DZIECIĘCA MATEMATYKA

Tomasz Przybyła[1], Michał Bronikowski[2], Bartłomiej Bzdęga[1], Ireneusz Cichy[3], Joanna Hofman[4], Olena Hrybiuk[5], Izabella Kaiser[1], Kinga Kolczyńska-Przybycień[4], Andrzej Rokita[3], Michał Klichowski[1*]

[1] Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
[2] Akademia Wychowania Fizycznego w Poznaniu
[3] Akademia Wychowania Fizycznego we Wrocławiu
[4] Zespół Szkolno-Przedszkolny nr 9 w Poznaniu
[5] Narodowa Akademia Nauk Pedagogicznych Ukrainy
[*] klich@amu.edu.pl

Abstrakt

W rozdziale tym przedstawiono tradycyjne metody kształtowania kompetencji matematycznych dzieci, takie jak metoda samodzielnych doświadczeń, kierowania aktywnością, zadań i ćwiczeń; metody oparte na pokazie, przykładzie, udostępnianiu sztuki, rozmowie, opowiadaniu, zagadce, objaśnieniu, instrukcji, wierszu i piosence, czy też metody żywego słowa. Omówiono także alternatywne strategie, takie jak: metody bazujące na koncepcji pedagogicznej Montessori, Froebla, Steinera, Domana czy Friedricha, de Galgóczy-Mécher i Schindelhauer, a także Naglaka, Rokity i Rzepy. Pokazano również nowe, oparte na technologiach informacyjno-komunikacyjnych, przestrzenie aktywności matematycznych: środowisko rzeczywistości wirtualnej i cyberparków. Odniesiono się ponadto do uczniów ze specjalnymi potrzebami matematycznymi, którzy wymagają jeszcze innych metod pracy. W tym kontekście wyjaśniono różnice między takimi problemami z matematyką, jak akalkulia, dyskalkulia czy specyficzne trudności matematyczne. Wreszcie ukazano to, jak rozpoznać w klasie uczniów uzdolnionych matematycznie, jak z nimi pracować oraz wyróżniono kompetencje zawodowe, które powinien posiadać nauczyciel takich uczniów. Rozdział kończy krótkie podsumowanie zachęcające do refleksji nad procesem nauczania matematyki.

Wprowadzenie

Ludzkość uprawia matematykę od kiedy nauczyła się świadomie liczyć, co prawdopodobnie miało miejsce w okresie neolitu. Jednak rola matematyki znacząco wzrosła dopiero wtedy, gdy ludzie zaczęli organizować się w coraz większe społeczeństwa i gdy powstawały pierwsze cywilizacje. W jednej z nich, w starożytnym Egipcie, matematyka miała charakter algorytmiczny – istniały tu wypracowane przez lata, raczej w sposób doświadczalny niż dedukcyjny, przepisy na rozwiązanie konkretnych problemów (głównie praktycznych, związanych z rolnictwem czy budownictwem; nie brakowało jednak również matematycznych rozrywek). Inaczej do matematyki podchodzili starożytni Grecy, którym nie wystarczała oparta na doświadczeniu znajomość matematycznych praw. Grecy próbowali dociec, dlaczego te prawa są zachowane. W ten sposób matematyka stała się nauką dedukcyjną i taką jest do dziś. Jednak pomimo tego, że fundamentem współczesnej matematyki są aksjomaty, a zatem pewniki, które zazwyczaj mają swoje korzenie w otaczającej nas rzeczywistości (np. dowolne dwa punkty można połączyć odcinkiem), matematyka nie opisuje namacalnej rzeczywistości, lecz pewien jej wyidealizowany obraz. Dla przykładu, w rzeczywistości nie ma czegoś takiego jak prosta – nieskończenie cienka, nieskończenie długa i idealnie prosta linia. Jest to cena, którą się płaci za to, że twierdzenia matematyczne pozostają prawdziwe niezależnie od towarzyszących im okoliczności. Jednak matematyka od zawsze była nauką niezwykle użyteczną. W czasach prehistorycznych lepsze opanowanie arytmetyki dawało plemieniu oczywistą przewagę nad konkurencją. Gdy człowiek zaczął uprawiać ziemię i wznosić większe budowle, niezwykle ważna okazała się geometria. Dla potrzeb fizyki i astronomii stworzono w XVII w. podstawy analizy matematycznej. Mniej więcej w tym samym czasie powstały rachunek prawdopodobieństwa i statystyka, dzięki którym możemy opisać zjawiska losowe. Teoria liczb od dwóch tysięcy lat dostarcza narzędzi do szyfrowania. Matematyka dyskretna wspomaga informatykę, bez której w dzisiejszych czasach nie sposób funkcjonować (Bondecka-Krzykowska, 2006, 2013; Davis, Hersh, Marchisotto, 2001; Kordos, 2010; Murawski, 2017).

Matematykę warto więc znać. Co ciekawe, ludzie potrafią wykonywać proste obliczenia – takie jak porównywanie liczebności zbiorów – od urodzenia (Christodoulou, Lac, Moore, 2017; Kowalska, Klichowski, 2018; Nieder, 2005; Walerzak-Więckowska, Lipowska, Jurek, 2018). Jednak, aby zacząć naprawdę myśleć matematycznie potrzebujemy dobrej matematycznej edukacji (Houde, Tzourio-Mazoyer, 2003). W przypadku dzieci, chodzi o dobrze przemyślane i przeprowadzone matematyczne zabawy, eksperymenty i praktyczne ćwiczenia (Rościszewska-Woźniak, 2010). Według Briana Butterwortha (1999, 2005a), o tym, czy dziecko odniesie sukces czy też porażkę w nauce matematyki, w znacznej mierze decydują te wczesne matematyczne doświadczenia. Jeżeli polubi i zrozumie ono matematykę na początku swojej edukacyjnej drogi, to kolejne, nabywane stopniowo doświadczenia, doprowadzą do osiągnięć, które wzmocnią samo zainteresowanie matematyką, pobudzą dziecko do działania, dadzą mu radości z wykonywanych czynności i spowodują, że coraz lepiej będzie rozumiało sens matematyki i jej związek z życiem. Jeżeli jednak droga ta nie będzie jawić mu się jako coś zrozumiałego i przyjemnego, to ma niewielkie szanse na to, by zrozumieć jej podstawy, a wówczas osiągać będzie gorsze wyniki w szkole i przestanie podejmować kolejne próby rozwiązywania problemów matematycznych.

Proces rozwoju umiejętności arytmetycznych dziecka przebiega, w najogólniejszym ujęciu, dwuetapowo. Początkowo (pomiędzy 2. a 5. rokiem życia) dziecko przechodzi przez etap konkretnych doświadczeń liczbowych, takich jak przeliczanie niewielkich zbiorów, określanie liczebności zbiorów, przyporządkowywanie 1:1, czy spontaniczne używanie palców, a następnie (pomiędzy 3. a 9. rokiem życia) przez etap liczbowych doświadczeń arytmetycznych – tu na przykład sprawne liczenie w pamięci i wydobywanie z niej faktów oraz zależności matematycznych (Butterworth, 2005b). W polskiej literaturze tak ujęta sekwencja rozwojowa, nazywana Modelem Rozwoju Kompetencji Matematycznych, została opisana (a także graficznie zwizualizowana) w ostatnim czasie przez Walerzak-Więckowską, Lipowską, Jurek (2018). Na obu etapach, co należy raz jeszcze mocno podkreślić, dziecko nie nabywa kompetencji matematycznych, ale są one u niego kształtowane.

