektorii. Jeżeli horyzont *jest* średniej długości, to pojawiają się dwie fazy wzrostu. W fazie początkowej (inwestycyjnej) cały dochód zostaje przeznaczony na inwestycje (zerowa konsumpcja), szybko rośnie majątek, dochód i techniczne uzbrojenie pracy. W fazie drugiej (konsumpcyjnej) całkowicie zostają wstrzymane inwestycje, cały dochód idzie na spożycie, wskutek czego majątek i dochód kurczą się. Wreszcie, jeżeli horyzont jest długi, to pojawiają się trzy fazy wzrostu: początkowa — inwestycyjna, środkowa — równomiernego wzrostu i końcowa — konsumpcyjna. W fazie środkowej obserwujemy umiarkowany wzrost majątku, dochodu, konsumpcji i technicznego uzbrojenia pracy. Faza ta jest tym dłuższa, im dłuższy jest horyzont T.

2°. Równowaga i stabilność optymalnych procesów wzrostu. Jeżeli gospodarka, w której wzrost technicznego uzbrojenia pracy opisuje równanie różniczkowe w (17), miałaby znajdować się w stanie równowagi w jej klasycznym rozumieniu, to powinna osiągnąć taki poziom technicznego uzbrojenia pracy $\bar{u}$, by spełniony był warunek: $-(\mu+\lambda)\bar{u}=0$ (zob. pkt 2). Warunek ten zachodzi — oczywiście — tylko wtedy, gdy $\bar{u}=0$ (zerowe techniczne uzbrojenie pracy, a tym samym zerowy majątek, dochód, konsumpcja itd.). Równowaga taka nie może mieć miejsca, praktycznie bowiem oznaczałaby unicestwienie gospodarki.

Rozpatrzmy zatem procesy w σ-równowadze (w sensie definicji równowagi sformułowanej w pkt 2) ze stałymi stopami wzrostu technicznego uzbrojenia pracy i konsumpcji na osobę, a więc procesy dla których:

$$\sigma(s(t),u(t))=(\dot{u}(t)/u(t),\dot{\gamma}(t)/\gamma(t))=\text{const}>0,$$

gdzie $\gamma(t)=a\rho(1-s(t))u^{\varepsilon}(t)\exp\{(\nu t-t_0)\}$. Będą to procesy $(s,u)_T$ spełniające równanie różniczkowe w układzie (17) z dowolnym warunkiem początkowym $u^0>0$ i sterowaniem $s\in C^1[T]$ z wartościami w [0, 1], w których $u(t)=u^0\exp\{\alpha(t-t_0)\}$ i odpowiada im trajektoria konsumpcji na osobę $\gamma(t)=\gamma^0\exp\{\beta(t-t_0)\}$, gdzie γ^0, α, β są pewnymi liczbami dodatnimi. Procesów takich jest nieskończenie wiele, przy czym okazuje się, że: (a) w każdym takim procesie stopa wzrostu technicznego uzbrojenia pracy i konsumpcji na osobę $\alpha=\beta=\nu/(1-\varepsilon)$, (b) trajektorie związane są warunkami:

$$y^0=a\rho(u^0)^\varepsilon-\rho\left[\frac{\nu}{1-\varepsilon}+\mu+\lambda\right]u^0,\ s(t)=\Sigma_{(u^0)},$$

gdzie

$$\Sigma_{(u^0)}=a^{-1}[\nu/(1-\varepsilon)+\mu+\lambda](u^0)^{1-\varepsilon}=\text{const}\in(0,1).$$

Procesy spełniające warunki (a), (b) nazywamy procesami równomiernego wzrostu. Widzimy, że różne strategie akumulacji prowadzą do równomiernego wzrostu technicznego uzbrojenia pracy i konsumpcji na osobę ze stałą stopą $\nu/(1-\varepsilon)$ (lecz na różnych poziomach). Majątek produkcyjny, dochód i konsumpcja rosną w procesie równomiernego wzrostu odpowiednio szybciej (ze stopą $\nu/(1-\varepsilon)+\lambda$). Z tą samą stopą rośnie także część dochodu pozostająca po odliczeniu inwestycji na odtworzenie zużywającego się majątku i jego wzrost ma stopę równą stopie wzrostu ludności: $y(t)-(\mu+\lambda)\,m(t)$ (innymi słowy — część dochodu po odliczeniu inwestycji, które są niezbędne dla przeciwdziałania spadkowi technicznego uzbrojenia pracy).

Wśród procesów równomiernego wzrostu istnieje jednak tylko jeden proces, któremu w każdym momencie $t\in T$ odpowiada maksymalna wielkość owej „nadwyżki", tzn. taki proces $(s,\tilde{u})_T$, że każda trajektoria majątku i odpowiadająca jej trajektoria dochodu m_T, y_T w procesie równomiernego wzrostu w dowolnym momencie $t\in T$ spełniają warunek:

$$\tilde{y}(t)-(\mu+\lambda)\tilde{m}(t)\geqslant y(t)-(\mu+\lambda)m(t),$$

gdzie $\tilde{m}(t)=z(t)\tilde{u}(t)$, $\tilde{y}(t)=a\tilde{m}^\varepsilon(t)z^{1-\varepsilon}(t)\exp\{\nu(t-t_0)\}$
Proces ten i odpowiadająca mu trajektoria konsumpcji na osobę mają następującą postać:

$$\tilde{s}(t)=\varepsilon[1+\nu/(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)]\in(0,1),$$

$$\tilde{u}(t)=\tilde{u}^0e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-t_0)},$$

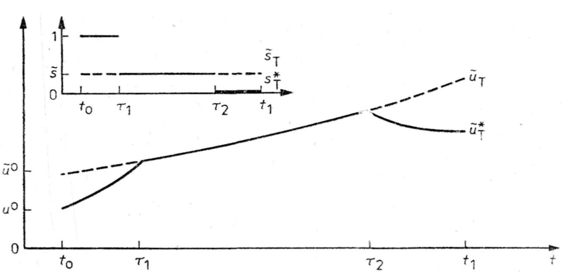
$$\tilde{\gamma}(t)=\tilde{\gamma}^0e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-t_0)}$$

w każdym momencie $t\in T$, gdzie $\tilde{u}^0=[a\varepsilon/(\mu+\lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$, $\tilde{\gamma}^0=a\rho(1-\tilde{s})(\tilde{u}^0)^\varepsilon$. Nazywamy go procesem maksymalnego równomiernego wzrostu. Interesującą interpretację ma proces maksymalnego równomiernego wzrostu w przypadku statycznej funkcji produkcji Cobba-Douglasa (ze wskaźnikiem postępu techniczno-organizacyjnego $\nu=0$). Techniczne uzbrojenie pracy i konsumpcja na osobę „rosną" w takim procesie z zerową stopą: $\tilde{s}(t)=\varepsilon$, $\tilde{u}(t)=\tilde{u}^0$ $(=[a\varepsilon/(\mu+\lambda)]^{1/(1-\varepsilon)})$, $\tilde{\gamma}(t)=\tilde{\gamma}^0=a\rho(1-\varepsilon)(\tilde{u}^0)^\varepsilon$, w każdym momencie $t\in T$ (majątek, dochód i konsumpcja rosną ze stopą λ), a cała nadwyżka dochodu ponad tę jego część, która skierowana zostaje na inwestycje utrzymujące techniczne uzbrojenie pracy na stałym poziomie $\tilde{u}^0$ przeznaczona zostaje na konsumpcję. Reguła akumulacji w procesie maksymalnego równomiernego wzrostu prowadzi zatem do maksymalizacji konsumpcji (tym samym także konsumpcji na osobę) w każdym momencie $t \in T$ na wiązce wszystkich procesów równomiernego wzrostu[4].

Siedząc optymalny proces wzrostu (rozwiązanie zadania (16) - (17)) W długim horyzoncie T stwierdzamy, że w procesie tym trajektoria technicznego uzbrojenia pracy najpierw (w fazie początkowej) „dochodzi" do trajektorii $\tilde{u}_T$ w procesie maksymalnego równomiernego wzrostu, „leży" na tej trajektorii w fazie środkowej, a następnie „wychodzi" z niej w końcowej fazie wzrostu. Innymi słowy, obserwujemy lokalną zbieżność optymalnej trajektorii technicznego uzbrojenia pracy z trajektorią $\tilde{u}_T$ w procesie maksymalnego równomiernego wzrostu. Trajektoria $\tilde{u}_T$ jest jak gdyby swoistną „magistralą", po której w środkowej fazie wzrostu rozwija się gospodarka. Im dłuższy jest horyzont T, tym dłuższy jest pobyt gospodarki na „magistrali". Dokładniej: istnieje taka liczba $\theta > 0$, że jeżeli $t_1 - t_0 > 2\theta$, to

$$u^*(t) = \tilde{u}(t)$$

w każdym momencie $t \in [t_0 + \theta, t_1 - \theta]$ (ryc. 1). Podobne własności mają także pozostałe optymalne trajektorie wzrostu.



Ryc. 1. Optymalna trajektoria technicznego uzbrajania pracy u^*_T (rozwiązanie zadania (16) - - (17)) i „magistrala" $\tilde{u}_T$

3. DRUGIE ZADANIE STEROWANIA OPTYMALNEGO

1°. Sformułowanie zadania. W realnej gospodarce niemożliwe jest ani całkowite wstrzymanie konsumpcji, ani inwestycji. Tymczasem w rozwiązaniu poprzedniego zadania przynajmniej jedna z tych ewentualności zachodziła zawsze, niezależnie od długości horyzontu T.

[4] Por. E, Phelps, *Golden rules of economic growth,* Amsterdam 1967. Phelps nazywa tę regułę *złotą regułą akumulacji.* Stopa $\tilde{s} = \varepsilon$ bywa nazywana *złotą stopą akumulacji.*

Obserwujemy poza tym spadek technicznego uzbrojenia pracy w konsumpcyjnej fazie wzrostu, który — choć możliwy — w praktyce jest niepożądany. Wykluczymy obecnie te zjawiska i prześledzimy procesy wzrostu, w których (a) udział konsumpcji w dochodzie nie spada poniżej pewnego ustalonego poziomu $\delta^0>0$, (b) techniczne uzbrojenie pracy nie maleje, (c) zmaksymalizowana zastaje „nadwyżka" konsumpcji na osobę ponad jej minimalny udział w dochodzie. Warunek (a) oznacza, że $c(t)\geqslant\delta^0 y(t)$, a tym samym $\gamma(t)\geqslant\delta^0\varrho a u^\varepsilon(t)\exp\{\nu(t-t_0)\}$ w każdym momencie $t\in T$. Warunek (b) oznacza, że $\dot{u}(t)\geqslant 0$ w każdym momencie $t\in T$. „Nadwyżka", o której mowa w ((c), wynosi $\gamma(t)-\delta^0\varrho a u^\varepsilon(t)\exp\{\nu(t-t_0)\}$