Jak zatem efektywnie kształtować kompetencje matematyczne dzieci? W rozdziale tym przedstawimy tradycyjne metody dziecięcej edukacji matematycznej, a także metody względem nich alternatywne. Pokażemy także innowacyjne, oparte na nowych technologiach, techniki dydaktyki zajęć matematycznych. Odniesiemy się także do uczniów ze specjalnymi potrzebami matematycznymi, którzy wymagają jeszcze innych metod pracy. Rozdział zakończy krótkie podsumowanie zachęcające do dalszych studiów i pogłębiania wiedzy z zakresu kształtowania kompetencji matematycznych dzieci.

1. Tradycyjne metody kształtowania kompetencji matematycznych dziecka

Termin „kształtowanie kompetencji matematycznych" należy rozumieć szeroko. W żadnym wypadku nie można ograniczać się w tym kontekście jedynie do kształtowania kompetencji szczegółowych, wymienionych w podstawie programowej. Związany jest on bowiem także z nabywaniem przez dziecko doświadczeń niezbędnych do ukształtowania się odpowiednich pojęć matematycznych, rozwijaniem umiejętności stosowania nabytej wiedzy w konkretnych sytuacjach, stymulowaniem rozumowań matematycznych oraz samodzielności myślenia i krytycyzmu. Kompetencje matematyczne są ponadto kształtowane w powiązaniu z innymi obszarami edukacji. Kształcenie zintegrowane umożliwia (co jest zgodne z naturalną dynamiką rozwoju umysłowego dziecka – Semadeni, 2014) splatanie procesu rozwijania kompetencji matematycznych zarówno z innymi wymiarami poznawczymi nauczania (np. językowym czy przyrodniczym), jak i tymi społecznymi, emocjonalnymi (Stańko, Spławska-Murmyło, 2017) oraz twórczymi i ruchowymi (Woodfield, 2004). Olena Hrybiuk (2014) dodaje ponadto, że kształcenie matematyczne, to proces kształcąco-wychowawczy – w jego trakcie następuje nie tylko przyswojenie określonego zakresu wiedzy, umiejętności i nawyków, ale również formowanie zasad moralnych i kultury duchowej. Praca nauczyciela dzieci w wieku wczesnoszkolnym wymaga zatem zastosowania przemyślanych i sprawdzonych metod nauczania, rozumianych, za Franciszkiem Bereźnickim (2011), jako pewien określony sposób współpracy nauczyciela z uczniem, prowadzący do osiągnięcia założonych celów kształcenia. Do tradycyjnych metod kształtowania kompetencji matematycznych dziecka należą:

1. Metody czynne – oparte na działaniu. Te metody powinny być dominującymi metodami w kształtowaniu pojęć matematycznych u dzieci. Choć bowiem wielu wychowawców uważa, że dobrym sposobem uczenia jest wyjaśnianie i tłumaczenie poprzez opowiadanie, w edukacji matematycznej najmłodszych uczniów najważniejsze są osobiste działania. To one stanowią budulec, z którego dziecko tworzy pojęcia i umiejętności (Gruszczyk-Kolczyńska, Zielińska, 1997). Wymienić można cztery bardzo efektywne w tym kontekście metody czynne:
   a. Metoda samodzielnych doświadczeń. Rolą nauczyciela jest tu stwarzanie warunków do samodzielnej zabawy oraz ułatwianie nawiązywania kontaktów z otoczeniem społecznym, przyrodą i sztuką. Przykładem może być zabawa klockami sześciennymi lub słomkami konstrukcyjnymi. W przypadku tych pierwszych, początkowo dzieci układają dowolne wieże. Liczą, porównują, dokładają z każdej strony, aby było po równo. Niektóre dzieci zaczynają naśladować inne i próbują układać podobne wieże. W tym momencie zauważają różne zależności. Czy liczba klocków potrzebnych do zbudowania takiej samej budowli jest równa liczbie klocków, z których zbudował ją kolega? Czy dziecko, siedzące naprzeciw kolegi, wybuduje taki sam obiekt? Jakie jest położenie przedmiotu w stosunku do innego przedmiotu lub układu odniesienia? Po wstępnych samodzielnych zabawach i wyczerpaniu swoich pomysłów na daną liczbę klocków, zwykle dzieci dobrowolnie dobierają się w pary lub w podgrupy (choć tutaj bardzo ważny jest rozwój poziomu kompetencji społecznych, szczególnie umiejętności pracy w grupie). Łączą swoje klocki i próbują wybudować nowe, większe budowle. Sprawdzają, jak wysoka może być wieża. Szacują, czy wystarczy im klocków do zbudo-

wania kolejnych podobnych budowli. Jeśli dochodzą do wniosku, że potrzebne będą kolejne klocki, natychmiast nawiązują kontakt z innym uczniem, włączając go do swoich doświadczeń. Podobnych działań i odkryć dzieci dokonują ze słomkami konstrukcyjnymi. Nie widząc instrukcji, natychmiast wiedzą, co mają robić. Uczniowie łączą początkowo kilka słomek albo w jedną długą prostą, albo tworzą krawędzie sześcianu. I znów odkrywają zależności związane z matematyką. Powstają pytania typu: Ile słomek potrzebuję, aby utworzyć jeden sześcian? Czy jak złączę ze sobą dwa sześciany, to zużyję tyle samo słomek, co w przypadku dwóch osobnych konstrukcji? Po kilku samodzielnych doświadczeniach, uczniowie dobrowolnie łączą się w pary i podgrupy, aby skonstruować coraz to większe budowle, aż do wyczerpania słomek. Uwzględniają przy tym także wiele praw fizyki (choć robią to jeszcze raczej intuicyjnie), o których można również porozmawiać, po zakończonej zabawie.

b. Metoda kierowania aktywnością. W tej metodzie nauczyciel inspiruje spontaniczną działalność dziecka przez zachętę, sugestię, radę, czy podsunięcie pomysłu. Przykładem może tu być kontynuacja zabawy z klockami i słomkami. Znakomitym narzędziem do nabywania umiejętności matematycznych są klocki Lego. Umiejętne kierowanie aktywnością ucznia poprzez sugestie czy podsunięcie pomysłu, pozwoli dziecku lepiej zrozumieć świat matematyki na wczesnym etapie kształcenia.

c. Metoda zadań. Rolą nauczyciela jest inspirowanie do odkrywania przez dzieci nowych zjawisk, przyswajania i stosowania określonych umiejętności. Nauczyciel podsuwa zadania, a nie sposoby ich rozwiązania. Pobudza to dodatkowo dziecięcą wyobraźnię i kreatywność. Przykładem może być tu zabawa z kartką w kratkę. Dyktanda graficzne (czasem nazywane kraciakami), dzieci zaczynają od najprostszych poleceń nauczyciela typu: 1 w prawo, 2 w dół, 1 w lewo, 2 w górę. To działanie nie tylko wymaga koncentracji ucznia, ale przede wszystkim znajomości lub utrwalania i kształcenia orientacji przestrzennej. Po tak zainspirowanej zabawie, nauczyciel przekazuje „dowodzenie" uczniom. Kolejne etapy, to różnego typu działania arytmetyczne, dzięki którym można w szybki sposób policzyć lub podzielić kratki w danej figurze.

d. Metoda ćwiczeń. Polega ona na tym, że dzieci powtarzają czynności systematycznie w celu ich rozwoju. Utrwalają wiadomości lub postawy, a także ćwiczą mięśnie. Anna Klim-Klimaszewska (2005) podkreśla, że wszystkie tego typu ćwiczenia powinny być wplecione do codziennych dziecięcych zabaw.