Uwzględniając warunki (17) otrzymujemy zadanie następujące:

$$\max\int_T[\gamma(t)-\delta^0\rho a u^\varepsilon(t)e^{\nu(t-t_0)}]\,dt, \tag{20}$$

$$\begin{aligned}&\dot{u}(t)=as(t)u^\varepsilon(t)e^{\nu(t-t_0)}-(\mu+\lambda)u(t),\\ &s(t)\in[0,1], \quad s\in\tilde{C}^0[T],\\ &\dot{u}(t)\geqslant 0, \quad \gamma(t)\geqslant\delta^0\rho a u^\varepsilon(t)e^{\nu(t-t_0)},\\ &u(t_0)=u^0>0,\end{aligned} \tag{21}$$

gdzie $\gamma(t)=a\varrho(1-s(t))u^\varepsilon(t)\exp\{\nu(t-t_0)\}$. Aby uprościć dalsze wywody, założymy, podobnie jak w punkcie 3.2, że początkowe techniczne uzbrojenie pracy jest niskie:

$$u^0<\tilde{u}^0=[a\varepsilon(1-\delta^0)/(\mu+\lambda)]^{1/(1-\varepsilon)} \tag{22}$$

(warunek ten przy $\delta^0=0$ jest równoważny z (18)). Można wykazać, że przy założeniach (19), (22) zadanie (20) - (21) jest równoważne z następującym:

$$\max\int_T\rho(1-\alpha(t))[(1-\delta^0)au^\varepsilon(t)e^{\nu(t-t_0)}-(\mu+\lambda)u(t)]\,dt, \tag{20'}$$

$$\begin{aligned}&\dot{u}(t)=\alpha(t)[(1-\delta^0)au^\varepsilon(t)e^{\nu(t-t_0)}-(\mu+\lambda)u(t)],\\ &\alpha(t)\in[0,1], \quad \alpha\in\tilde{C}^0[T],\\ &u(t_0)=u^0>0.\end{aligned} \tag{21'}$$

Równoważność rozumiemy w tym sensie, że proces $(\alpha^*, u^*)_T$ wtedy i tylko wtedy będzie rozwiązaniem zadania (20')-(21'), gdy rozwiązaniem zadania (20)-(21) będzie proces $(s^*,u^*)_T$, gdzie $s^*(t)=(1-\alpha^*(t))\,(\mu+\lambda)^{a^{-1}}\times(u^*(t))^{1-\varepsilon}\exp\{-\nu(t-t_0)\}+\alpha^*(t)\,(1-\delta^0)$. Przy założeniu, że spełnione są warunki (19), (22) rozwiązanie zadania (20')-(21') jest następujące [5].

[5] Rozwiązanie tego zadania, podobnie jak rozwiązanie zadania (16) - (17), możemy otrzymać korzystając z pracy: W, G. Bołtiański, *Metody matematyczne,* twierdzenie 4.10.

istnieją takie liczby $\theta_0, \theta_1, \theta_2 > 0$, że (i) jeżeli $t_1 - t_0 > \theta_1 + \theta_2$, to rozwiązaniem zadania jest proces $(\alpha^*, u^*)_T$:

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad t \in [t_0, \tau_1), \\ \tilde{\alpha} & \text{dla} \quad t \in [\tau_1, \tau_2), \\ 0 & \text{dla} \quad t \in [\tau_2, t_1] \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} \left\{(1-\delta^0)\left[\left(\dfrac{(u^0)^{1-\varepsilon}}{1-\delta^0} - c\right)e^{-(\mu+\lambda)(1-\varepsilon)(t-t_0)} + ce^{\nu(t-t_0)}\right]\right\}^{1/(1-\varepsilon)} & \\ \qquad\qquad \text{dla} \quad t \in [t_0, \tau_1), \\ u^*(\tau_1)\, e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-\tau_1)} \quad \text{dla} \quad t \in [\tau_1, \tau_2), \\ u^*(\tau_2) \quad \text{dla} \quad t \in [\tau_2, t_1], \end{cases}$$

gdzie $\tau_1 = t_0 + \theta_1$, $\tau_2 = t_1 - \theta_2$, $c = a(1-\varepsilon)/[\nu + (\mu+\lambda)(1-\varepsilon)]$, $\tilde{\alpha} = \nu\varepsilon/(\mu+\lambda)(1-\varepsilon)^2 \in$ $\in (0, 1)$,

(ii) jeżeli $\theta_1 + \theta_2 \geqslant t_1 - t_0 > \theta_0$, to $t_0 < \tau_1 = \tau_2 = \tau < t_1$ i rozwiązaniem zadania jest proces następującej postaci:

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad t \in [t_0, \tau), \\ 0 & \text{dla} \quad t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} \left\{(1-\delta^0)\left[\left(\dfrac{(u^0)^{1-\varepsilon}}{1-\delta^0} - c\right)e^{-(\mu+\lambda)(1-\varepsilon)(t-t_0)} + ce^{\nu(t-t_0)}\right]\right\}^{1/(1-\varepsilon)} & \\ \qquad\qquad \text{dla} \quad t \in [t_0, \tau), \\ u^*(\tau) \quad \text{dla} \quad t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

gdzie $\tau = t_1 - \theta_0$;

(iii) jeżeli $t_1 - t \leqslant \theta_0$, to optymalny proces wzrostu redukuje się do postaci:

$$\alpha^*(t) = 0, \qquad u^*(t) = u^0$$

w każdym momencie $t \in T$

Podobnie, jak w poprzednim zadaniu, również obecnie postać rozwiązania zależy od długości horyzontu T. Jeżeli on krótki, to w całym okresie na inwestycje kieruje się tylko część dochodu niezbędną dla utrzymania wyjściowego technicznego uzbrojenia pracy. Pozostałą część dochodu kieruje się na spożycie. Majątek rośnie ze stopą λ równą stopie wzrostu ludności (konsumpcja i dochód rosną odpowiednio ze stopą $\lambda + \nu$). Jeżeli horyzont jest średniej długości, to pojawiają się dwie fazy wzrostu. W pierwszej (inwestycyjnej) cały dochód, po odliczeniu jego δ^0 — części na konsumpcję, przeznacza się na inwestycje. Szybko rośnie techniczne uzbrojenie pracy, majątek, dochód i konsumpcja (konsumpcja „startuje" jednak z niskiego poziomu). W fazie drugiej (konsumpcyjnej) mamy sytuację podobną do tej, którą obserwowaliśmy w krótkim okresie, tzn. utrzymywanie się technicznego uzbrojenia pracy na poziomie $u^*(\tau)$ osiągniętym pod koniec pierwszej fazy wzrostu, wzrost majątku ze stopą λ, także powolny (choć nieco szybszy — ze stopą $\lambda+\nu$) wzrost dochodu i konsumpcji (konsumpcja „startuje" jednak z poziomu wyższego od poziomu osiągniętego pod koniec pierwszej fazy wzrostu). Wreszcie, jeżeli horyzont jest długi, to obserwujemy trzy fazy wzrostu: początkową — inwestycyjną, środkową — równomiernego wzrostu i końcową — konsumpcyjną. W fazie środkowej techniczne uzbrojenie pracy i konsumpcja na osobę rosną ze stopą $\nu/(1-\varepsilon)$, pozostałe trajektorie (majątku, dochodu, konsumpcji) — ze stopą $\nu/(1-\varepsilon)+\lambda$. Faza ta jest tym dłuższa, im dłuższy jest horyzont T.

Otrzymane rozwiązanie, aczkolwiek przypomina rozwiązanie poprzedniego zadania, jest pod jednym względem „poprawniejsze": konsumpcja w procesie optymalnym nigdy obecnie nie spada do zera, a wszystkie trajektorie — z wyjątkiem trajektorii konsumpcji i inwestycji — są niemalejącymi funkcjami czasu (trajektorie konsumpcji i inwestycji są funkcjami przedziałami ciągłymi).

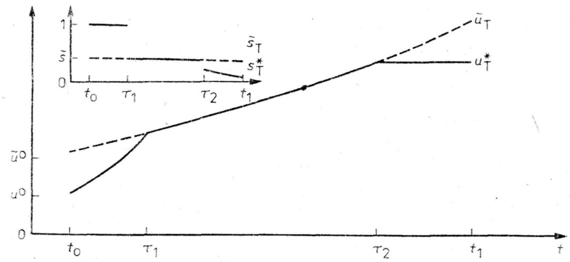
2°. R ó w n o w a g a i s t a b i l n o ś ć o p t y m a l n y c h p r o c e s ó w w z r o s t u. Rozumując jak poprzednio (punkt 3.2.2°), tzn. rozpatrując procesy w σ-równowadze ze stałymi stopami wzrostu technicznego uzbrojenia pracy i konsumpcji na osobę dochodzimy do procesu $(\tilde{\alpha}, \tilde{u})_T$:

$$\tilde{\alpha}(t)=\tilde{\alpha}=\nu\varepsilon/(\mu+\lambda)(1-\varepsilon)^2, \qquad \tilde{u}(t)=\tilde{u}^0 e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-t_0)}$$

odpowiadającego takiej regule akumulacji, przy której w każdym momencie $t\in T$ otrzymujemy maksymalną wielkość „nadwyżki" dochodu po odliczeniu „minimum konsumpcyjnego" $(\delta^0 y(t))$ i inwestycji zapobiegających spadkowi technicznego uzbrojenia pracy $(\mu+\lambda)\, m\,(t)$, gdzie $\tilde{u}^0=[a\varepsilon(1-\delta^0)/(\mu+\lambda)]^{1/(1-\varepsilon)}$. Odpowiada mu trajektoria konsumpcji na osobę $\tilde{\gamma}_T$

$$\tilde{\gamma}(t)=\tilde{\gamma}^0 e^{\frac{\nu}{1-\varepsilon}(t-t_0)}$$

z warunkiem początkowym $\tilde{\gamma}^0=\rho\tilde{u}^0\{\alpha(\tilde{u}^0)^{\varepsilon-1}[1-\tilde{\alpha}(1-\delta^0)]-(1-\tilde{\alpha})(\mu+\lambda)\}$ Podobnie jak poprzednio, nazywamy go p r o c e s e m m a k s y m a l n e g o r ó w n o m i e r n e g o w z r o s t u. Proces ten znowu przypomina swoistą „magistralę", do której w środkowym okresie przybliża się optymalna trajektoria technicznego uzbrojenia pracy u_T^* (ryc. 2). Analogiczną własność mają pozostałe optymalne trajektorie.



Ryc. 2. Optymalna trajektoria technicznego uzbrojenia pracy u_T^* (rozwiązanie zadania (20') - -(21')) i „magistrala" $\tilde{u}_T$

4. CIĄGŁOŚĆ TRAJEKTORII INWESTYCJI I KONSUMPCJI. TRZECIE ZADANIE STEROWANIA OPTYMALNEGO

1°. Sformułowanie zadania. W rozwiązaniach obu poprzednich zadań optymalne trajektorie inwestycji i konsumpcji były nieciągłe, pomijając nieciekawy przypadek krótkiego horyzontu T. Zjawiska takie są niezgodne z procesami zachodzącymi w realnej gospodarce. Inercyjność procesów inwestycyjnych oraz naturalna skłonność każdego społeczeństwa do dawania pierwszeństwa wcześniej utrwalonym wzorcom konsumpcyjnym powodują, że za realne można uznać tylko te procesy wzrostu, w których trajektorie inwestycji i konsumpcji będą funkcjami dostatecznie gładkimi