2. Metody oglądowe – oparte na obserwacji. Należy je potraktować jedynie jako dodatkowe, uzupełniające działania oparte na metodach czynnych. Wyróżnić można tu np. klasyczny pokaz i przykład, ale także udostępnianie sztuki. Ten ostatni – nie często wiązany z edukacją matematyczną – element odnosi się do przekazywania uczniom wiedzy o tym, że matematykę można łatwo zaobserwować w sztuce. I tak np. w architekturze dostrzec można matematyczne zależności: kostka brukowa (parkietaż, symetria), rozeta (koło, symetria), piramidy (ostrosłupy), bloki mieszkalne (prostopadłościany), wieża (walec); w malarstwie nurtu Op-Art obserwować można figury geometryczne, nie wspominając o iluzjonizmie, fraktalach czy abstrakcjach geometrycznych; także na przykładzie rzeźbiarstwa poznawać można matematyczne zasady. Eugeniusz Rogalski (1992) zwraca szczególną uwagę w tym kontekście na muzykę. Dostrzega on, że poprzez działania muzyczne rozwija się u dzieci zdolność spostrzegania, uwaga dowolna, pamięć i wyobraźnia, a także kształtują się procesy myślowe takie jak umiejętność analizy i syntezy, indukcji i dedukcji, wyciągania wniosków, abstrahowania i porównywania. I tak dla przykładu, podczas wprowadzania przez nauczyciela pojęcia zegara oraz odczytywania położenia wskazówek na jego tarczy, równorzędnie może być prowadzona edukacja muzyczna, poprzez zwrócenie uwagi na rytm, ruch i tempo. Wyklaskując tempo ruchu wskazówek zegara, uczniowie mogą zaobserwować, jak długo trwa minuta. Podobnie cechy wielkościowe w matematyce, to mierzenie i porównywanie rozmaitych wielkości odcinków, natomiast w muzyce, to czasowe ujmowanie wartości rytmicznych nut i podporządkowanie danemu metrum. Istotę ułamka można również pokazać za pomocą podziału rytmicznego od całej nuty do szesnastki.
3. Metody słowne – oparte na słowie. Je także należy potraktować jako dodatkowe, uzupełniające działania oparte na metodach czynnych. Zaliczyć do nich można:
   a. rozmowy, opowiadania, zagadki. Wykorzystując je nauczyciel wzbogaca słownictwo matematyczne dzieci. Zagadki są doskonałym sposobem na rozpoczęcie lekcji i zainspirowanie uczniów danym tematem dnia. Wykorzystując matematyczną zagadkę słowną można wpleść ją w opowiadanie powiązane z tematem lekcji.
   b. objaśnienia i instrukcje. To również dokładne podanie i objaśnianie instrukcji, aby przyswojenie nowych terminów i/lub działań było łatwiejsze i bardziej zrozumiałe. Przykładem mogą tu być nowe dla dzieci gry i zabawy edukacyjne, czy instrukcje i objaśnienia do wykonywania ustalonych przez nauczyciela działań logicznych i matematycznych.

c. wiersze i piosenki. Dzieci mogą uczyć się wierszy i piosenek związanych z terminami matematycznymi, które później bardzo chętnie powtarzają oraz wykorzystują w praktyce. Warto tutaj wspomnieć o wierszach Wandy Chotomskiej *Dziesięć bałwanków*, *Umiem liczyć do dziesięciu*, *10 palców* i *Misie*.
d. metody żywego słowa. Pobudzają one uczucia i procesy poznawcze, działając na wyobraźnię i wewnętrzną motywację dziecka.

Należy mocno podkreślić, iż wartość zastosowanej metody zależy w największym stopniu od wiedzy, kompetencji i osobowości nauczyciela, a także od jego przekonania co do skuteczności danej metody (oraz oczywiście od dynamiki grupy i możliwości ucznia). Jak twierdzi bowiem Ken Robinson (2015), znajomość tematu jest co prawda niezbędna w nauczaniu, ale nie jest wystarczająca. Kluczem jest umiejętność zainspirowania uczniów tematem.

2. Nietradycyjne metody kształtowania kompetencji matematycznych dziecka

Na całym świece od wielu lat mówi się o nieefektywności nauczania matematyki i zauważa się wciąż wzrastającą niechęć uczniów do tego przedmiotu (Klus-Stańska, Kalinowska, 2004; Wood, 2006). Z tego też powodu coraz popularniejsze staje się poszukiwanie nietradycyjnych (alternatywnych) metod kształtowania kompetencji matematycznych. Do najważniejszych z nich można zaliczyć:

1. metody bazujące na koncepcji pedagogicznej Marii Montessori. Uważała ona, że w każdym człowieku tkwi zmysł matematyczny, dzięki któremu jest on „jedyną istotą, która potrafi myśleć matematycznie, wyciągać wnioski, badać, kształtować własną wyobraźnię i możliwości uogólniania” (Skjöld Wennerström, Bröderman Smeds, 2007, s. 145). Według niej, ludzki umysł jest z natury matematyczny, dlatego też każde dziecko ma zadatki na matematyka. Wzorując się na metodach liczenia stosowanych przez naszych przodków, Montessori opracowała unikatowe materiały dla dzieci, służące nauce matematyki poprzez działanie. Są to np.[1]:
   a. patyki liczbowe, cyfry dotykowe, wrzeciona i żetony (nauka liczenia w zakresie 10).
   b. tablice Sequina, krótkie łańcuchy kolorowych liczb, złote łańcuchy setki i tysiąca, tablica setki (nauka liczenia w zakresie 1000).

[1] W literaturze można spotkać czasem odmienne nazwy poszczególnych materiałów.

c. tablica kropek, złote liczydło, tablica mnożenia, zestaw do dzielenia liczb wielocyfrowych (nauka wykonywania działań arytmetycznych w dziesiątkowym układzie pozycyjnym).
d. węże dodawania i odejmowania, paskowe tablice dodawania i odejmowania, zestawy tablic dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, paciorkowe tablice mnożenia i dzielenia (nauka dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia małych liczb od 1 do 100).
e. niebieskie trójkąty konstrukcyjne, patyki geometryczne i zestaw metalowych kwadratów (nauka geometrii płaskiej).

Montessori zachęcała także do położenia dużego nacisku na pośrednie przygotowywanie małych dzieci do rozumienia pojęć matematycznych, a zatem do wykonywania z nimi różnych ćwiczeń przed rozpoczęciem edukacji matematycznej. Wykorzystać tu można czerwone patyki i tabliczki dotykowe. Podczas tych ćwiczeń dzieci wykonują proste kalkulacje, oszacowania czy logiczne rozumowania, przygotowujące do przyszłych zadań matematycznych.

2. Metody bazujące na koncepcji pedagogicznej Friedricha Froebla. W pomyśle Froebla dzieci uczą się matematyki z wykorzystaniem tzw. darów. Są to zabawki edukacyjne, które mają postać małych piłeczek (kul) oraz drewnianych klocków w kształcie sześcianów, walców i graniastosłupów; są tu także mozaiki, pierścienie, patyczki o różnej wielkości i kołeczki. Według Froebla wykorzystanie darów w codzienności dziecka rozwija kompetencje w zakresie dostrzegania i określania cech jakościowych i ilościowych, wnioskowania, rozpoznawania rytmów i regularności, a także samego liczenia; ponadto stymuluje rozwój orientacji przestrzennej, przygotowuje do mnożenia i dzielenia oraz doskonali intuicje geometryczne i utrwala nazwy kształtów. Ponadto poprzez *dary* można kształtować u małych dzieci także wiedzę o trudniejszych zagadnieniach matematycznych (wykraczających poza ramy podstawy programowej), takich jak ułamki czy pojęcia geometryczne.
3. Metody bazujące na koncepcji pedagogicznej Rudolfa Steinera. Steiner zachęcał do uczenia matematyki poprzez ruch, jako, iż jest on niezwykle pomocny przy tworzeniu i utrwalaniu w pamięci nowych pojęć (Schuberth, 2013). Dzieci mają więc uczyć się liczenia poprzez rytmiczne klaskanie, tupanie, chodzenie, skakanie czy rzucanie i łapanie (piłeczek albo woreczków), a także odliczanie na głos. Uczniowie mają także mierzyć długości z wykorzystaniem ciała: pomieszczenie mierzą stopami, małe przedmioty palcami, a te większe łokciami. Własnymi ciałami „rysują" także figury geometryczne,

często w układach tanecznych. W tej koncepcji ważne jest ponadto uświadamianie dzieciom, że w matematyce jest wiele dróg do wyniku – należy więc poszukiwać własnych strategii rozwiązywania danego zadania.

4. Metoda bazująca na koncepcji Glenna Domana. Polega ona na wielokrotnym pokazywaniu dziecku zestawów kart z nadrukowanymi kropkami o średnicy 19 mm. Na odwrocie kart (widzianych tylko przez nauczyciela) zapisana jest liczba kropek danej karty oraz 20 działań o wzrastającej trudności, których wynik odpowiada liczbie kropek. Każdy zestaw należy prezentować dziecku 3 razy dziennie w odstępach 30. minutowych. Zestawy są codziennie modyfikowane. Metoda ta wykorzystuje tzw. efekt wizualnego wrażenia – dziecko widząc kropki poznaje pojęcie ilości. Dopiero potem uczy się liczb.
5. Metoda bazująca na koncepcji Gerharda Friedricha, Violi de Galgóczy-Mécher i Barbary Schindelhauer. W metodzie tej proponuje się dzieciom podróż do krainy liczb i figur geometrycznych. W krainie tej znajdują się miasta liczb, a w nich liczbowe domy, ogrody i drogi (tzw. liczbościeżki). Opowiada się w niej liczbowe bajki i śpiewa liczbowe piosenki. Każda liczba (od 1 do 10) ma tu stałe miejsce zamieszkania – jest nim jakaś figura, np. koło, elipsa, trójkąt, czworokąt, dziesięciokąt itd. Charakterystyka liczby wyrażona jest natomiast przyporządkowaną jej liczbową kukiełką lub liczbowym zwierzakiem. W krainie liczb dzieci nie uczą się matematyki, ale uczą się myślenia matematycznego, co sprawia, że odkrywają one realne piękno matematyki i rozwijają matematyczne zainteresowania.
6. Metoda bazująca na koncepcji Zbigniewa Naglaka, Andrzeja Rokity i Tadeusza Rzepy. Metoda ta odwołuje się do teorii ukazującej, że stymulowanie rozwoju motorycznego przyczynia się nie tylko do poprawy zdrowia dzieci, ale także do ich rozwoju intelektualnego, społecznego i emocjonalnego. Wykorzystuje się w niej zestaw 100 piłek do minigier zespołowych w pięciu kolorach (żółty, zielony, niebieski, czerwony, pomarańczowy) z namalowanymi (czarnymi) literami alfabetu (duże i małe litery), cyframi od 1 do 9 oraz 0, znakami działań matematycznych (+, –, =, *, :, (,), >, <) oraz ze znakami obsługi poczty internetowej (@), o nazwie EDUball (ryc. 1)[2].

[2] Czasem używa się zapisu: edubal, Eduball, a także – ze względu na sprzedaż licencji na wyłączność firmie Palos INC. z USA – BRAINball.

Rycina 1. Piłki edukacyjne EDUball

Trwające ponad szesnaście lat badania naukowe (Wawrzyniak, Cichy, Rokita, 2018) potwierdziły, iż wzbogacanie zajęć szkolnych zadaniami wykonywanymi z wykorzystaniem tego zestawu piłek istotnie polepsza efektywność edukacji matematycznej, szczególnie w kontekście dodawania i odejmowania, liczenia pieniędzy, mierzenia czasu, zadań na zbiorach, a także w zakresie pojęć związanych z liczbami naturalnymi i systemami pozycyjnymi.

Oprócz alternatywnych metod kształtowania kompetencji matematycznych dziecka wyróżnić można także nietradycyjne (technologiczne) przestrzenie realizacji tego procesu (Amuko, Miheso, Ndeuthi, 2015; Kandzia, 2016; Klichowski, Przybyła, 2017; Kwiecień, 2016; Przybyła, Basińska, Klichowski, 2014). Są to np.:

1. rzeczywistość wirtualna. Narzędzia oparte na technologii rzeczywistości wirtualnej mają bardzo duży potencjał w kontekście procesu kształtowania kompetencji matematycznych ucznia. Są one bowiem nie tylko ciekawym nośnikiem matematycznych treści, ale także – stymulując dzieci do specyficznych typów czynności – rozwijają matematyczne ośrodki mózgu (Przybyła, Klichowski, 2018). I tak uczniowie w okularach VR lub podłączeni do Kinecta tworzą i modyfikują w czasie rzeczywistym różnego typu wykresy i figury geometryczne niejako w powietrzu, ruszając kończynami, rozwijając zaawansowane pojęcia geometryczne, takie jak wektory 3D (Hsu, 2011).
2. cyberparki, to tereny zielone w miastach wyposażone w różnorakie narzędzia technologiczne (lub infrastrukturę do korzystania z własnych, mobilnych urządzeń), umożliwiające wykonywanie w nich różnorodnych zadań zarówno ruchowych, jak i poznawczych (Klichowski et al., 2015). Prowadzone przez kilka lat badania wykazały, iż uczenie się w cyberparkach jest bardzo efektywne (Klichowski, 2017). Można w nich uczyć się także matematyki, np. przy pomocy smartfonów i różnego typu aplikacji w nich zainstalowanych (Ludwig, Jesberg, 2015; Peng, Sollervall, 2014). Takie działania pokazują uczniom, że zadania matematyczne można rozwiązywać poprzez nowoczesne technologie, oraz że problemy te mogą być ściśle powiązane z realnym, codziennym życiem (Bonanno, Klichowski, Lister, 2019).