W obu omawianych zadaniach warunek ten zajdzie wtedy i tylko wtedy, gdy analogiczne własności będą miały funkcje s_T (udziału inwestycji w dochodzie) oraz α_T (udziału inwestycji w ,,nadwyżce" dochodu pozostającej po odliczeniu ,,minimum konsumpcyjnego" i nakładów zabezpieczających osiągnięty poziom technicznego uzbrojenia pracy). Nie będą one, wówczas mogły spełniać roli „sterów", o których zakładamy automatycznie, że należą do klasy funkcji przedziałami ciągłych. Jeżeli jest pożądane, by funkcja udziału inwestycji w dochodzie była dostatecznie, gładka, np. ciągła i przedziałami różniczkowalna, to należy ją potraktować jako kolejną współrzędną trajektorii stanów systemu, powierzając rolę „steru" innej funkcji (ewentualnie wprowadzonej dodatkowo) z określoną interpretacją ekonomiczną, której ewentualna nieciągłość nie budziłaby zastrzeżeń. Można tego dokonać wieloma sposobami. Poniżej przedstawiamy jeden z nich.

Chcąc sformułować zadanie sterowania optymalnego wzrostem z ciągłymi trajektoriami inwestycji i konsumpcji rozpatrzymy dwuwymiarowy system (opisywany dwoma równaniami różniczkowymi), w którym jedną współrzędną trajektorii stanów będzie kapitałochłonność produkcji, drugą — udział inwestycji w dochodzie (stopa inwestycji). Załóżmy, że wzrost majątku opisuje równanie (11) z warunkiem początkowym (12), natomiast współdziałanie majątku i zatrudnienia w tworzeniu dochodu — statyczna funkcja produkcji Cobba-Douglasa (13) ze wskaźnikiem postępu techniczno-organizacyjnego $\nu=0$. Wówczas przy przyjętych oznaczeniach z równania wzrostu majątku otrzymujemy następujące równanie wzrostu kapitałochłonności:

$$\dot{k}(t)=(\varepsilon-1)(\mu+\lambda)k(t)+(1-\varepsilon)s(t). \tag{23}$$

Oznaczmy przez $\beta^0>0$ — minimalny, a przez $\beta^1>\beta^0$ — maksymalny dopuszczalny udział inwestycji w dochodzie ($[\beta^0, \beta^1] \in (0, 1)$). Niech funkcja s_T udziału inwestycji w dochodzie będzie rozwiązaniom równania

$$\dot{s}(t)=\omega(\beta(t)-s(t)) \tag{24}$$

($\omega>0$) z warunkiem początkowym $s(t_0)=s^0\in[\beta^0, \beta^1]$ i funkcją $\beta\in\tilde{C}^0[T]$ z wartościami w $[\beta^0, \beta^1]$ w każdym momencie $t\in\boldsymbol{T}$. Wówczas $s\in C^0[T]$ ($\dot{s}\in C^0[T]$), $s(t)\in[\beta^0, \beta^1]$ na T. Oznaczmy przez $\gamma^1>\gamma^0=\rho(1-s^0)a^{1/(1-\varepsilon)}(k^0)^{\varepsilon/(1-\varepsilon)}$ docelową wielkość konsumpcji na osobę. Interesuje nas proces wzrostu spełniający warunki (23), (24) i prowadzący w najkrótszym czasie do poziomu konsumpcji γ^1, tzn. rozwiązanie zadania minimalnoczasowego:

$$\min\ t_1 \tag{25}$$

$$\begin{gathered}\dot{k}(t)=(\varepsilon-1)(\mu+\lambda)k(t)+(1-\varepsilon)s(t)\\ \dot{s}(t)=\omega(\beta(t)-s(t))\\ \beta(t)\in[\ {}^0,\ \beta^1],\ \beta\in\tilde{C}^0[T]\\ (k(t_0), s(t_0))=(k^0, s^0)\ (k^0>0,\ s^0\in[\beta^0, \beta^1])\\ (k(t_1), s(t_1))\in X=\{(k, s):\ \rho(1-s)a^{1/(1-\varepsilon)}k^{\varepsilon/(1-\varepsilon)}=\gamma^1\}.\end{gathered} \tag{26}$$

Ze względu na równomierną ograniczoność wszystkich trajektorii kapitałochłonności produkcji w układzie (26) (w okresie dowolnej długości), a tym samym także równomierną ograniczoność trajektorii konsumpcji na osobę, zadanie to może okazać się sprzeczne, jeżeli założymy zbyt ambitny, docelowy poziom konsumpcji. Załóżmy, że poziom ten ustalono w ten sposób, że zadanie jest niesprzeczne, a jego parametry spełniają warunek

$$\beta^0<\varepsilon, \quad \omega>(1-\varepsilon)(\mu+\lambda). \tag{27}$$

Wówczas rozwiązaniem zadania (25)-(26) jest następujący proces [6] $(\beta^*, s^*, k^*)_T$

[6] Rozwiązanie otrzymujemy korzystając z twierdzenia 4.1. Ibidem. Zadanie ma rozwiązanie także wówczas, gdy nie są spełnione warunki (27), z tym, że należałoby wówczas kolejno rozpatrywać przypadki: $\beta^0=\varepsilon$, $\omega>(1-\varepsilon)/(\mu+\lambda)$; $\beta^0>\varepsilon$, $\omega>(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)$ itd.