Poszukując alternatywnych metod kształtowania kompetencji matematycznych dziecka należy zawsze pamiętać, że priorytetem jest tu dziecko, jego dobro i rozwój. Niewłaściwe jest podporządkowywanie pracy edukacyjnej logice mody i stosowanie wciąż nowych rozwiązań bez głębszej analizy matematycznej rzeczywistości dziecka. W kontekście nowych technologii należy także pamiętać, jak ważny w matematycznym rozwoju dziecka jest kontakt z matematycznymi pomocami z realnego życia – narzędzia technologiczne są więc uzupełnieniem tradycyjnych narzędzi, a nie ich substytutem.

3. Specjalne potrzeby matematyczne dziecka

Do grupy dzieci o specjalnych potrzebach matematycznych zaliczyć można zarówno uczniów z trudnościami w uczeniu się matematyki, jak i uczniów uzdolnionych matematycznie.

Trudności w uczeniu się matematyki to bardzo szeroki termin odnoszący się do niejednorodnej grupy zaburzeń przejawiających się znaczącymi problemami w rozwijaniu kompetencji matematycznych. Zaburzenia te są uwarunkowane wewnętrznie (mają podłoże genetyczne) i są konsekwencją dysfunkcji mózgu (malformacji tych jego obszarów, które są organicznym podłożem zdolności operowania liczbami). Tego typu trudności mogą współwystępować z innymi zaburzeniami i deficytami (np. sensorycznymi, społecznymi i emocjonalnymi czy niepełnosprawnością umysłową) oraz mogą być powiązane z pewnymi czynnikami zewnętrznymi, jak np. różnice kulturowe, niewystarczające/niewłaściwe uczenie się, bodźce psychogenne, jednak nie są one rezultatem tych zaburzeń, deficytów i czynników. Trudności w uczeniu się matematyki są więc inną grupą zaburzeń, niż nabyte problemy z liczeniem (np. akalkulia), które ujawniają się nagle wskutek uszkodzenia mózgu, np. w wyniku udaru czy wypadku (Babtie, Emerson, 2015; Košč, 1974; Oszwa, 2006a, 2006b, 2009).

I choć od wielu lat problem trudności w uczeniu się matematyki jest szeroko omawiany i badany, zarówno na gruncie medycyny, psychologii jak i nauk o edukacji, nie można uznać go jednak za gruntownie poznany (Nelson, Powell, 2017). Ponadto, liczni autorzy używają w jego kontekście także innych – niekoniecznie synonimicznych – terminów, takich jak:

- niezdolność do matematyki,
- niezdolność do posługiwania się liczbami,
- niezdolność matematyczna,
- specyficzne trudności arytmetyczne,
- specyficzne upośledzenie arytmetyczne,
- specyficzne upośledzenie w uczeniu się arytmetyki,

– trudności matematyczne,
– upośledzenie arytmetyczne,
– upośledzenie matematyczne,
– upośledzenie w zakresie matematyki,
– upośledzenie zdolności liczenia,
– zaburzenia matematyczne,
– zaburzenie zdolności liczenia,
– dyskalkulia rozwojowa,
– ciężka dyskalkulia rozwojowa (Landerl, Kaufmann, 2015; Oszwa, 2006a).

Taka sytuacja wynika prawdopodobnie z interdyscyplinarności tego problemu oraz z faktu, iż do jego analizy przyjmuje się perspektywy różnych dziedzin i dyscyplin naukowych (Oszwa, 2006a, 2008, 2009). Rodzi to liczne pytania o charakterze diagnostycznym. Czy, na przykład, dyskalkulia to to samo, co trudności w uczeniu się matematyki? Albo czym różnią się specyficzne trudności od tych niespecyficznych?

Dyskalkulia odnosi się do tych dzieci z trudnościami w uczeniu się matematyki, które rozwijają się umysłowo w sposób normalny i ich rozwój przebiega w sprzyjających warunkach edukacyjnych, a zatem do tych uczniów, którzy mają znaczące problemy z liczeniem, a jednocześnie nie przejawiają żadnych zaburzeń ogólnych funkcji umysłowych i nie doświadczają żadnych edukacyjnych dyskomfortów – ich matematyczne trudności są więc rozwojowym zaskoczeniem (Babtie i Emerson, 2015; Ciechalska, Gut, 2018; Košč, 1974; Landerl, Kaufmann, 2015; Mareschal, Butterworth, Tolmie, 2013; Oszwa, 2008). Tacy uczniowie stanowią średnio 3-8,4% populacji szkolnej (Landerl, Kaufmann, 2015). Tabela 1 ukazuje różne typy dyskalkulii (należy mieć jednak świadomość, że tak jak trudno jednoznacznie zdefiniować pojęcie dyskalkulii, tak też trudno wyróżnić jej jednoznaczną typologię).

Tabela 1. Typy dyskalkulii

Dyskalkulia werbalna (słowna)	Przejawia się zaburzeniem umiejętności słownego wyrażania pojęć i zależności matematycznych (oznaczanie liczby i kolejności przedmiotów, nazywanie cyfr i liczebników, symboli działań i dokonań matematycznych).
Dyskalkulia leksykalna (dysleksja liczbowa)	Zaburzona jest umiejętność czytania symboli matematycznych (cyfr, liczb, znaków działań matematycznych i zapisanych operacji matematycznych). Uczeń nie potrafi odczytywać np. pojedynczych cyfr bądź myli cyfry o zbliżonym kształcie graficznym np. 6 i 9, 3 i 8, ma problemy w kojarzeniu symboli matematycznych z ich nazwami, odczytuje w odwrotnym kierunku liczby dwucyfrowe (14 jako czterdzieści jeden).