$$\beta^*(t)=\begin{cases}\beta^1 & \text{dla} \quad t\in[t_0,\tau),\\ \beta^0 & \text{dla} \quad t\in[\tau,t_1],\end{cases}$$

$$s^*(t)=\begin{cases}(s^0-\beta^1)e^{-\omega(t-t_0)}+\beta^1 & \text{dla} \quad t\in[t_0,\tau),\\ (s^*(\tau)-\beta^0)e^{-\omega(t-\tau)}+\beta^0 & \text{dla} \quad t\in[\tau,t_1],\end{cases}$$

$$k^*(t)=\begin{cases}(k^0-d_1-d_2)e^{-(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)(t-t_0)}+d_1e^{-\omega(t-t_0)}+d_2 & \text{dla} \quad t\in[t_0,\tau),\\ (k^*(\tau)-d_3(\tau)-d_4)e^{-(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)(t-\tau)}+d_3(\tau)e^{-\omega(t-\tau)}+d_4 & \text{dla} \quad t\in[\tau,t_1],\end{cases}$$

gdzie $d_1=(s^0-\beta^1)/\left(\mu+\lambda-\frac{\omega}{1-\varepsilon}\right)$, $d_2=\beta^1/(\mu+\lambda)$, $d_3(\tau)=(s^*(\tau)-\beta^0)/\left(\mu+\lambda-\frac{\omega}{1-\varepsilon}\right)$, $d_4=\beta^0/(\mu+\lambda)$, $T^*=[t_0,t_1^*]$, t_1^* — wartość kryterium (25) (najwcześniejszy moment osiągnięcia poziomu konsumpcji γ^1).

Istnieje taka liczba $\theta>0$, że $t_0<\tau<t_1$, jeżeli $t_1-t_0>\theta$. Jeżeli $t_1-t_0\leqslant\theta$, to optymalny proces redukuje się do postaci:

$$\beta^*(t)=\beta^0, \quad s^*(t)=(s^0-\beta^0)e^{-\omega(t-t_0)}+\beta^0,$$

$$k^*(t)=(k^0-d_3^0-d_4)e^{-(1-\varepsilon)(\mu+\lambda)(t-t_0)}+d_3^0e^{-\omega(t-t_0)}+d_4$$

w każdym momencie $t\in T$, gdzie $d_3^0=d_3(\tau)$ dla $\tau=t_0$. Im dłuższy jest czas niezbędny dla osiągnięcia docelowego poziomu konsumpcji γ^1, tym dłuższy jest; przedział $[t_0, \tau)$

Postać rozwiązania zależy m. in. od początkowej kapitałochłonności produkcji k^0, początkowego udziału inwestycji w dochodzie i docelowego poziomu konsumpcji γ^1. Dla przykładu prześledzimy przebieg optymalnych trajektorii w przypadku, gdy początkowa kapitałochłonność produkcji jest niska ($k^0<\beta^0/(\mu+\lambda)$), udział inwestycji w dochodzie maksymalny ($s^0=\beta^1$), a docelowy poziom konsumpcji γ^1 na tyle wysoki, że można go osiągnąć dopiero po upływie dłuższego czasu, w dwóch fazach wzrostu: podtrzymując maksymalny udział inwestycji w dochodzie w fazie pierwszej, a następnie ograniczając go w fazie drugiej (tym samym zwiększając udział konsumpcji).

Maksymalnemu udziałowi inwestycji w dochodzie w fazie pierwszej (inwestycyjnej) towarzyszy gasnący wzrost kapitałochłonności produkcji, która w tym okresie zbliża się do poziomu $\beta^1/(\mu+\lambda)$ (jednak go nie osiąga). Powoli rośnie konsumpcja w przeliczeniu na osobę. Przebieg optymalnych trajektorii majątku, dochodu, inwestycji i konsumpcji jest poctabny, z tym, że rosną odpowiednio szybciej. W fazie drugiej (konsumpcyjnej) zmniejsza się udział inwestycji w dochodzie. Kapitałochłonność produkcji, a także majątek, dochód i inwestycje rosną coraz wolniej. W rezultacie zmniejszania się udziału inwestycji w dochodzie obserwujemy szybszy niż w fazie pierwszej wzrost konsumpcji. Optymalne trajektorie kapitałochłonności produkcji, majątku, dochodu są funkcjami gładkimi *na* T, trajektorie inwestycji i konsumpcji — które w rozwiązaniach zadań (16)-(17), (20')-(21') były funkcjami nieciągłymi — obecnie są funkcjami przedziałami gładkimi.

2°. Równowaga i stabilność optymalnych procesów wzrostu. Rozpatrzmy procesy w σ-równowadze ze stałymi stopami wzrostu udziału (inwestycji w dochodzie, kapitałochłonności produkcji i konsumpcji, tzn. procesy dla których:

$$\sigma(\beta(t), s(t), k(t)) = (\dot{s}(t)/s(t), \dot{k}(t)/k(t), \dot{\gamma}(t)/\gamma(t)) = \text{const} \geqslant 0,$$

gdzie $\gamma(t) = \rho(1-s(t))a^{1/(1-\varepsilon)}k^{\varepsilon/(1-\varepsilon)}(t)$. Procesy te mają bardzo prostą postać:

$$s(t) = s = \text{const}, \quad k(t) = k = \text{const} = s/(\mu+\lambda)$$

$(\gamma(t) = \rho(1-s)a^{1/(1-\varepsilon)}[s/(\mu+\lambda)]^{\varepsilon/(1-\varepsilon)})$ w każdym momencie $t \in T$, gdzie s — dowolny udział inwestycji w dochodzie, $s \in [\beta^0, \beta^1]$