Dyskalkulia graficzna (dysgrafia liczbowa)	Trudność z zapisywaniem liczb i symboli matematycznych (współwystępuje często z dysgrafią i dysleksją) – w przypadku głębokich zaburzeń uczeń nie jest w stanie napisać dyktowanych mu liczb, napisać nazw liczb ani ich skopiować, a w łagodniejszej postaci zaburzenia dziecko ma problemy np. z zapisem liczb przy pisemnym dodawaniu, odejmowaniu, zapisaniem liczb wielocyfrowych, np. izoluje pojedyncze elementy (np. 2340 jako 2000, 300, 40), pomija zera albo wymyśla własne sposoby zapisu.
Dyskalkulia praktognostyczna (wykonawcza)	Zaburzenie manipulowania obiektami w celu obliczania liczebności, szeregowania przedmiotów wg. kolejności malejącej bądź rosnącej, czy porównywania wielkości i ilości.
Dyskalkulia ideognostyczna (pojęciowo-poznawcza)	Niezdolność rozumienia pojęć i zależności matematycznych oraz niezdolność wykonywania obliczeń w pamięci (uczeń ma trudności w dostrzeganiu zależności liczbowych np. 5 to połowa 10, 9 jest o 1 większe od 8).
Dyskalkulia operacyjna (czynnościowa)	Zaburzenie zdolności wykonywania operacji matematycznych (uczeń często zamienia operacje np. wykonuje dodawanie zamiast mnożenia, odejmowanie zamiast dzielenia, zastępuje skomplikowane operacje prostszymi, np. preferuje pisemne wykonywanie obliczeń – nawet wówczas, gdy łatwo może wykonać je w pamięci).

Źródło: *opracowanie własne na podstawie: Ferraz, Neves, Alves, Vicente, 2017; Kumar, 2015; Oszwa, 2006a.*

Termin specyficzne trudności odnosi się natomiast do uczniów z problemami matematycznymi, które nie są wrodzone – wynikają z niewłaściwego sposobu nauczania (czego konsekwencją mogą być na przykład po prostu braki w matematycznej wiedzy ucznia) i mogą być skutecznie eliminowane, gdy metoda kształtowania kompetencji matematycznych zostanie zmieniona (Gruszczyk-Kolczyńska, 1994).

Kwestia uczniów uzdolnionych matematycznie jest podobnie skomplikowana: Nie istnieją bowiem jasno określone kryteria diagnozowania uczniów zdolnych. Ponadto, są oni w większości przypadków wychowawczo i dydaktycznie zaniedbywaną grupą uczniów (Giza, 2006), choć średnio co czwarte dziecko wykazuje się wysokimi uzdolnieniami matematycznymi (Gruszczyk-Kolczyńska, 2014). Analizy literatury pozwalają jednak na stworzenie pewnej roboczej definicji uzdolnienia matematycznego: Jest to rozbudowana struktura mentalna składająca się z szeregu uzdolnień wzajemnie ze sobą powiązanych, takich jak:

- zdolność do pamiętania i rozumienia wzorów, twierdzeń oraz dowodów,
- umiejętność odkrywania stosunków oraz zależności,
- umiejętność wykorzystania zdobytej wiedzy w trakcie rozwiązywania zadań,
- zdolność do wyciągania wniosków (Ebby, Smutny, 1998; Pankiewicz, 2007; Szmidt, 2018).

Uzdolnione matematycznie są więc te dzieci, które potrafią radzić sobie z nowymi pojęciami i widzą zależności pomiędzy nimi – np. uczeń, który poznał jakieś nowe twierdzenie, potrafi rozwiązywać zadania bez uprzedniego rozwiązania podobnych zadań. Warto podkreślić, iż uzdolnienie matematyczne nie polega na znajomości ogromnej liczby pojęć matematycznych ani też rozumieniu tych pojęć. Geniusz matematyczny polega na znajdowaniu zależności pomiędzy pojęciami, znając nawet ich niewielką ilość.

Najlepszym i najmniej zawodnym sposobem wykrycia takich uczniów jest obserwacja prowadzona podczas wykonywania przez nich specjalnie dobranych zadań. Należy także z takimi uczniami dyskutować na temat rozwiązania, aby w ten sposób móc się przekonać, na jakim poziomie pojęcia zostały zrozumiane przez ucznia. Istotne jest również odpowiednie stawianie pytań na uczniowskiej drodze do rozwiązania problemu. Dopiero to daje w miarę wiarygodny obraz wiedzy i zdolności ucznia.

Rozwijanie zdolności matematycznych uczniów może dać nauczycielowi ogromną satysfakcję, ale jednocześnie stawia go przed wielkimi wyzwaniami i wymaga ogromnego wysiłku. Wśród kompetencji zawodowych, które powinien posiadać nauczyciel ucznia uzdolnionego matematycznie należy wymienić:

1. Kompetencje merytoryczne. Zaliczyć do nich należy przede wszystkim rozległą wiedzę matematyczną, umiejętność inspirowania ucznia do wszechstronnego patrzenia na matematykę, tzn. nie tylko należy pokazywać uczniowi, jak rozwiązywać zadanie, ale również, jak je uogólniać i jak korzystać z rozwiązanych wcześniej zadań; także umiejętność wskazania odpowiedniej literatury. Jeśli nauczyciel ucznia zdolnego nie potrafi sam pomóc w rozwinięciu talentu swojego podopiecznego powinien wskazać osoby lub ośrodki, które takiego wsparcia udzielają (np. niektóre szkoły oferują zajęcia otwarte koła matematycznego, a ośrodki akademickie zajęcia koła olimpijskiego).
2. Kompetencje dydaktyczne. To przede wszystkim znajomość dydaktyki pracy z uczniem zdolnym, ale także właściwy dobór metod, form i strategii pracy. Zgodnie z przepisami oświatowymi obowiązującymi w naszym kraju uczniowi zdolnemu można pomóc w rozwijaniu talentu m.in. poprzez:
   - prowadzenie indywidulanego toku nauczania,
   - napisanie indywidualnego programu nauczania,
   - wdrożenie innowacji bądź eksperymentów pedagogicznych (np. tworząc klasy autorskie prowadzone według własnych programów nauczania),
   - prowadzenie zajęć koła zainteresowań itp.
3. Kompetencje psychologiczne. To przede wszystkim umiejętność uczenia ucznia uzdolnionego samodzielności w rozwoju. Nauczyciel takie-

go ucznia musi być także bardzo otwarty i kreatywny oraz mieć dobre poczucie humoru i umieć zadbać nie tylko o rozwój intelektualny ucznia, ale również o jego sferę emocjonalną i społeczną.

Podsumowanie

Każde dziecko ma potencjał do opanowania matematyki w stopniu umożliwiającym mu efektywne wykorzystywanie jej w codziennym życiu. W każdej szkole są dzieci uzdolnione matematycznie i jeśli nauczyciel dostrzeże je i będzie odpowiednio je kształcić, to z pewnością osiągną one sukces nie tylko w szkolnej matematyce, ale także w konkursach matematycznych i olimpiadach, a być może nawet stworzą własną koncepcję matematyczną lub opublikują matematyczny artykuł. To wszystko jest możliwe, potrzebny jest jednak nauczyciel niebojący się matematyki i potrafiący nie zrazić do niej uczniów. Oczywiście, potrzebne są także „zmiany w organizacji edukacji wczesnoszkolnej, w doborze treści matematycznego kształcenia uczniów oraz metod prowadzenia edukacji matematycznej" (Gruszczyk-Kolczyńska, 2014, s. 13). Potrzebne jest także, by każdy z nauczycieli rozumiał, iż „powinien stale uzupełniać swoją wiedzę i doskonalić stosowane metody" (Semadeni, 1981, s. 11). W takiej rzeczywistości edukacyjnej matematyka przestaje być „zbiorem tematów w dzienniku" i staje się przygodą poznawczą i sposobem myślenia o rzeczywistości" (Klus-Stańska, Kalinowska, 2004, s. 16).

Zapamiętaj!

1. Każde dziecko może nauczyć się podstaw matematyki.
2. Co czwarte dziecko w szkole jest tak uzdolnione matematycznie, że mogłoby odnosić sukcesy w konkursach matematycznych i olimpiadach, a nawet tworzyć matematyczne koncepcje i publikacje.
3. Wczesne matematyczne doświadczenia decydują o tym czy człowiek w całym życiu będzie dobry z matematyki, czy też nie.
4. Nauczyciele dzieci muszą stale uzupełniać swoją matematyczną wiedzę i doskonalić stosowane w nauczaniu matematyki metody.

Pytania do samodzielnej nauki

1. Jakie metody wykorzystywali Twoi nauczyciele, gdy uczyli Cię matematyki? Spróbuj je wypisać, a następnie oceń, które z nich były najlepsze, a które najgorsze.

2. Wypisz wszystkie poznane metody kształtowania kompetencji matematycznych. Które z nich uznajesz za najlepsze? A które uważasz za zupełnie bezsensowne?
3. Obejrzyj filmy umieszczone na stronie: https://www.virtualiteach.com/single-post/2018/06/04/Maths-in-VR. Co sądzisz o takiej strategii wykorzystania nowych technologii?
4. Znajdź w Internecie jakieś forum dla rodziców dzieci z trudnościami w uczeniu się matematyki. Poczytaj wpisy i komentarze. Czy znajdujesz tam jakieś nieścisłości, opinie pozbawione uzasadnienia czy sensu? Wypisz kilka z nich i spróbuj napisać – tylko dla siebie – odpowiedź, wyjaśniającą, dlaczego ktoś się myli lub postępuje błędnie. Możesz potem umieścić swój komentarz na tym forum lub napisać artykuł o stereotypowym myśleniu o trudnościach matematycznych.

Warto przeczytać

1. Jeliński, S. (1968). *Lilavati. Rozrywki matematyczne.* Kraków: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych.
2. Kaczmarczyk, M., Rokita, A. (2011). *Zajęcia ruchowe z piłkami edukacyjnymi „edubal" a wiadomości i umiejętności matematyczne uczniów klasy I szkoły podstawowej.* „Rozprawy Naukowe" AWF we Wrocławiu, 34. (62-73).
3. Kruszwicka, A., Klichowski, M. (2019). *Cyberparki jako hybrydowe przestrzenie uczenia się: rozważania na marginesie projektu COST.* „Kwartalnik Pedagogiczny" 1. (71-83).
4. Przybyła, T., Klichowski, M. (2018). *„Cyfrowe liczby": przykłady narzędzi ICT służących kształtowaniu kompetencji matematycznych ucznia poprzez stymulację praksji.* W: *Psychoedukacyjne problemy młodzieży, czyli jak być świadomym wychowawcą*, (56-64). Poznań: Kuratorium Oświaty w Poznaniu.
5. Zaremba, D. (2014). *Jak tłumaczyć dzieciom matematykę: poradnik nie tylko dla rodziców*. Gliwice: Wydawnictwo Helion.

BIBLIOGRAFIA

Amuko, S., Miheso, M., Ndeuthi, S. (2015). *Opportunities and challenges: integration of ICT in teaching and learning mathematics in secondary schools, Nairobi, Kenya.* „Journal of Education and Practice" 6. (1-6).

Babtie, P., Emerson, J. (2015). *Understanding dyscalculia and numeracy difficulties: a guide for parents, teachers and other professionals*. London–Philadelphia: Jessica Kingsley Publishers.

Bereźnicki, F. (2011). *Dydaktyka kształcenia ogólnego*. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls".

Bonanno P., Klichowski M., Lister P. (2019). *A Pedagogical Model for CyberParks.* In: Smaniotto Costa, C., Šuklje Erjavec, I., Kenna, T., Lange de, M., Ioannidis, K., Maksymiuk, G., Waal de, M. (eds.). *CyberParks – The Interface Between People, Places and Technology,* (294-307). Cham: Springer.

Bondecka-Krzykowska, I. (2006). *Przewodnik po historii matematyki*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Bondecka-Krzykowska, I. (2013). *Historia obliczeń. Od rachunku na palcach do maszyny analitycznej.* Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain*. London: Mcmillan.

Butterworth, B. (2005a). *Developmental dyscalculia.* In: Campbell, J. (ed.), *Handbook of Mathematical Cognition,* (455-467). Hove: Psychology Press.

Butterworth, B. (2005b). *The development of arithmetical abilities.* „Journal of Child Psychology and Psychiatry" 46. (3-18).

Christodoulou, J., Lac, A., Moore, D.S. (2017). *Babies and math: A meta-analysis of infants' simple arithmetic competence.* „Developmental Psychology" 53. (1405-1417).

Ciechalska, D., Gut, M. (2018). *Komputerowe versus papierowe narzędzia oceny umiejętności matematycznych dzieci.* „Neuropsychiatria i Neuropsychologia" 13. (104-113).

Davis, P.J., Hersh, R., Marchisotto, E.A. (2001). *Świat matematyki*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Ebby, J.W., Smutny, J.F. (1998). *Jak kształcić uzdolnienia dzieci i młodzieży*. Warszawa: WSiP.

Ferraz, F., Neves, J., Alves, V., Vicente, H. (2017). *Dyscalculia: a behavioural vision.* In: Ntalianis, K., Croitoru, A. (eds.). *Applied Physics, System Science and Computers II* (199-206). Cham: Springer.

Giza, T. (2006). *Socjopedagogiczne uwarunkowania procesu identyfikowania oraz rozwoju zdolności uczniów w szkole*. Kielce: Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej.

Gruszczyk-Kolczyńska, E. (1994). *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki: przyczyny, diagnoza, zajęcia korekcyjno-wyrównawcze.* Warszawa: WSiP.

Gruszczyk-Kolczyńska, E., Zielińska, E. (1997). *Dziecięca matematyka. Edukacja matematyczna dzieci w domu, w przedszkolu i szkole*. Warszawa: WSiP.

Gruszczyk-Kolczyńska, E. (2014). *Zakończenie, czyli o sprawdzaniu wiadomości i umiejętności matematycznych uczniów z klasy I. Także o tym, dlaczego trzeba było napisać tę książkę.* W: Gruszczyk-Kolczyńska, E. (red.). *Edukacja matematyczna w klasie I. Książka dla nauczycieli i rodziców. Cele i treści kształcenia, podstawy psychologiczne i pedagogiczne oraz opisy zajęć z dziećmi*. Kraków: CEBP 24.12.

Houde, O., Tzourio-Mazoyer, N. (2003). *Neural Foundations of Logical and Mathematical Cognition.* „Nature Reviews Neuroscience" 4. (507-514).