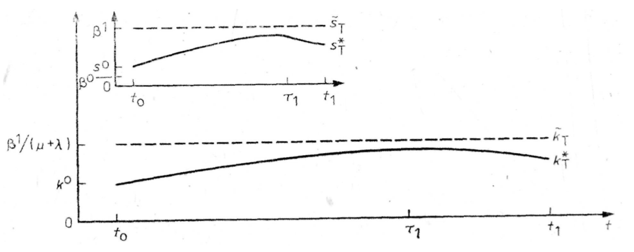
Oznaczając przez $(\tilde{\beta}, \tilde{s}, \tilde{k})_T$, $\tilde{\gamma}_T$ proces wzrostu i odpowiadającą mu trajektorię konsumpcji w σ-równowadze z maksymalną kapitałochłonnością mamy:

$$\tilde{\beta}(t) = \tilde{s}(t) = \beta^1, \quad \tilde{k}(t) = \beta^1/(\mu+\lambda),$$
$$\tilde{\gamma}(t) = \rho(1-\beta^1)a^{1/(1-\varepsilon)}[\beta^1/(\mu+\lambda)]^{\varepsilon/(1-\varepsilon)}$$

w każdym momencie $t \in T$. Siedząc rozwiązanie zadania (25) - (26) stwierdzamy, że im dłuższy jest horyzont T, tym dłużej optymalna trajektoria kapitałochłonności produkcji (zawsze — z wyjątkiem pewnego okresu początkowego i końcowego) przebiega w bliskim otoczeniu trajektorii k_T w σ-równowadze z maksymalnym poziomem kapitałochłonności („magistrali"). Dokładniej: dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\theta_\varepsilon > 0$, że jeśli najkrótszy okres, w którym możliwe jest osiągnięcie poziomu konsumpcji γ^1 spełnia warunek $t_1^* - t_0 > 2\theta_\varepsilon$, to

$$|k^*(t) - \tilde{k}(t)| \leqslant \varepsilon$$

w każdym momencie $t \in [t_0 + \theta_\varepsilon, \ t_1 - \theta_\varepsilon]$ (ryc. 3). Podobną własność mają optymalne trajektorie technicznego uzbrojenia pracy i konsumpcji na osobę.



Ryc. 3. Optymalna trajektoria kapitałochłonności produkcji k_T^* i „magistrala" k_T

W rozwiązaniu zadania (25) - (26) nie pojawia się środkowa faza równomiernego wzrostu, która wystąpiła w rozwiązaniach dwóch poprzednich zadań. Jest to zrozumiałe zważywszy, że w poprzednich rozwiązaniach techniczne uzbrojenie pracy oraz konsumpcja na osobę rosły w fazie środkowej ze stopą $\nu/(1-\varepsilon)$, a zatem teraz rosłyby one z zerową stopą (przyjęliśmy bowiem statyczną funkcję produkcji ze wskaźnikiem postępu techniczno-organizacyjnego $\nu=0$). Faza środkowa byłaby zatem „martwa" z punktu widzenia wzrostu konsumpcji na osobę i wobec tego niekorzystna w świetle kryterium minimalizacji czasu dojścia do jej ustalonego, docelowego poziomu.

IV, UWAGI KOŃCOWE

Teoria sterowania bada zjawiska fizyczne, znacznie prostsze i łatwiejsze do opisu matematycznego niż zjawiska ekonomiczno-spoteczne. Staraliśmy się pokazać, że teorię tę można z pożytkiem stosować także do badania zjawisk ekonomicznych pod warunkiem ich poprawnego (z ekonomicznego punktu widzenia) opisania w języku matematycznym. Zarzuty co do nierealności rozwiązań dotyczą założeń modeli, a nie teorii sterowania. Wyjaśnimy to bliżej. W każdym zadaniu sterowania optymalnego wyodrębnia się 'zmienne charakteryzujące „stan wewnętrzny" systemu oraz zmienne występujące w charakterze „sterów". Funkcje wartości tych zmiennych w pewnym okresie nazywamy trajektoriami Postać trajektorii stanów (po ustaleniu stanu początkowego) zależy od postaci trajektorii sterowań. Formułując zadanie sterowania optymalnego, musimy rozstrzygnąć za pomocą jakich zmiennych opiszemy system, jakie będą zależności matematyczne między tymi zmiennymi oraz które zmienne będą w takim zadaniu sterowaniami. Trajektorie sterowań mają bowiem bardzo ważną — ze względu na zastosowania — własność: mogą być zarówno ciągłymi, jak i przedziałami ciągłymi funkcjami czasu, w szczególności funkcjami typu „włącz-wyłącz". Zjawisk takich, często dopuszczalnych w procesie sterowania obiektami fizycznymi, nie można przyjąć za najlepsze rozwiązania w sferze sterowania procesami ekonomicznymi.

Jeżeli rolę „sterów" w zadaniu sterowania wzrostem powierzymy funkcjom opisującym przebieg procesów, które w praktyce powinny charakteryzować się znaczną regularnością (w języku matematycznym wyraża się to np. w ich odpowiedniej gładkości), wówczas otrzymamy najczęściej rozwiązania nierealne z ekonomicznego punktu widzenia, jak na to wskazują rozwiązania zadań (16)-(17) i (20')-(21'). Rolę „sterów" mogą bowiem odgrywać tylko takie funkcje, których nieciągłość nie będzie budziła zastrzeżeń z punktu widzenia ich interpretacji ekonomicznej. Zabieg, który przeprowadziliśmy w zadaniu (25)-(26), doprowadził do tego, że otrzymaliśmy rozwiązanie realne w świetle naszej wiedzy o wzroście, choć ze względu na daleko idące uproszczenia modelu można tutaj — oczywiście — mówić tylko o pewnej „jakościowej" zbieżności otrzymanego rozwiązania z przebiegiem podobnego procesu w realnej gospodarce.