Hrybiuk, O. (2014). *Mathematical modeling as a means and method of problem solving in teaching subjects of branches of mathematics, biology and chemistry.* In: *Proceedings of the First International Conference on Eurasian Scientific Development,* (46-53). Vienna: „East West" Association for Advanced Studies and Higher Education.

Hsu, H.J. (2011). *The potential of Kinect as interactive educational technology.* 2nd International Conference on Education and Management Technology IPEDR, 13. (334-338).

Kandzia, J. (2016). *Edukacja matematyczna a cywilizacji cyfrowa. Podmioty kształcenia wobec wyzwań technologii informacyjnych.* Warszawa: Wydawnictwo Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego.

Klichowski, M. (2017). *Learning in CyberParks. A theoretical and empirical study*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Klichowski, M., Bonanno, P., Jaskulska, S., Smaniotto Costa, C., de Lange, M., Klauser, F.R. (2015). *CyberParks as a new context for Smart Education: theoretical background, assumptions, and pre-service teachers' rating.* „American Journal of Educational Research" 3. (1-10).

Klichowski, M., Przybyła, T. (2017). *Does cyberspace increase young children's numerical performance? A brief overview from the perspective of cognitive neuroscience.* W: Krauze-Sikorska, H., Klichowski, M. (red.). *Świat małego dziecka. Przestrzeń instytucji, cyberprzestrzeń i inne przestrzenie dzieciństwa,* (425-444). Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Klim-Klimaszewska, A. (2005). *Pedagogika przedszkolna*. Warszawa: PIW.

Klus-Stańska, D., Kalinowska, A. (2004). *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów.* Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak".

Kordos, M. (2010). *Wykłady z historii matematyki*. Warszawa: SCRIPT.

Košč, L. (1974). *Developmental dyscalculia.* „Journal of Learning Disabilities" *7*. (46-59).

Kowalska, K., Klichowski, M. (2018). *„Interferencje języka": przegląd doniesień dotyczących pochodzenia i dynamiki związków języka z praksją i liczbami.* W: Kuszak, K. (red.). *Dziecko w przestrzeniach języka. Wybrane konteksty teoretyczne – wybrane perspektywy praktyczne,* (25-49). Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Kumar, V. (2015). *Understanding the dyscalculia.* In: Mathur A., Kaur S., Sharma Y., i Padmanabhan J. (eds.). *Dimensions of Innovations in Education,* (89-96). New Delhi: New Delhi Publishers.

Kwiecień, D. (2016). *Efektywne metody nauczania matematyki dla uczniów gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych z wykorzystaniem TIK*. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji.

Landerl, K., Kaufmann, L. (2015). *Dyskalkulia.* Gdańsk: Harmonia Universalis.

Ludwig, M., Jesberg, J. (2015). *Using mobile technology to provide outdoor modelling tasks – the mathcitymap-project.* „Procedia – Social and Behavioral Sciences" 191. (2778-2780).

Mareschal, D., Butterworth, B., Tolmie, A. (eds.). (2013). *Educational neuroscience*. Malden: John Wiley & Sons.

Murawski, R. (2017). *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Nelson, G., Powell, S.R. (2017). *A systematic review of longitudinal studies of mathematics difficulty.* „Journal of Learning Disabilities" 51. (523-539).

Nieder, A. (2005). *Counting on neurons: the neurobiology of numerical competence.* „Nature Reviews Neuroscience" 6. (177-190).

Oszwa, U. (2006a). *Zaburzenia rozwoju umiejętności arytmetycznych. Problem diagnozy i terapia.* Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls".

Oszwa, U. (2006b). *Specyficzne trudności w uczeniu się matematyki u dzieci.* W: Borowska, A.R., Domańska, Ł. (red.). *Neuropsychologia kliniczna dziecka. Wybrane zagadnienia,* (159-176). Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Oszwa, U. (2008). *Modele diagnozy zaburzeń arytmetycznych.* W: Oszwa, U. (red.). *Psychologia trudności arytmetycznych u dzieci. Doniesienia z badań,* (15-33). Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls".

Oszwa, U. (2009). *Psychologiczna analiza procesów operowania liczbami u dzieci z trudnościami w matematyce.* Lublin: Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej.

Pankiewicz, M. (2007). *Style komunikacji a preferencje wartości uczniów zdolnych.* „Studia z Psychologii" Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego, 14. (39-56).

Peng A., Sollervall, H. (2014). *Primary school students' spatial orientation strategies in an outdoor learning activity supported by mobile technologies.* „International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology" 2. (247-255).

Przybyla, T., Basińska, A., Klichowski, M. (2014). *Smartphones and children`s mathematics.* W: Krauze-Sikorska, H., Klichowski, M., Basinska, A. (red.), *Children in the Postmodern World. Culture – Media – Social Inequality,* (11-20). Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Przybyła, T., Klichowski, M. (2018). *Codzienne operacje arytmetyczne a problem kosztów podwójnego zadania: raport z eksperymentu behawioralnego kontrolowanego elektroencefalografem.* „Studia Edukacyjne" 49. (145-157).

Robinson, K. (2015). *Kreatywne szkoły*. Kraków: Element.

Rogalski, E. (1992). *Muzyka w pozaszkolnej edukacji estetycznej*. Bydgoszcz: Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Bydgoszczy.

Rościszewska-Woźniak, M. (2010). *Dobry start przedszkolaka*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak".

Schuberth, E. (2013). *Matematyka w szkołach waldorfskich*. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls".

Semadeni, Z. (1981). *Przedmowa.* W: Semadeni, Z. (red.). *Nauczanie początkowe matematyki: podręcznik dla nauczyciela,* (9-14). Warszawa: WSiP.

Semadeni, Z. (2014). *Jak skutecznie kształtować kompetencje matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej*. Warszawa: WSiP.

Skjöld Wennerström, K., Bröderman Smeds, M. (2007). *Pedagogika Montessori w przedszkolu i szkole*. Kraków: Oficyna Wydawnicza „Impuls".

Stańko, J., Spławska-Murmyło, M. (2017). *Metody aktywizujące w edukacji przedszkolnej i wczesnoszkolnej*. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji.

Szmidt, K.J. (2018). *Uczeń zdolny: fakty i mity*. http://www.wegielek.edu.pl/images/materialy/85.pdf [dostęp: 31.12.2018].

Walerzak-Więckowska, A., Lipowska, M., Jurek, P. (2018). *Dyskalkulia rozwojowa – deficyt wiadomości matematycznych czy umiejętności arytmetycznych – od rozważań terminologicznych do praktyki diagnostycznej*. „Polskie Forum Psychologiczne" 23. (759-782).

Wawrzyniak, S., Cichy, I., Rokita, A. (2018). *I learn playing – EDUballs in early childhood education.* 28th EECERA Annual Conference: Early Childhood Education, Families and Communities. Budapeszt.

Wood, D. (2006). *Jak dzieci uczą się i myślą. Społeczne konteksty rozwoju poznawczego*. Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Woodfield, L. (2004). *Physical development in the early years*. New York: Continuum International Publishing Group.