Środki przedsięwzięte do wyeliminowania nieregularnych procesów wzrostu nie zmieniły przy tym jednej podstawowej własności tych procesów. W rozwiązaniach wszystkich trzech zadań w długich okresach ujawnił się tzw. efekt magistrali. Jego odkrycie nie byłoby możliwe, gdybyśmy pozostali przy tradycyjnym rozumieniu równowagi, jakie powszechnie przyjęto m. in. w technice. We wszystkich rozwiązaniach, w praktycznie ciekawych sytuacjach, jako początkowa w optymalnych procesach wzrostu występuje faza inwestycyjna, w której ogranicza się strumień konsumpcji (w granicach, które określają założenia modeli) na rzecz zwiększonych inwestycji. We wszystkich rozwiązaniach optymalne procesy wzrostu kończą się fazą konsumpcyjną, w której rośnie strumień konsumpcji, ograniczony zaś zostaje strumień inwestycji.

Dlaczego w rozwiązaniach zadań optymalne procesy wzrostu rozpoczynają się fazą inwestycyjną i kończą fazą konsumpcyjną (pomijajmy na razie sprawę ewentualnego pojawienia się w międzyczasie jakichś innych fa;z wzrostu)? Gdyby kryterium wzrostu była nie maksymalizacja konsumpcji czy minimalizacja czasu dojścia do jej założonego, docelowego poziomu, lecz np. maksymalizacja dochodu lub minimalizacja czasu dojścia do jego założonego, docelowego poziomu, wtedy w żadnym procesie optymalnym nie pojawiłaby się w ogóle faza konsumpcyjna. Nienależnie od długości horyzontu i zakładanego docelowego poziomu dochodu zawsze mielibyśmy tylko inwestycyjną fazę wzrostu. Samo występowanie fazy konsumpcyjnej związane jest z „konsumpcyjnymi" kryteriami wzrostu, co oczywiście nie wyjaśnia jeszcze, dlaczego faza ta zamyka horyzont T. Załóżmy, że faza konsumpcyjna nie kończy procesu wzrostu, lecz pojawia się wcześniej. Po fazie konsumpcyjnej wystąpi wtedy jeszcze inna, nie konsumpcyjna, faza wzrostu, w której można by zwiększyć produkcję dóbr konsumpcyjnych, ale nie czyni się tego — mniejsza o to z jakich powodów. W świetle „konsumpcyjnych" kryteriów wzrostu faza ta nie będzie w pełni wykorzystana, a proces taki nie będzie najkorzystniejszy. Z kolei brak w ogóle fazy inwestycyjnej oznacza na dłuższą metę kurczenie się majątku, a w konsekwencji spadek dochodu i konsumpcji. Nieopłacalne jest również „przesunięcie" tej fazy, a więc poprzedzenie jej jakąkolwiek inną fazą wzrostu. „Antyinwestycyjna" polityka w fazie początkowej ograniczałaby możliwości wzrostu w przyszłości, oznaczałaby bowiem rezygnację z szans szybkiego doinwestowania gospodarki w okresie początkowym i stworzenia odpowiednio wysokiego potencjału wytwórczego pozwalającego na zwiększenie produkcji dóbr konsumpcyjnych w okresie następnym.

W rozwiązaniach dwóch pierwszych zadań w środkowym etapie długiego horyzontu T pojawia się środkowa faza, równomiernego, umiarkowanego wzrostu majątku, dochodu i konsumpcji odpowiadająca tzw. złotej regule akumulacji Phelpsa (ściślej rzecz biorąc — jej zmodyfikowanym wariantom). Przyczyny niewystąpienia tej fazy w rozwiązaniu zadania minimalnoczasowego wyjaśniliśmy w punkcie 3.2.2°. Natomiast jej występowanie w rozwiązaniach dwóch pierwszych zadań wiąże się z założonym kształtem funkcji produkcji. Faza ta pojawia się tylko w rozwiązaniach zadań sterowania optymalnego wzrostem, w których funkcje produkcji charakteryzują się malejącymi krańcowymi efektywnościami czynników produkcji (taka jest m. in. funkcja Cobba-Douglasa). Nie obserwujemy natomiast jej nigdy w rozwiązaniach zadań z funkcjami produkcji charakteryzującymi się stałymi lub rosnącymi krańcowymi efektywnościami czynników. Wzrost majątku w takich przypadkach wywołuje bowiem co najmniej proporcjonalny wzrost dochodu. W świetle „konsumpcyjnych" kryteriów wzrostu zawsze będzie opłacalny podział ewentualnej fazy powolnego, równomiernego wzrostu majątku, dochodu i konsumpcji na dwie: pierwszą — inwestycyjną, w której szybko wzrośnie majątek i dochód i drugą — konsumpcyjną, w której wzrośnie konsumpcja. Przy niemalejącej krańcowej efektywności majątku każde ograniczenie strumienia konsumpcji (zwiększenie strumienia inwestycji) w jakimś okresie „procentuje" w przyszłości, dając taki wzrost strumienia produkcji dóbr konsumpcyjnych, którego nie udałoby się w żadnym razie osiągnąć wcześniej.

MACROECONOMIC PROBLEMS OF OPTIMUM CONTROL IN THE MATHEMATICAL THEORY OF GROWTH

Summary

The work presents three tasks of optimum control of growth in a one-sector economy with a two-factor function of production of Cobb and Douglas, differing in assumptions on national income growth and consumption. Maximalization of consumption in a fixed period of time serves as a growth criterion in the first two tasks. In the third one the growth criterion being time necessary for the economy to reach a target level of consumption goods production. A certain group of conditions eliminating discontinuities („leaps") in the national income distribution revealed in the solutions of the preceding tasks was introduced here. On the marigin of the reached solutions, the author touches on certain general, as it seems, regularities, which are ruling optimum processes of growth in the long run.